

Cagliari, 03/09/2025

**Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)**

**MATRICOLA** \_\_\_\_\_

**NOME e COGNOME** \_\_\_\_\_

**1) Goniometria (4 punti)**

a) Risolvere la seguente espressione goniometrica (2 punti):

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

b) Risolvere la seguente equazione goniometrica (2 punti):

$$2\cos^2 x - 1 = 0$$

**2) Studio di funzione: Degradazione del Paracetamolo nel Sangue (13 punti)**

*Il paracetamolo (acetaminofene) è un farmaco comunemente usato per alleviare il dolore e ridurre la febbre. La concentrazione nel sangue di paracetamolo diminuisce nel tempo mentre viene metabolizzato ed eliminato dal corpo.*

Viene somministrata ad un paziente una dose di paracetamolo con una concentrazione iniziale nel sangue di 2 mg/L. La concentrazione del farmaco diminuisce gradualmente nel tempo (in ore) a causa del metabolismo e dell'eliminazione da parte del corpo umano secondo la seguente legge (per  $t \geq 0$ ):

$$C(t) = \frac{t + k}{t^2 + 8t + 15}$$

Dove  $k$  è una costante positiva e non nulla.

- Ricavare il valore di  $k$  perché il tasso di variazione iniziale (i.e. il valore della derivata prima per  $t = 0$ ) sia pari a -1 mg/L per ora (-1 mg/L/hr). (3 punti)
- Si calcoli il valore iniziale della funzione  $C(t)$ . (1 punto)
- Utilizzando il valore di  $k$  trovato, studiare la funzione generica  $C(x)$  per  $x \geq -30$ , escludendo il calcolo della derivata seconda e tracciandone il grafico. (6 punti)
- Effettuando uno studio per punti, tracciare il grafico dettagliato della funzione  $C(t)$  nel corso delle 24 ore e ricavare dopo quanto tempo la concentrazione raggiunge il valore di 0.125 mg/L. (3 punti)

### 3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (6 punti)

Sia data la seguente funzione, che modella la velocità di crescita di una popolazione batterica (in milioni di unità) rispetto al tempo (in secondi) in un ambiente ricco di nutrienti:

$$v(t) = \frac{t + 1}{t^2 + 8t + 15}$$

- Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo tempo. (4 punti)
- Tracciare il grafico della funzione trovata (per punti), per un numero di batteri iniziale pari a un milione e focalizzandosi sulla prima ora. (2 punti)

### 4) Statistica: Tasso di omicidi nelle capitali europee (7 punti)

Si vuole effettuare una statistica sul tasso di omicidi nelle grandi capitali europee (con una popolazione uguale o superiore al milione di abitanti).

Facendo riferimento a dati relativi all'anno 2020, si ottiene la seguente tabella che lega la popolazione di tre grandi città (in milioni di abitanti) al numero di omicidi registrati in quell'anno:

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23

- Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra la popolazione ed il numero di omicidi registrati. (3 punti)
  - Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
  - Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il tasso di omicidi di una grande capitale europea sia di 4 omicidi per milione di abitanti. (2 punti)
-

## Valori di riferimento per i test di ipotesi

Test T				
$\alpha$ v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
39	1.685	2.023	2.708	3.558
49	1.677	2.010	2.680	3.500
59	1.671	2.001	2.662	3.463
69	1.667	1.995	2.649	3.437
79	1.664	1.990	2.640	3.418
89	1.662	1.987	2.632	3.403
99	1.660	1.984	2.626	3.392

Test Z				
$\alpha$	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Test $\chi^2$				
$\alpha$ v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
11	17.275	19.675	24.725	31.264
12	18.549	21.026	26.217	32.909
13	19.812	22.362	27.688	34.528
14	21.064	23.685	29.141	36.123
15	22.307	24.996	30.578	37.697
16	23.542	26.296	32.000	39.252
17	24.769	27.587	33.409	40.790
18	25.989	28.869	34.805	42.312
19	27.204	30.144	36.191	43.820
20	28.412	31.410	37.566	45.315
21	29.615	32.671	38.932	46.797
22	30.813	33.924	40.289	48.268
23	32.007	35.172	41.638	49.728
24	33.196	36.415	42.980	51.179
25	34.382	37.652	44.314	52.620
26	35.563	38.885	45.642	54.052
27	36.741	40.113	46.963	55.476
28	37.916	41.337	48.278	56.892
29	39.087	42.557	49.588	58.301
30	40.256	43.773	50.892	59.703

$$Z^* = \frac{|x - \mu|}{\sigma} \sqrt{n} \quad T_{n-1}^* = \frac{|x - \mu|}{s} \sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i^{\text{expected}} - f_i^{\text{observed}})^2}{f_i^{\text{expected}}}$$

Retta di regressione lineare (generica):  $m = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \quad q = \bar{y} - m\bar{x}$

# SOLUZIONI

## 1) GONIOMETRIA

a)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

b)

$$2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} \cup x = \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

## 2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$C(t) = \frac{t+k}{t^2+8t+15} \quad C_0 = 2 \frac{mg}{L} \quad C'(t=0) = -1 \frac{mg}{L \cdot hr}$$

a)  $C'_0 = -1$

$$C'(t) = \frac{t^2 + 8t + 15 - (t+k)(2t+8)}{(t^2 + 8t + 15)^2} = \frac{-t^2 - 2kt + 15 - 8k}{(t^2 + 8t + 15)^2}$$

$$C'_0 = \frac{15 - 8k}{15^2} = -1 \rightarrow 15 - 8k = 15^2 \rightarrow k = 30$$

$$C(t) = \frac{t + 30}{t^2 + 8t + 15}$$

b)

$$C_0 = C(t=0) = \frac{30}{15} = 2$$

c)

$$C(x) = \frac{x + 30}{x^2 + 8x + 15} \quad \text{con } x \geq -30$$

- DOMINIO

$$x^2 + 8x + 15 \neq 0 \rightarrow (x + 3)(x + 5) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

- INTERSEZIONI ASSE X

$$C(x) = 0 \rightarrow x + 30 = 0 \rightarrow x = -30 \rightarrow A(-30; 0)$$

- INTERSEZIONI ASSE Y

$$x = 0 \rightarrow C = 2 \rightarrow B(0; 2)$$

- STUDIO DEL SEGNO

$$C(x) > 0$$

$$N(x) > 0 \rightarrow x > -30$$

$$D(x) > 0 \rightarrow (x + 3)(x + 5) > 0 \rightarrow x < -5 \cup x > -3$$

$$C(x) > 0 \rightarrow -30 < x < -5 \cup x > -3$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 30}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO NELL'INTORNO DEGLI ASINTOTI VERTICALI

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} C(x) = \frac{25}{-2 \cdot 0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} C(x) = \frac{25}{-2 \cdot 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} C(x) = \frac{27}{2 \cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} C(x) = \frac{27}{2 \cdot 0^+} = +\infty$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA ED ESTREMI RELATIVI

$$C'(x) = \frac{-x^2 - 60x - 225}{(x^2 + 8x + 15)^2}$$

$$C'(x) = 0 \rightarrow N'(x) = 0$$

$$-x^2 - 60x - 225 = 0 \rightarrow x^2 + 60x + 225 = 0$$

$$\Delta = 60^2 - 4 \cdot 225 = 2700$$

$$x_{1,2} = \frac{-60 \pm \sqrt{2700}}{2} = \frac{-60 \pm 30\sqrt{3}}{2} = -30 \pm 15\sqrt{3} = 15(-2 \pm \sqrt{3})$$

$$x_1 = 15(-2 + \sqrt{3}) \approx -4 \rightarrow y_1 = C(x_1) = -26 \rightarrow \mathbf{M(-4; -26)}$$

$$x_2 = 15(-2 - \sqrt{3}) \approx -56 \quad \text{FUORI DOMINIO}$$

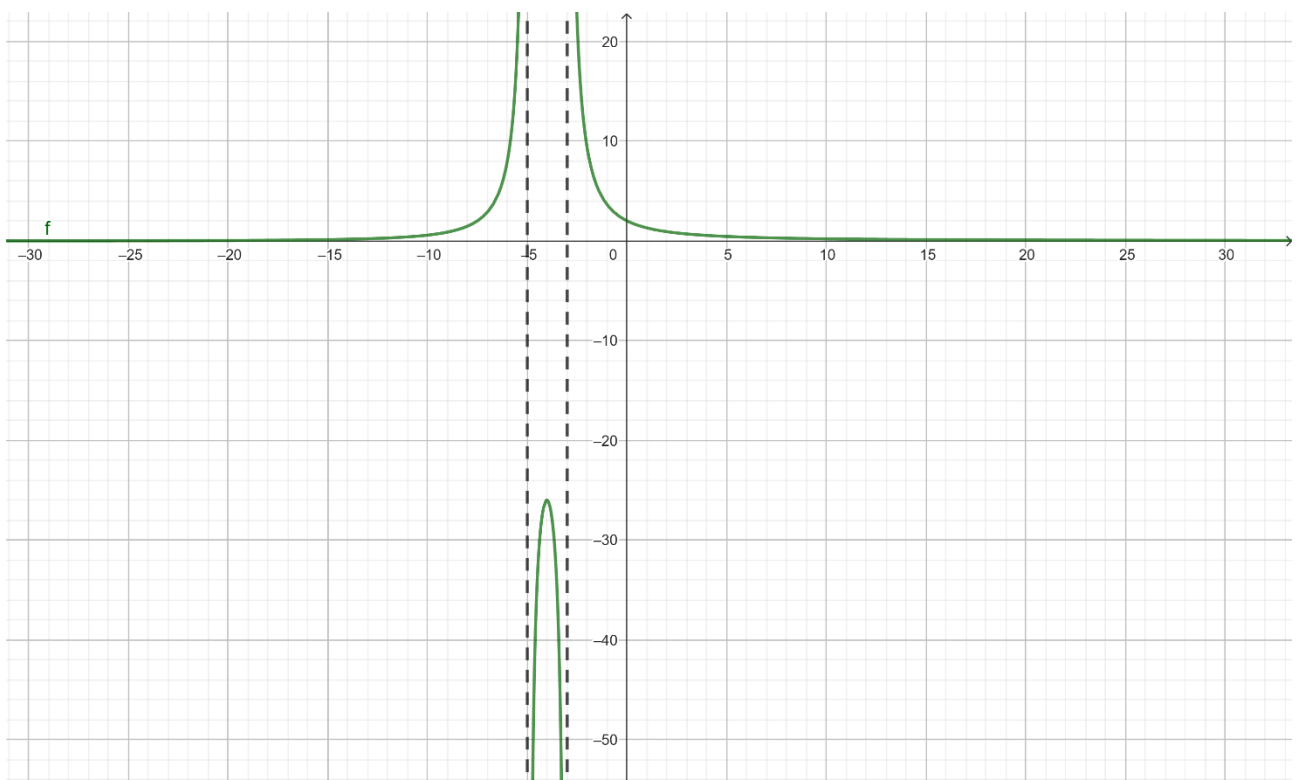
$$C'(x) \geq 0$$

$$N'(x) \geq 0 \rightarrow -x^2 - 60x - 225 \geq 0 \rightarrow x^2 + 60x + 225 \leq 0$$

$$\mathbf{-56 \leq x \leq -4} \rightarrow -30 \leq x \leq -4$$

$$D'(x) \geq 0 \rightarrow (x^2 + 8x + 15)^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in R$$

$$\mathbf{C'(x) \geq 0} \rightarrow \mathbf{-30 \leq x \leq -4}$$



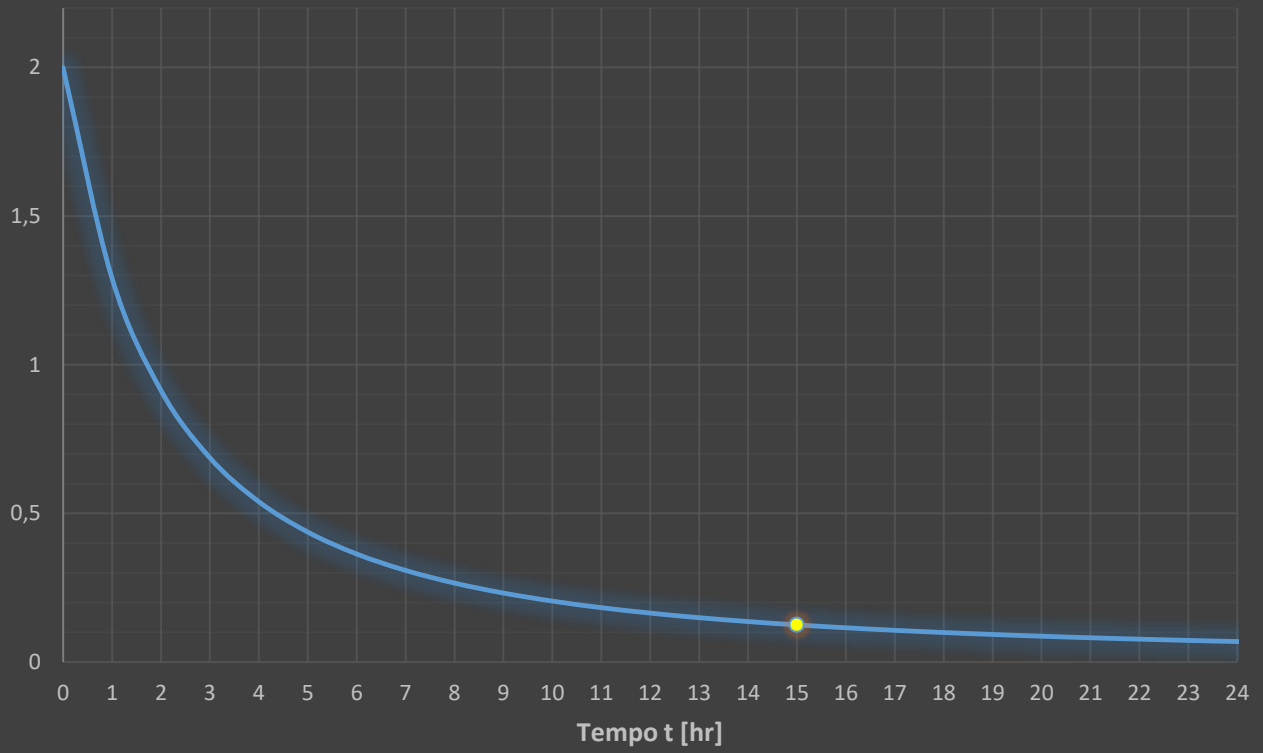
d)

$$C(t) = \frac{t + 30}{t^2 + 8t + 15} \quad C_S = 0.125 \text{ mg/L}$$

t [hr]	C [mg/L]
0	2
1	1.292
2	0.914
3	0.688
4	0.540
5	0.438
6	0.364
7	0.308
8	0.266
9	0.232
10	0.205
11	0.183
12	0.165
13	0.149
14	0.136
<b>15</b>	<b>0.125</b>
16	0.115
17	0.107
18	0.099
19	0.093
20	0.087
21	0.082
22	0.077
23	0.073
24	0.069

N.B.: La frequenza di campionamento, ovvero il numero di ore ogni cui calcolare il valore della funzione, deve essere tale da permettere di disegnare un grafico qualitativamente accurato e corretto. In questo caso, si propone una frequenza oraria con 25 campioni (0-24) per completezza di esposizione e per motivi pratici legati alla realizzazione del grafico su excel, ma sarebbe stato sufficiente anche un numero di campioni inferiore.

### Concentrazione di paracetamolo nel sangue [mg/L]



### 3) INTEGRALE

$$v(t) = \frac{t + 1}{t^2 + 8t + 15}$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento  $t_x$ , bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e  $t_x$ :

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t) dt$$

$$\frac{t + 1}{t^2 + 8t + 15} = \frac{A}{t + 3} + \frac{B}{t + 5} = \frac{(A + B)t + 5A + 3B}{(t + 3)(t + 5)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 5A + 3B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

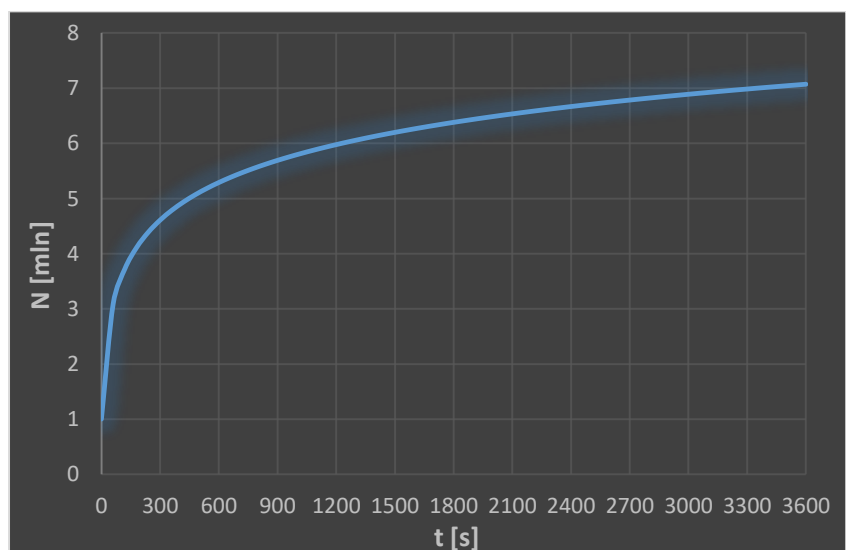
$$v(t) = \frac{2}{t + 5} - \frac{1}{t + 3}$$

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t) dt = \int_0^{t_x} \left( \frac{2}{t + 5} - \frac{1}{t + 3} \right) dt = [2 \ln(t + 5) - \ln(t + 3) + c]_0^{t_x}$$

$$N(t) = 2 \ln(t_x + 5) - \ln(t_x + 3) - (2 \ln 5 - \ln 3) \quad | \quad N(t) = \ln \left[ \frac{(t_x + 5)^2}{t_x + 3} \right] - \ln \frac{25}{3}$$

b)

t [s]	N [mln]
0	1
60	3.085
120	3.724
180	4.111
240	4.389
300	4.607
360	4.785
420	4.937
480	5.068
540	5.184
600	5.288
1200	5.976
1800	6.379
2400	6.666
3000	6.888
3600	7.070



N.B.: Si noti come la frequenza di campionamento considerata non sia costante, ma sia stata adeguata alla funzione stessa.

#### 4) STATISTICA

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23

a)

Avendo un numero limitato di campioni ( $N = 3$ ), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Dati	Media	Varianza campionaria	Dev. Std campionaria
Popolazione (mln ab.)	4.24	4.76	2.18
Omicidi	29.33	72.33	8.50

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = 17.96$$

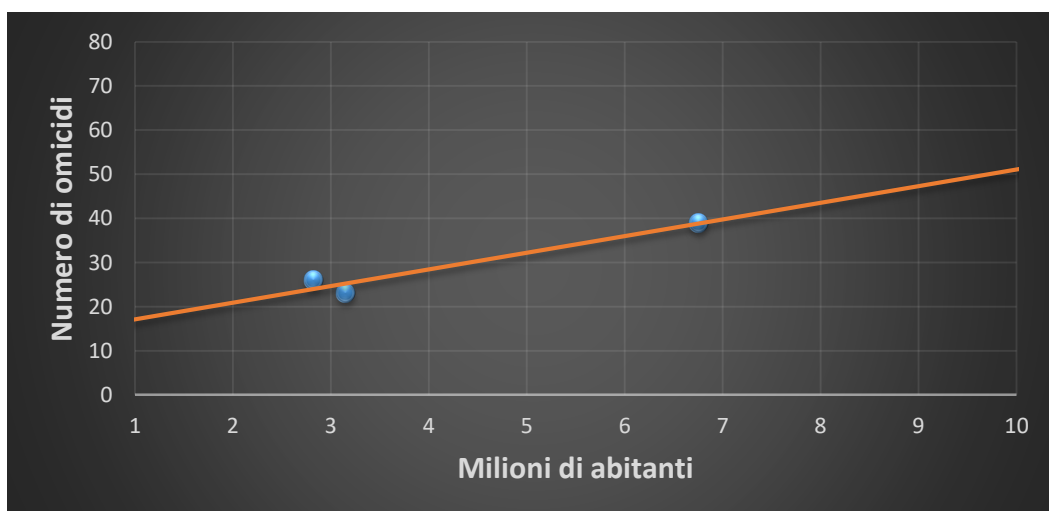
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.968$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$y = 3.774 x + 13.32$$



c)

Il test fa riferimento al tasso di omicidi per milione di abitanti, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati mediante il rapporto tra il numero di omicidi e la popolazione:

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23
<b>Tasso di omicidi per milione di abitanti</b>	<b>9.21</b>	<b>5.77</b>	<b>7.29</b>

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a  $n = 3$ . Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a  $v = n - 1 = 2$  e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$T_{n-1}^* = \frac{|x - \mu|}{s} \sqrt{n}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

Media	7.43
Varianza C	2.967
Dev Std C	1.722
<b>Pivot T*</b>	<b>3.445</b>

Test T				
$\alpha$	0.10	0.05	0.01	0.001
v				
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per  $v = 2$ , si ottiene che l'ipotesi nulla  $H_0$  secondo la quale il tasso di omicidi sia pari a **4** è negabile al 90% ma non al 95%.