MATEMATICA E STATISTICA (PARI) – CdL in FARMACIA

SIMULAZIONE 2

1) Studio di funzione: Ottimizzazione di un antibiotico (17 punti)

Si vuole ottimizzare un antibiotico a base di sulfametoxazolo e trimetoprim, simile al Bactrimel, usato per trattare e prevenire diverse infezioni batteriche. Sia data la seguente funzione, che modellizza la concentrazione del farmaco nel sangue in funzione del tempo:

$$C(t) = kt^2 e^{-t}$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla interessato ed il tempo è dato in ore.

a) Ottimizzare la funzione, calcolando il valore di *k* necessario per avere una concentrazione massima C_{MAX} di antibiotico nel sangue pari a 40.6 µg/mL ed indicando dopo quanto tempo dall'assunzione, la concentrazione raggiunge tale valore. (4 punti)
b) Utilizzando il valore di *k* calcolato al punto precedente, studiare la funzione generica *C(x)*. (8 punti)
c) Tracciare il grafico dettagliato e per punti della funzione *C(t)*. (2 punti)
d) Dopo quanto tempo dall'assunzione, l'antibiotico si può dire smaltito dall'organismo? Assumere un valore soglia C_0 pari a 0.1 µg/mL. (2 punti)
e) Assumendo di prescrivere questo antibiotico ad un paziente, facendo riferimento al valore ottenuto al punto precedente, per quante volte al giorno ed ogni quante ore consigliereste di assumere il farmaco? (1 punto)

2) Proliferazione di una colonia virale (6 punti)

Viene condotto uno studio sulla proliferazione di un virus all'interno di un campione inizialmente costituito da 68 microorganismi. Si ottiene che l'andamento della velocità di proliferazione può essere descritta dalla seguente funzione:

$$v_P(t) = \frac{10t + 24}{t^2 + 5t + 6}$$

Dove il tempo t è espresso in minuti e la velocità di proliferazione v_P in numero di virus al minuto (min^{-1}).

Calcolare il numero di virus presenti nel campione dopo un'ora.

3) Statistica: Puzzle (7 punti)

Un'azienda produttrice di puzzle vuole effettuare un'indagine statistica sul legame tra il numero di vendite e la tipologia di puzzle acquistati in termini di numero di pezzi.

La statistica prende come campione di 8 000 puzzle venduti e suddivisi come segue:

Tipologia	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Numero di pezzi	1000	1500	2000	5000	10000
Puzzle venduti	3020	2481	1794	514	191

a) Tenendo conto sia del peso diverso che ciascuna tipologia ha all'interno della popolazione dei puzzle venduti che della dimensione della popolazione considerata, verificare il tipo di correlazione tra il numero di vendite e la tipologia di prodotto in termini di numero di pezzi del puzzle. (3 punti)
b) Visualizzare il legame tra il numero di vendite e la relativa tipologia, sovrapponendolo ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

Retta di regressione lineare (generica): $m = \dfrac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2} \qquad q = \bar{y} - m\bar{x}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

a) Per trovare il punto di concentrazione massima, bisogna calcolare la derivata prima ed individuare il punto in cui essa si annulla:

$$C'(t) = k\,(2t\,e^{-t} - t^2\,e^{-t}) = k\,(2-t)\,t\,e^{-t}$$

$$C'(t) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \boldsymbol{t = 2} \end{cases}$$

Escludendo ovviamente la soluzione *t = 0* (che comunque rappresenta indica comunque la presenza di un estremo relativo nell'origine degli assi e del quale si dovrà tenere conto in sede di studio di funzione), la concentrazione massima viene raggiunta dopo 2 ore dall'assunzione del farmaco.

Imponendo le condizioni $C_{MAX} = 40.6\ \mu g/mL$ e $t_{CMAX} = 2$ *ore*, si può scrivere:

$$C(t_{CMAX}) = k\,{t_{CMAX}}^2 e^{-t_{CMAX}} \rightarrow k = \frac{C(t_{CMAX})}{{t_{CMAX}}^2 e^{-t_{CMAX}}} \rightarrow k = \frac{40.6}{4e^{-2}} = 75$$

b) La funzione ammette un minimo per x = 0 ed un massimo per x = 2.

La derivata seconda risulta:

$$C''(x) = k(x^2 - 4x + 2)e^{-x} = 75(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

Che si annulla in corrispondenza delle radici del polinomio $x^2 - 4x + 2$:

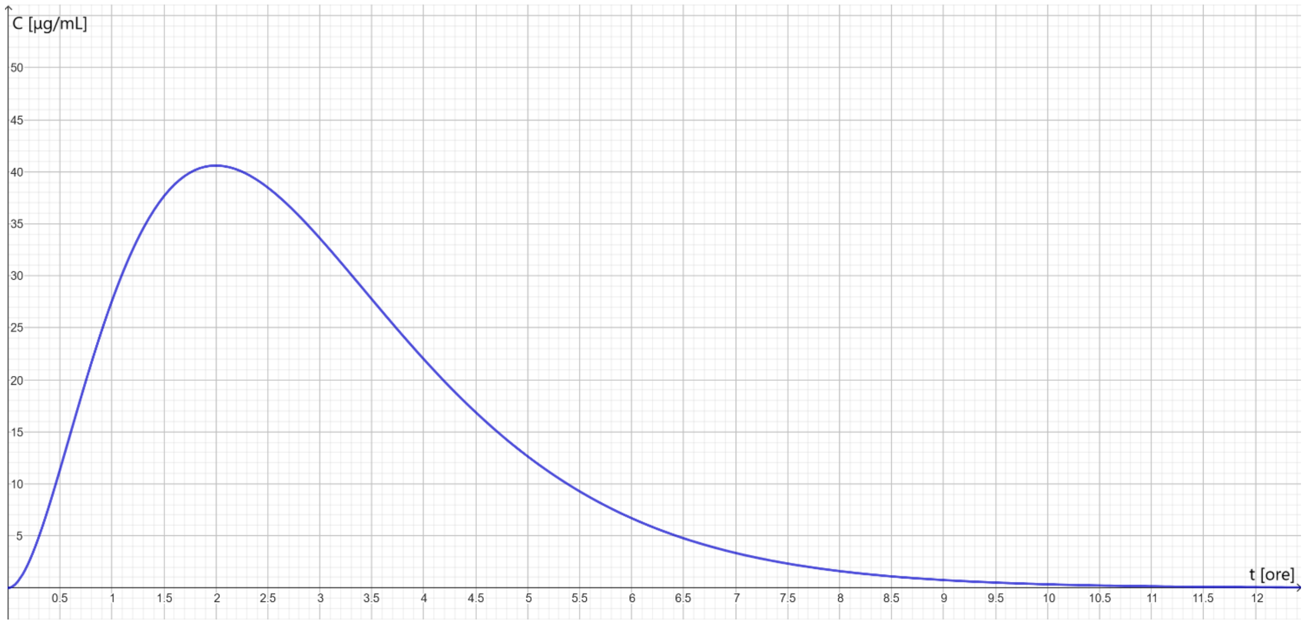
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \ \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Vi sono quindi due punti di flesso: $F_1\ (2 - \sqrt{2}; 14.33)$ e $F_2\ (2 + \sqrt{2}; 28.77)$

Il grafico di *C(x)* è il seguente:

c)

t [ore]	C [µg/mL]
0	0
0.25	3.65
0.5	11.37
0.75	19.93
1	27.59
1.5	37.65
2	**40.60**
2.5	38.48
3	33.61
3.5	27.74
4	21.98
4.5	16.87
5	12.63
5.5	9.27
6	6.69
6.5	4.76
7	3.35
7.5	2.33
8	1.61
8.5	1.10
9	0.75
9.5	0.51
10	0.34
10.5	0.23
11	0.15
11.5	**0.10**
12	0.07



d) Dalla tabella di cui al punto precedente, si evince come il valore di soglia venga raggiunto dopo 11h 30min dall’assunzione.

e) L’antibiotico può essere assunto per due volte al giorno, cioè ogni 12 ore.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

N_0 = 32 batteri; t_x = 1 hr = 60 min

La funzione che dà il numero di batteri in funzione del tempo è data dall'integrale indefinito di $v_P(t)$:

$$N(t) = \int v_P(t)\, dt$$

Per calcolare l'integrale indefinito della funzione, si deve scomporre la funzione fratta mediante il metodo dei fratti semplici:

$$\int v_P(t)\, dt = \int \frac{10t + 24}{t^2 + 5t + 6} dt = 2 \int \frac{5t + 12}{(t + 2)(t + 3)} dt$$

$$\frac{5t + 12}{(t + 2)(t + 3)} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t + 3} = \frac{(A + B)t + (3A + 2B)}{(t + 2)(t + 3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ 3A + 2B = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Percio:

$$\frac{5t + 12}{(t + 2)(t + 3)} = \frac{2}{t + 2} + \frac{3}{t + 3}$$

Possiamo così svolgere l'integrale:

$$\int v_P(t)\, dt = 2 \int \left(\frac{2}{t + 2} + \frac{3}{t + 3} \right) dt = 2[2 \ln(t + 2) + 3 \ln(t + 3)] + c =$$

$$= 4 \ln(t + 2) + 6 \ln(t + 3) + c$$

Per calcolare il numero di virus dopo un'ora (60 minuti), si deve svolgere l'integrale definito tenendo conto della popolazione iniziale:

$$N_x = N_0 + \int_0^{t_x} v_P(t)\, dt$$

$$N_x = N_0 + 4 \ln(t_x + 2) + 6 \ln(t_x + 3) - 4 \ln 2 - 6 \ln 3 = 100\ virus$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Tipologia	A	B	C	D	E
Numero di pezzi	1000	1500	2000	5000	10000
Puzzle venduti	3020	2481	1794	514	191

a)

Avendo un numero di unità (puzzle venduti) pari a 8 000, NON si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario, bensì a quelli classici. Inoltre, come suggerito nel testo, ad ogni tipologia corrisponde un diverso numero di puzzle, perciò la media per la tipologia di puzzle dovrà essere calcolata come media ponderata piuttosto che aritmetica.

	Media	Varianza	Dev Std
Tipologia (pezzi)	1 851	15 437 633	3 929
Puzzle venduti	1 600	1 198 975	1 095

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione (con N = 5):

$$\sigma_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = -3\ 378\ 100$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -0.762$$

La correlazione è quindi di natura forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.21\ x + 2\ 191}$$