Problema 1.

Sia $f : X \to Y$ una funzione, e sia $\mathcal{F} \subseteq P(Y)$. Si provi che

$$f^{-1}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} f^{-1}(A)$$

Problema 2.

Sia X l'insieme dei numeri interi positivi pari e sia Y l'insieme dei numeri interi positivi dispari. Dire se la funzione $f : X \to Y$ definita da $f(z) = 2z - 1$ è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, 9 divide $4^n + 15n - 1$.

Problema 4.

Sia R una relazione d'ordine parziale su un insieme X. Per ogni $x \in X$ si definisca l'insieme $P_x = \{a \in X : (a, x) \in R\}$. Dimostrare che, per ogni $x, y \in X$, vale la seguente:

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad P_x \subseteq P_y$$

Problema 5.

Siano a, b, c numeri interi non nulli e denotiamo con (a, b) il MCD tra a e b. Si dimostri che

$$(a, (b, c)) \quad \text{divide} \quad ((a, b), c)$$

Problema 6.

Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale diverso da zero e si consideri il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv_4 a \\ ax \equiv_2 1 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di a il sistema ammette soluzioni.