# ANALISI II

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

14-7-2025

# Indice

# Sintesi del corso

## INTERATTIVITÀ

Sulla falsariga del seguente programma, sono possibili modifiche e adattamenti a richiesta degli studenti.

---

## PROGRAMMA

- Equazioni differenziali;

- Successioni e serie di funzioni;

- Derivate parziali, massimi e minimi;

- Rappresentazione parametrica di curve e superfici;

- Integrali doppi e tripli, integrali curvilinei, integrali superficiali.

---

## LIBRO DI TESTO

Pagani, Salsa:
Analisi Matematica vol. 2.
Masson/Zanichelli.

## MODALITÀ D'ESAME

L'esame consiste in una prova orale. Non è prevista una prova scritta, ma lo studente deve saper svolgere alla lavagna esercizi dello stesso livello di difficoltà di quelli assegnati durante il corso.

---

## COME STUDIARE

1. Discutere a lezione gli argomenti del corso;

2. Riguardare a casa, di volta in volta, ogni lezione;

3. Consultare almeno un libro, oltre alle dispense;

3. Svolgere, di volta in volta, gli esercizi;

4. Discutere con il professore lo svolgimento degli esercizi;

5. Discutere con il professore le modalità di svolgimento del corso.

Per ulteriori informazioni, vedere "Come si studia la matematica" sul sito http://people.unica.it/antoniogreco

# Equazioni differenziali

## INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

## 1. PRIMI ESEMPI

A. Le funzioni costanti $y(t) \equiv c$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 0.$$

B. Le funzioni esponenziali $y(t) = c\,e^t$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y.$$

C. Le funzioni periodiche della seguente forma: $y(t) = a\,\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 0.$$

## 2. CONCETTO GENERALE

Un'equazione differenziale è un problema che consiste nel trovare tutte le funzioni $y(t)$ tali che, sostituendo la stessa $y(t)$ e le sue derivate $y^{(k)}(t)$ al posto delle variabili di una funzione data

$$F(t, y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

risulta soddisfatta l'uguaglianza seguente:

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

per ogni $t$ in un dato intervallo.

Si chiama "ordine" dell'equazione il valore numerico di $n$.

Classicamente, si intende che le soluzioni $y(t)$ devono essere funzioni derivabili almeno $n$ volte, e che anche la derivata $y^{(n)}(t)$ sia continua.

## 3. RIVEDIAMO I PRIMI ESEMPI ALLA LUCE DEL CONCETTO GENERALE

A. La funzione $F$ è

$$F(t, y_0, y_1) = y_1.$$

Il problema ad essa associato è quello di trovare le funzioni $y(t)$ tali che

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0,$$

cioè tali che

$$y'(t) = 0.$$

B. La funzione $F$ è

$$F(t, y_0, y_1) = y_1 - y_0.$$

Il problema ad essa associato è quello di trovare le funzioni $y(t)$ tali che

$$y'(t) - y(t) = 0.$$

L'ordine di questa equazione è 1, come per quella precedente.

C. La funzione $F$ è

$$F(t, y_0, y_1, y_2) = y_2 + y_0.$$

Il problema associato è quello di trovare le funzioni $y(t)$ tali che

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0,$$

cioè tali che

$$y''(t) + y(t) = 0.$$

Questa è un'equazione del secondo ordine.

## 4. MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

I. Molte leggi fisiche sono espresse da equazioni differenziali.

Esempio: la seconda legge della dinamica newtoniana del punto materiale

$$\boldsymbol{F} = m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

è un'equazione nella quale sono dati la massa $m$ del punto ed il campo $\boldsymbol{F}$ delle forze applicate, e l'incognita è la funzione $\boldsymbol{r}(t)$.

Risolvendo un'equazione differenziale è possibile fare previsioni sull'evoluzione del sistema.

II. Le equazioni differenziali si usano anche al di fuori della fisica.

## 5. INTEGRALE GENERALE

Si noti, innanzitutto, che una soluzione di un'equazione differenziale è una funzione, e non un singolo valore numerico.

Si chiama "integrale generale" di una data equazione una formula che rappresenta tutte le soluzioni, che, di solito, sono infinite.

Esempio semplice: l'integrale generale dell'equazione $y' = 0$ è

$$y = c.$$

È naturale che nell'integrale generale figurino dei parametri, al variare dei quali si individuano le diverse soluzioni.

## 6. FORMA NORMALE

Si dice che un'equazione differenziale è in "forma normale" quando il primo membro è soltanto $y^{(n)}$, e al secondo membro stanno solo termini di ordine inferiore ad $n$.

Dunque un'equazione differenziale è in forma normale quando è scritta come segue:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Si intende che la funzione $f$ varia da equazione a equazione, mentre $y(t)$ denota la funzione incognita.

Esempio: l'equazione $y'' + y = 0$ non è in forma normale, ma la si può porre in tale forma scrivendo

$$y'' = -y.$$

In questo caso la funzione $f$ è $f(y) = -y$.

## 7. PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy risulta dal considerare, oltre ad un'equazione differenziale in forma normale, anche delle condizioni, dette condizioni iniziali, che richiedono che in un dato punto $t_0$ la funzione incognita $y$ e le sue derivate $y', \ldots, y^{(n-1)}$ abbiano valori prestabiliti $y_0, \ldots, y_{n-1}$.

Il problema di Cauchy si rappresenta come segue:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Esempio: il moto di un punto materiale è determinato non solo dalla legge di Newton

$$\boldsymbol{F} = m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

ma anche dalla posizione $\boldsymbol{r}(t_0)$ e dalla velocità $\boldsymbol{r}'(t_0)$ del punto medesimo in un particolare istante $t_0$.

I valori $\boldsymbol{r}(t_0)$ e $\boldsymbol{r}'(t_0)$ sono i dati iniziali di un problema di Cauchy, e $t_0$ si dice "istante iniziale".

Il problema ai valori iniziali si chiama "di Cauchy" perché Cauchy ha dimostrato che esso ha una soluzione, anche se non sempre semplice da scrivere, ed essa è unica, sotto l'ipotesi che la funzione $f(t, y_0, \ldots, y_{n-1})$ sia di classe $C^1$ (v. pagine A21 e A47).

Si badi che il "problema di Cauchy", il "teorema di Cauchy", ed il "criterio di Cauchy" di cui a pag. A23 sono tre cose diverse.

## 8. EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Quando la funzione incognita $y(x_1, \ldots, x_N)$ dipende da più variabili anziché da una sola, l'equazione differenziale viene detta "equazione alle derivate parziali".

Esempi notevoli sono l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = 0 \qquad (1)$$

l'equazione del calore:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

e l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

Lo studio delle equazioni alle derivate parziali esula dai limiti del corso.

## COME RISOLVERE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Nel corso di Analisi II si studiano alcuni metodi risolutivi per particolari tipi di equazioni differenziali.

Fin dalla prima comparsa delle equazioni differenziali, avvenuta nel Seicento, sono stati sviluppati vari metodi risolutivi, miranti a scrivere esplicitamente le soluzioni.

Poi ci si è accorti di non poter sempre riuscire in tale intento, e si è dovuto ripiegare su rappresentazioni delle soluzioni mediante integrali o mediante serie.

Oggi si studiano, in particolare:

1. Metodi per dimostrare che esiste una soluzione, anche se non si riesce a scriverla esplicitamente;

2. Metodi per contare quante soluzioni ci sono, anche senza conoscerle;

3. Metodi per sapere se le soluzioni sono simmetriche, o hanno altre proprietà particolari, senza conoscere l'espressione delle soluzioni stesse.

Gli studenti devono apprendere i metodi trattati nel corso, restando consapevoli che ben altri problemi esulano dai limiti del programma.

## EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Le equazioni che modellizzano molti fenomeni interessanti hanno la particolarità di essere a variabili separabili, o possono essere trasformate in equazioni del genere.

Un'equazione a variabili separabili è un'equazione del primo ordine avente la forma

$$y'(t) = g(t)\, h(y(t)). \tag{2}$$

È importante che al secondo membro ci sia il prodotto di due funzioni, una che dipende solo da $t$ e l'altra che dipende solo da $y$.

Esempi:

A. L'equazione $y' = 0$
è a variabili separabili
$(g(t) \equiv 0;\ h(y) \equiv 0)$;

B. L'equazione $y' = y$
è a variabili separabili
$(g(t) \equiv 1;\ h(y) = y)$

C. L'equazione $y'' + y = 0$
non è del primo ordine, ma lo diventa con l'artificio descritto più avanti (pag. A13).

Notare che, anche se al secondo membro c'è una somma, oppure una frazione, l'equazione può benissimo essere a variabili separabili. Esempi:

D. L'equazione $y' = y + 2$ è a variabili separabili
$(g(t) \equiv 1;\ h(y) = y + 2)$.

E. L'equazione $y' = (1 - y)/t$ è a variabili separabili
$(g(t) \equiv 1/t;\ h(y) = 1 - y)$.

---

## PROCEDIMENTO RISOLUTIVO*

La risoluzione di un'equazione a variabili separabili si può tentare con il seguente procedimento:

0) Se $y_0$ è un numero reale che risolve l'equazione $h(y) = 0$, allora la funzione costante $y(t) \equiv y_0$ è una soluzione della (2).

1) Per trovare le eventuali altre soluzioni, si dividono ambo i membri della (2) per $h(y)$. Si ottiene

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t).$$

2) Si integrano ambo i membri:

$$\int \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, dt = \int g(t)\, dt.$$

3) Si effettua il cambiamento di variabile $y = y(t)$, dove $y(t)$ è la funzione incognita. Si ottiene

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\, dt.$$

Qui $y$ denota la nuova variabile di integrazione, e non la funzione incognita $y(t)$.

* Note:

I. La possibilità di svolgere gli integrali a mano dipende dall'espressione di $g(t)$ e $h(y)$.

II. In pratica, si è soliti scrivere $dy/dt$ anziché $y'$, e portare $dt$ al secondo membro, come se il differenziale fosse una quantità algebrica.

Come semplice applicazione, risolviamo l'equazione $y' = cy$, con la condizione iniziale $y(0) = y_0$. Si intende che $c$ e $y_0$ sono costanti assegnate.

0) Se il dato $y_0$ è uguale a zero, si verifica per sostituzione che la funzione $y(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema considerato.

1) Se, invece, $y_0 \neq 0$, allora ogni eventuale soluzione $y(t)$ (classica, dunque continua) soddisfa la condizione $y(t) \neq 0$ in un intorno di $t = 0$, quindi è legittimo porre l'equazione nella forma

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = c.$$

2) Integriamo ambo i membri sull'intervallo $(0, t)$:

$$\int_0^t \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int_0^t c\, dx.$$

3) Effettuiamo il cambiamento di variabile $y = y(t)$ prima ancora di aver determinato la funzione incognita $y(t)$:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y} = ct.$$

In questo caso, l'integrale al primo membro si svolge facilmente, e si trova

$$\log|y(t)| = \log|y_0| + ct$$

da cui, passando agli esponenziali, si ottiene:

$$|y(t)| = |y_0|\, e^{ct}.$$

Dunque, se $y_0 \neq 0$, $y(t)$ non si annulla per nessun $t$.

Per il teorema degli zeri, $y(t)$ non cambia segno, e quindi mantiene il segno di $y_0$.

Grazie a questa breve discussione, possiamo eliminare il valore assoluto e scrivere

$$y(t) = y_0\, e^{ct}.$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione data si verifica che la funzione ottenuta così, supponendo l'esistenza di una soluzione, risolve veramente il problema considerato.

---

Per concludere verifichiamo che, se $y_0 = 0$, l'unica soluzione è la costante nulla.

Se esistesse una soluzione $z(t)$ non identicamente nulla, allora risulterebbe $z \neq 0$ in qualche punto che indichiamo con $t_0$.

Ma seguendo lo stesso procedimento di prima, con $t_0$ al posto di zero, troviamo $z(t) = z(t_0)\, e^{c(t-t_0)}$, dunque $z(t)$ non si annulla affatto per $t = 0$.

Perciò l'unica soluzione soddisfacente la condizione $y(0) = 0$ è la funzione identicamente nulla, come volevasi dimostrare.

Per completezza, integriamo l'equazione $y'' = -y$, che è del secondo ordine. Usiamo un metodo utile anche in altre situazioni.

Moltiplicando ambo i membri per $y'(t)$, l'equazione diventa

$$y'(t)\, y''(t) = -y(t)\, y'(t). \tag{3}$$

Nel fare questo passaggio, si introducono illegittimamente come soluzioni tutte le funzioni costanti (perché hanno la derivata nulla).

Per sostituzione nell'equazione data si vede però che, tra tutte le costanti, solo la costante nulla è soluzione.

Integrando ambo i membri della (3) si ottiene

$$\int y'(t)\, y''(t)\, dt = -\int y(t)\, y'(t)\, dt.$$

Nel primo integrale facciamo la sostituzione $z = y'(t)$, e nel secondo $y = y(t)$. Otteniamo:

$$\int z\, dz = -\int y\, dy.$$

Dunque

$$\frac{1}{2}\, z^2 = -\frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{2}\, C \tag{4}$$

con $C \geq 0$ perché somma di quadrati. Anzi, poiché al valore $C = 0$ corrisponde la soluzione $y(t) \equiv 0$, da ora in avanti supporremo $C > 0$.

Esplicitando $z$ dalla (4) troviamo $z = \pm\sqrt{C - y^2}$. Ricordando che $z = y'(t)$, otteniamo l'equazione a variabili separabili $y' = \pm\sqrt{C - y^2}$, che si può risolvere come segue.

Risolviamo l'equazione a variabili separabili $y' = \pm\sqrt{C - y^2}$, con $C > 0$.

1) Scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{y'}{\sqrt{C - y^2}} = \pm 1.$$

2) Integrando ambo i membri, troviamo:

$$\int \frac{y'(t)\, dt}{\sqrt{C - y^2(t)}} = \pm \int dt.$$

3) Effettuando la sostituzione $y = y(t)$, possiamo scrivere:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C - y^2}} = \pm \int dt.$$

Per svolgere l'integrale al primo membro, utilizziamo la consueta sostituzione $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen} \alpha$. Troviamo:

$$\int d\alpha = \pm \int dt,$$

dunque $\alpha = \pm(t - t_0)$, dove $-t_0$ denota la costante di integrazione (che ora non può essere indicata con $+C$ perché la lettera $C$ è stata già usata).

Ricordando che $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen} \alpha$, possiamo scrivere $y = \sqrt{C}\, \operatorname{sen}(\pm(t - t_0))$.

Poiché $\operatorname{sen} \alpha$ è una funzione dispari, conviene usare una costante reale $A$ (anche negativa) al posto di $\sqrt{C} > 0$ e sbarazzarsi del segno $\pm$: l'integrale generale di $y'' = -y$ è dunque

$$y(t) = A\, \operatorname{sen}(t - t_0).$$

## EQUAZIONI LINEARI

Le equazioni che modellizzano molti fenomeni interessanti hanno la particolarità di essere lineari, o possono essere trasformate in equazioni del genere.

Si chiama lineare un'equazione differenziale avente la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t).$$

Talvolta si possono approssimare equazioni non lineari con equazioni lineari.

---

## EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE

Un'equazione lineare si dice omogenea se $f(t) \equiv 0$, cioè se ha la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0.$$

---

## EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE, DEL PRIMO ORDINE, E IN FORMA NORMALE

Sono le equazioni aventi la seguente forma:

$$y'(t) = a(t)\, y(t)$$

dunque sono anche equazioni a variabili separabili.

Hanno la soluzione $y(t) \equiv 0$.

Per trovare le altre soluzioni, dividiamo per $y(t)$ e integriamo ambo i membri dell'equazione:

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int a(t)\, dt$$

Con la sostituzione $y = y(t)$, l'integrale al primo membro diventa:

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int \frac{dy}{y}$$

Scriviamo inoltre

$$\int a(t)\, dt = A(t) + C$$

dove $A(t)$ è una qualunque primitiva di $a(t)$.

Ciò è legittimo se $a(t)$ è una funzione continua avente per dominio un intervallo.

L'equazione, pertanto, diventa:

$$\log |y(t)| = A(t) + C$$

da cui si ricava

$$|y(t)| = e^{A(t)+C}$$

dunque l'integrale generale è dato da

$$y(t) = k\, e^{A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

---

## FATTORE INTEGRANTE

Un altro metodo per risolvere l'equazione $y'(t) - a(t)\, y(t) = 0$ è quello di vedere il primo membro come la derivata di un prodotto opportuno.

Cerchiamo una opportuna funzione $\varphi(t) \neq 0$ tale che l'equazione $\varphi(t)\, y'(t) - \varphi(t)\, a(t)\, y(t) = 0$, equivalente a quella data, abbia al primo membro la derivata di un prodotto.

Bisognerà prendere $\varphi(t)$ tale che $\varphi'(t) = -a(t)\, \varphi(t)$.

Ma questa è un'equazione lineare, omogenea, del primo ordine, e in forma normale, la cui incognita è $\varphi(t)$. Dunque possiamo prendere

$$\varphi(t) = e^{-A(t)}.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione $y'(t) - a(t)\,y(t) = 0$ per il fattore $e^{-A(t)}$ (fattore integrante) troviamo l'equazione

$$e^{-A(t)}\,y'(t) - e^{-A(t)}a(t)\,y(t) = 0$$

che è equivalente a quella data (ha le stesse soluzioni).

Senonché questa la possiamo riscrivere come

$$(e^{-A(t)}\,y(t))' = 0.$$

Ma allora

$$e^{-A(t)}\,y(t) = k.$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(t) = k\,e^{A(t)}$$

cosa che già sapevamo, e che, del resto, abbiamo utilizzato per determinare $\varphi(t)$.

L'utilità di questo metodo emerge nella risoluzione delle equazioni non omogenee (vedi a lato).

# Equazioni lineari del primo ordine, in forma normale

Sono le equazioni aventi la seguente forma:

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = f(t)$$

dunque comprendono, in particolare, le equazioni lineari omogenee, del primo ordine e in forma normale: basta porre $f(t) \equiv 0$.

Moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $\varphi(t) = e^{-A(t)}$, che è stato trovato alla pagina precedente, l'equazione diventa

$$(e^{-A(t)}\,y(t))' = e^{-A(t)}\,f(t).$$

Ma allora basta integrare ambo i membri, e si ottiene

$$e^{-A(t)}\,y(t) = \int e^{-A(t)}\,f(t)\,dt.$$

La possibilità di svolgere a mano quest'ultimo integrale dipende, ovviamente, dall'espressione di $A(t)$ e di $f(t)$.

L'integrale generale della equazione data si può scrivere come segue:

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)}\,f(t)\,dt.$$

Si può osservare che, se si sostituisce $f(t) \equiv 0$, l'ultimo integrale rappresenta l'insieme delle costanti $k \in \mathbb{R}$, dunque l'integrale generale si riduce a quello già trovato: $y(t) = k\,e^{A(t)}$.

## EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, OMOGENEE, A COEFFICIENTI COSTANTI

Sono le equazioni della forma $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$, con $a,b,c$ costanti, e $a\neq 0$ (altrimenti non sarebbero del secondo ordine...).

Studiamo tre casi semplici e significativi, ai quali si può ricondurre il caso generale.

Denotiamo con $z(t)$ la funzione incognita, in vista della sostituzione $y(t)=e^{-bt/2}\,z(t)$ da fare più avanti.

1) $z''=0$. Si risolve immediatamente perché equivale a $z'=$ costante, dunque l'integrale generale è $z(t)=mt+q$.

2) $z''=z$. Moltiplicando ambo i membri per $z'$ diventa $z'\,z''=z\,z'$, che, integrata, si trasforma nell'equazione a variabili separabili

$$z'=\pm\sqrt{z^2+c_1}\,.$$

Per svolgere l'integrale in

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+c_1}}=\pm t+c_2$$

si discute il segno di $c_1$: se $c_1=0$ è facile; se $c_1>0$ si pone $z=\sqrt{c_1}\,\operatorname{senh}t$; se, infine, $c_1<0$ si pone $\sqrt{z^2+c_1}=w$ e ci si riconduce al caso $c_1>0$.

Si conclude che l'integrale generale di $z''=z$ è

$$z(t)=k_1\,e^{t}+k_2\,e^{-t},\qquad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

che si può anche scrivere $z(t)=C_1\,\operatorname{senh}t+C_2\,\cosh t,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

3) $z''=-z$. L'integrale generale, già ricavato a pagina A13, è $z(t)=A\,\operatorname{sen}(t-t_0)$, che si può anche scrivere

$$z(t)=C_1\,\operatorname{sen}t+C_2\,\cos t,\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

---

Consideriamo il caso generale $y''+b\,y'+c\,y=0$, al quale ci si può ricondurre, se necessario, dividendo ambo i membri per il coefficiente $a$ di $y''$.

Cerchiamo di esprimere il primo membro come la derivata seconda di un prodotto. Per la regola di Leibniz, si ha:

$$\begin{aligned}(e^{bt/2}\,y(t))'' &= e^{bt/2}\,y''(t)+b\,e^{bt/2}\,y'(t)\\ &+ \tfrac{b^2}{4}\,e^{bt/2}\,y(t),\end{aligned}$$

quindi l'equazione data si può porre nella forma

$$(e^{bt/2}\,y(t))''=\tfrac14\,(b^2-4c)\,e^{bt/2}\,y(t).$$

Da quest'ultima, con la sostituzione $z(t)=e^{bt/2}\,y(t)$ ci si riconduce all'equazione

$$z''=\tfrac14\,(b^2-4c)\,z,$$

che è del tipo 1, 2 o 3 a seconda del segno del discriminante $\Delta=b^2-4c$.

## EQUAZIONE CARATTERISTICA

Si chiama equazione caratteristica associata all'equazione differenziale $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ l'equazione algebrica $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ nell'incognita $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il procedimento delineato alla pagina precedente porta alle seguenti conclusioni.

Se l'equazione caratteristica ha una sola radice reale $\lambda_0 = -b/(2a)$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(t) = m\,t\,e^{\lambda_0\,t} + q\,e^{\lambda_0\,t},\ \ m, q \in \mathbb{R}.$$

Se l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali e distinte $\lambda_1, \lambda_2$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(t) = k_1\,e^{\lambda_1\,t} + k_2\,e^{\lambda_2\,t}$$

Se, infine, l'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale associata è

$$y(t) = A\,e^{\lambda_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \varphi),\ \ A, \varphi \in \mathbb{R}$$

che si può anche scrivere

$$y(t) = e^{\lambda_0\,t}\,(C_1\,\mathrm{sen}(\omega\,t) + C_2\,\cos(\omega\,t)),$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Si tenga presente che $\lambda_0 = -b/(2a)$ e $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{|b^2 - 4ac|}$.

## INDICAZIONI OPERATIVE

Per trovare l'integrale generale di un'equazione della forma $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$, non è necessario svolgere ogni volta gli integrali indicati alla pagina precedente, ma si può procedere direttamente come segue.

1) Scrivere l'equazione caratteristica.

2) A seconda del segno del discriminante, scrivere l'integrale generale in base alla casistica riportata a lato.

3) Aiutare la memoria facendo riferimento ai tre casi semplici esaminati alla pagina precedente, tenendo conto dell'effetto del termine $b\,y'$ (smorzante, se $ab > 0$).

Per risolvere il problema di Cauchy (*initial-value problem*)

$$\begin{cases} y'' + b\,y' + c\,y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

si determina l'integrale generale, e poi si trovano le costanti imponendo le condizioni iniziali.

Analogamente si procede per risolvere il problema al contorno (*boundary-value problem*)

$$\begin{cases} y'' + b\,y' + c\,y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \end{cases}$$

Si badi che esso può non avere soluzioni, avere un'unica soluzione o anche averne infinite.

# EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, OMOGENEE, IN FORMA NORMALE

## STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

La teoria svolta nella lezione precedente mostra che l'integrale generale delle equazioni aventi la forma $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ ha le seguenti proprietà:

1) la costante nulla è una soluzione;

2) l'integrale generale dipende da due costanti;

3) esso è combinazione lineare di due soluzioni particolari.

## NOZIONE DI INDIPENDENZA LINEARE

Osserviamo che le due suddette soluzioni, che indicheremo con $e_1(t)$ ed $e_2(t)$, sono linearmente indipendenti nel senso che il rapporto $e_1(t)/e_2(t)$ varia al variare di $t$.

Viceversa, due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ si dicono linearmente dipendenti se almeno una delle due si può ottenere moltiplicando l'altra per una costante opportuna.

Per ragioni a mio parere estetiche si suole dire, equivalentemente, che $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono linearmente dipendenti se esistono due scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, tali che $\lambda_1\, f_1(t) + \lambda_2\, f_2(t) = 0$ per ogni $t$.

## SPAZI VETTORIALI

Abbiamo già osservato che la costante nulla è una soluzione dell'equazione $y'' + b\,y' + c\,y = 0$. Osserviamo, inoltre, che:

due qualunque soluzioni, sommate fra loro, danno ancora una soluzione;

una qualunque soluzione, moltiplicata per uno scalare qualunque, è ancora soluzione.

La somma di soluzioni, e la moltiplicazione per uno scalare, godono delle stesse proprietà (associativa, commutativa, distributiva) che valgono per i vettori del piano.

Si dice perciò che le soluzioni dell'equazione $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ costituiscono, proprio come i vettori del piano, uno SPAZIO VETTORIALE.

Ciò è vero anche per le equazioni lineari, omogenee, a coefficienti variabili

$$y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = 0. \tag{5}$$

Una coppia $(e_1, e_2)$ di soluzioni particolari della (5), linearmente indipendenti, si chiama BASE dello spazio vettoriale.

La nozione di spazio vettoriale è nata proprio dallo studio delle equazioni differenziali.

# EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE, LINEARI, IN FORMA NORMALE

## STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

Se il secondo membro dell'equazione $y''+b\,y'+c\,y=f(t)$ non è identicamente nullo, l'insieme delle soluzioni non costituisce uno spazio vettoriale.

Ad esempio, l'integrale generale dell'equazione $y''=-g$, con $g$ costante positiva, è

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + y_1\,t + y_0.$$

Si vede che:

1) La costante nulla non è una soluzione;

2) La funzione $y_{00}(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$ è una soluzione, ma $2y_{00}(t)$ non lo è;

3) La funzione $y_{01}(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2+1$ è una soluzione, ma la somma $y_{00}(t)+y_{01}(t)$ non lo è.

Dunque l'integrale generale di $y''=-g$ non è uno spazio vettoriale, tuttavia:

l'integrale generale di $y''=-g$ è dato dalla somma di due termini:

1) la funzione $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$, che è una particolare soluzione dell'equazione $y''=-g$, e

2) l'integrale generale dell'equazione omogenea $y''=0$, che è $y(t)=y_1\,t+y_0$.

La circostanza testé riscontrata, con riferimento ad un'equazione particolare, riveste un carattere del tutto generale:

l'integrale generale dell'equazione $y''+b(t)\,y'+c(t)\,y=f(t)$ è dato dalla somma di due termini:

1) una funzione $z(t)$, che sia una particolare soluzione dell'equazione data, e

2) l'integrale generale dell'equazione omogenea:

$$y''+b(t)\,y'+c(t)\,y=0.$$

---

# INDICAZIONI OPERATIVE

Per trovare l'integrale generale dell'equazione $y''+b\,y'+c\,y=f(t)$, con $f(t)$ non identicamente nulla, si procede come segue:

1) Si cerca, innanzitutto, l'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata, $y''+b\,y'+c\,y=0$.

Si utilizzano, a tal fine, le nozioni illustrate nella lezione precedente.

2) Si cerca una soluzione particolare $z(t)$ dell'equazione data, ad esempio lasciandosi guidare dal tipo di funzione $f(t)$ al secondo membro.

3) L'integrale generale dell'equazione data è la somma della soluzione particolare $z(t)$ e dell'integrale generale dell'equazione omogenea.

# Successioni e serie di funzioni

## MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Fin dall'antichità, il concetto di limite serve per rappresentare le soluzioni di quei problemi che non si lasciano risolvere in modo più semplice.

Da questo punto di vista, i limiti non sono fatti per essere calcolati, ma piuttosto per rappresentare le suddette soluzioni.

Ad esempio, per dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

ha almeno una soluzione, si costruisce un'opportuna successione di funzioni $y_n(x)$, e, sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$, si dimostra che tale successione converge ad una funzione limite $y(x)$, la quale a sua volta risolve il problema dato.

Se, ad esempio, la funzione $f(x, y)$ è di classe $C^1$ in un intorno del punto $(x_0, y_0)$, allora esiste un raggio $\delta \in (0, +\infty)$ tale che il problema (6) ammette una e una sola soluzione $y(x)$ definita per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (teorema di esistenza e unicità in piccolo).

Il metodo accennato sopra non fornisce, in generale, un'espressione semplice della soluzione, ma ne dimostra l'esistenza e l'unicità.

## CONVERGENZA PUNTUALE

Cosa vuol dire, dunque, che una successione di funzioni $y_n(x)$ converge ad una funzione limite $y(x)$?

A differenza di quanto accade per le successioni di numeri reali, per le funzioni vi sono molte diverse definizioni di convergenza, non equivalenti fra loro, la cui opportunità dipende dal contesto.

La più semplice nozione di convergenza è la convergenza puntuale, appresso definita.

Definizione. Data una successione di funzioni $y_n(x)$, aventi per dominio un insieme $X \subset \mathbb{R}^N$, e a valori reali, si dice che convergono puntualmente ad una $y \colon X \to \mathbb{R}$ se per ogni fissato $x \in X$ risulta

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(x) = y(x).$$

Dunque la convergenza puntuale si riconduce alla convergenza dei numeri $y_n(x)$ (avendo fissato $x$) al numero $y(x)$. Tale convergenza deve sussistere per ogni $x$ nel dominio delle funzioni.

Ad esempio, usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si può dimostrare che le funzioni

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

convergono alla funzione $y(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

## IL DIFETTO DELLA CONVERGENZA PUNTUALE

Una successione di funzioni $y_n$ può benissimo convergere puntualmente ad una funzione $y$ senza che per questo gli integrali delle $y_n$ debbano convergere all'integrale di $y$.

Ad esempio, le funzioni $y_n(x) = n\,x^{n-1}$ convergono puntualmente a $y(x) \equiv 0$ sull'intervallo $(0,1)$. Tuttavia

$$\int_0^1 y_n(x)\,dx = 1 \quad \text{per ogni } n > 0,$$

mentre

$$\int_0^1 y(x)\,dx = 0.$$

Un discorso simile vale per le derivate. Ad esempio, le funzioni

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

convergono puntualmente a $y(x) = |x|$ sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Tuttavia $y_n'(0) = 0$ per ogni $n > 0$, mentre $y'(0)$ non esiste.

Questi difetti sono particolarmente sgradevoli perché, in pratica, la convergenza di funzioni serve per applicare il calcolo differenziale e integrale alla funzione limite $y(x)$ senza disporre di una sua semplice espressione, ma per il tramite delle funzioni $y_n$.

## CONVERGENZA UNIFORME

Uno dei principali tipi di convergenza di funzioni, insieme alla convergenza puntuale, è la convergenza uniforme.

Definizione. Si dice che $y_n$ converge uniformemente a $y$ sul dominio $X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_0$ tale che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $x \in X$ si ha $|y_n(x) - y(x)| < \varepsilon$.

In parole povere, la convergenza uniforme risulta dalla convergenza puntuale più l'indipendenza dell'indice $n_0$ dal punto $x$.

La convergenza uniforme, dunque, implica la convergenza puntuale.

Viceversa, se l'insieme $X$ contiene solo un numero finito di punti, la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme.

La convergenza uniforme di $y_n$ ad $y$ si può, equivalentemente, definire tramite la condizione $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, dove

$$s_n = \sup_{x\in X} |y_n(x) - y(x)|.$$

Se il dominio $X$ è un intervallo $(a, b)$ si può anche dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_0$ tale che per ogni $n \geq n_0$ il grafico della funzione $y_n$ sta nella striscia

$$\{\, (x,y) \mid x \in (a,b), \\ y(x) - \varepsilon < y < y(x) + \varepsilon \,\}$$

centrata sul grafico di $y(x)$ e di altezza $2\varepsilon$.

## DUE PROPRIETÀ DELLA CONVERGENZA UNIFORME

La convergenza uniforme si comporta abbastanza bene rispetto alla continuità e all'integrazione.

Inoltre, la convergenza uniforme delle derivate si comporta bene rispetto alla derivazione.

Più esattamente, valgono i seguenti enunciati.

1) Se le $y_n$ sono continue su di un intervallo $[a, b]$ (quindi sono anche integrabili secondo Riemann), e se convergono uniformemente ad una funzione $y$, allora anche $y \in C^0([a, b])$, e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b y_n(x)\, dx = \int_a^b y(x)\, dx.$$

Questa proprietà si usa spesso a rovescio, cioè, constatato che la funzione limite $y$ è discontinua almeno in un punto, si deduce che la convergenza delle $y_n$ non è uniforme.

2) Supponiamo che: le funzioni $y_n$ siano derivabili in un intervallo limitato $(a, b)$; convergano almeno in un punto di tale intervallo, e le loro derivate $y_n'$ convergano uniformemente in tutto $(a, b)$.

Allora si dimostra che: anche le funzioni $y_n$ convergono uniformemente in tutto $(a, b)$; la loro funzione limite, che indicheremo con $y$, è derivabile in $(a, b)$, e la funzione limite delle derivate $y_n'$ è proprio $y'$.

## IL CRITERIO DI CAUCHY

La convergenza di funzioni serve per rappresentare una funzione $y(x)$, utile per risolvere un dato problema, come limite di una successione di funzioni $y_n(x)$.

Ciò costituisce un valido ripiego in quei casi, che sono molti, in cui non si conosce un'espressione più semplice della funzione $y(x)$.

D'altro canto la definizione della convergenza, e, in particolare, quella della convergenza uniforme, fa intervenire la funzione limite $y(x)$, dunque non è applicabile proprio nei casi per i quali tale nozione serve di più.

Pertanto gioca un ruolo essenziale la condizione di Cauchy, che è necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni $y_n(x)$ converga uniformemente in un dato intervallo $[a, b]$.

La condizione di Cauchy non richiede la conoscenza della funzione limite $y(x)$.

Si dice che una successione di funzioni $y_n(x) \in C^0([a, b])$ è "fondamentale" o "di Cauchy" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_0$ tale che per ogni $n, k \geq n_0$ risulta

$$\max_{x\in[a,b]} |y_n(x) - y_k(x)| < \varepsilon.$$

Che tale condizione sia necessaria lo si vede facendo tendere $n$ e $k$ a $+\infty$. Per dimostrare che è anche sufficiente si usa la completezza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

## MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE SERIE DI FUNZIONI

Le motivazioni per l'utilizzo delle serie di funzioni sono analoghe a quelle delle successioni.

Ad esempio, i valori numerici di funzioni importanti come $e^x$, $\log x$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, non si possono calcolare a partire da $x$ mediante le quattro operazioni aritmetiche.

Fanno eccezione pochi valori particolari, come ad esempio $e^0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, eccetera.

Tuttavia, le suddette funzioni si possono esprimere come somme di serie opportune. Si ha, ad esempio:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

## DEFINIZIONE

Consideriamo una funzione $y(x)$ ed una successione di funzioni $y_k(x)$ aventi per dominio lo stesso insieme, e supponiamo, per semplicità, che tale insieme sia un intervallo $(a, b)$. Si scrive

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(x)$$

se la successione di funzioni $S_n(x)$, date da

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k(x)$$

converge a $y(x)$ sull'intervallo $(a, b)$. Anche in questo caso si distingue tra convergenza puntuale e convergenza uniforme.

## SERIE DI POTENZE

Le serie i cui termini $y_k(x)$ hanno la forma $y_k(x) = a_k\, x^k$, cioè sono prodotti di potenze della $x$ con esponenti $k \in \mathbb{N}$ per coefficienti reali $a_k$, si dicono "serie di potenze".

Una serie di potenze ha dunque la forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k.$$

Le serie di potenze sono importanti perché la serie di Maclaurin di una qualunque funzione regolare $f$ è di questo tipo, essendo $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Il carattere di una serie di potenze è molto particolare: esiste infatti un valore $r \geq 0$, che può anche essere $+\infty$, tale che la serie converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-r, r)$, e non converge, nemmeno puntualmente, in nessun punto $x$ tale che $|x| > r$.

Tale quantità $r$ si chiama "raggio di convergenza", ed è data da

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}. \qquad (7)$$

Si intende che $r = 0$ (rispettivamente, $r = +\infty$) quando il limite al secondo membro è $+\infty$ (rispettivamente, zero). Spesso, per praticità, si ricava $r$ dalla formula

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

che è corretta sotto l'ipotesi che il limite al secondo membro esista.

## ULTERIORI PRECISAZIONI

Tutte le serie di potenze convergono banalmente al numero $a_0$ nel punto $x = 0$.

Invece, quando $r \in (0, +\infty)$, l'eventuale convergenza di una serie di potenze nei due punti $x = \pm r$ non rientra nell'enunciato alla pagina precedente, e si deve discutere caso per caso.

Qualora, tuttavia, si riesca a stabilire la convergenza puntuale nel punto $x = r$ (rispettivamente, nel punto $x = -r$), si ha automaticamente la convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[a, r]$ con $a > -r$ (rispettivamente, in ogni intervallo $[-r, b]$ con $b < r$).

ESEMPIO 1. La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

è la serie di Maclaurin della funzione $y(x) = 1/(1-x)$. Il raggio di convergenza è $r = 1$. Per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{8}$$

La serie non converge per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La funzione generatrice, invece, è definita per ogni $x \neq 1$.

## OSSERVAZIONE

L'esempio precedente fa vedere che la serie di Maclaurin di una data funzione non è detto che converga ad essa in tutto il dominio di quest'ultima.

ESEMPIO 2. La serie di Maclaurin della funzione $y(x) = -\log(1-x)$ è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Il raggio di convergenza è $r = 1$: questo di per sé non vuol dire che la serie converga alla funzione generatrice.

Tuttavia, integrando termine a termine l'uguaglianza (8), si verifica che per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x). \tag{9}$$

Per $x = 1$ la serie considerata si riduce alla serie armonica, dunque non converge.

Infine, usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si dimostra che l'uguaglianza (9) sussiste anche per $x = -1$, cioè si trova

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

## INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE PER SERIE

Come già detto a pagina A24, le serie di potenze convergono uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ incluso nell'intervallo aperto $(-r, r)$, dove $r$ denota il raggio di convergenza.

Quindi l'integrale della funzione somma $y(x)$ si può esprimere mediante una serie:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_a^b x^k\,dx.$$

Si verifica, inoltre, che la serie delle derivate

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,a_k\,x^{k-1}, \tag{10}$$

che è anch'essa una serie di potenze, ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

Poiché ogni punto $x \in (-r, r)$ si può includere in un intervallo aperto $(a, b)$ tale che $[a, b] \subset (-r, r)$, si deduce che la somma della serie (10) è proprio la derivata $y'(x)$ della funzione somma $y(x)$.

---

## DAL REALE AL COMPLESSO

Osserviamo che le quattro operazioni aritmetiche si possono fare anche con i numeri complessi, e godono delle consuete proprietà associativa, commutativa e distributiva.

Inoltre la nozione di limite si estende anche alle successioni di numeri complessi, intendendo che $z_n \to z$ se risulta, contemporaneamente, $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

Equivalentemente, si dice che $z_n \to z$ se il modulo $|z_n - z|$, che è un numero reale, tende a zero.

Si intuisce, dunque, che la nozione di somma di una serie si può formulare anche per i numeri complessi, con le stesse modalità che sono valide per i numeri reali.

In particolare, una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,z^k,$$

dove ora i coefficienti $a_k$ sono numeri complessi, ha un raggio di convergenza $r$ dato ancora dalla (7), e converge uniformemente in ogni insieme chiuso $K \subset B_r(0,0) \subset \mathbb{C}$.

Queste proprietà consentono di estendere ai numeri complessi la definizione delle funzioni $e^x$, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e di tante altre importanti funzioni.

L'idea principale è semplicemente quella di prendere la serie di Maclaurin della funzione considerata, e sostituire numeri complessi al posto della variabile $x$.

A titolo di esempio, la funzione esponenziale $e^z$ è definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ come segue:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

## DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Talvolta la funzione $y(x)$ cui si è interessati è espressa mediante un integrale.

Più precisamente, si ha a che fare con espressioni della seguente forma:

$$y(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt. \tag{11}$$

Questo accade, ad esempio, quando la funzione $y(x)$ è la soluzione di un problema associato ad un'equazione differenziale che viene risolto mediante una trasformata integrale, come la trasformata di Fourier o la trasformata di Laplace.

Un'altra fra le tante espressioni del tipo (11) è la rappresentazione del potenziale gravitazionale generato da una densità $\mu$:

$$V(x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

In questa sede, senza entrare nei dettagli, ci limitiamo ad enunciare il seguente teorema:

se la funzione $f(x,t)$ sotto il segno di integrale è di classe $C^1(R)$, dove $R$ è un rettangolo del tipo $R = [a,b] \times [c,d]$, allora la funzione $y(x)$ data dalla (11) è di classe $C^1([a,b])$ e la sua derivata $y'(x)$ si può ottenere come segue:

$$y'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

# Curve in forma parametrica

## MOTIVAZIONI

Alcune curve piane importanti, come ad esempio la circonferenza, non sono il grafico di una funzione (reale, di variabile reale).

D'altro canto, altre curve, necessarie per descrivere la traiettoria di un punto mobile nello spazio, non sono curve piane perché non esiste alcun piano in grado di contenerle.

Le curve che non sono piane si dicono sghembe.

La rappresentazione parametrica di una curva consente di rappresentare curve di diversi tipi: curve sghembe; curve piane che non sono grafici di funzioni, e anche i grafici delle funzioni.

Esempio: la parabola di equazione $y = x^2$ si può rappresentare in forma parametrica come segue:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Questo esempio fa capire che il grafico di una funzione qualunque, avente per dominio un intervallo, si può rappresentare in forma parametrica.

Esempio: la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $R$ si può rappresentare in forma parametrica come segue:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\, t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

L'esempio precedente fa capire che vi sono curve rappresentabili in forma parametrica che non sono il grafico di una funzione.

## ELICA CILINDRICA

Il più tipico esempio di curva sghemba è l'elica cilindrica, le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\, t, \\ z(x) = t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

## DEFINIZIONE DI CURVA

La rappresentazione parametrica di una curva sta alla base della definizione stessa di "curva":

si chiama "arco" (ingl. path) una qualunque funzione continua $\boldsymbol{r}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, e cioè una qualunque terna di funzioni continue $x(t), y(t), z(t)$ aventi per dominio l'intervallo $[0, 1]$.

Con un opportuno cambiamento del parametro, e cioè con la sostituzione $t(s) = \frac{s-a}{b-a}$, si può benissimo usare un qualunque intervallo $[a, b]$ al posto dell'intervallo $[0, 1]$.

Talvolta il dominio della funzione $\boldsymbol{r}(t)$ è un intervallo aperto, o semiaperto, eventualmente illimitato.

Si possono, infine, considerare archi in $\mathbb{R}^N$, con un qualunque $N \geq 2$.

Con la suddetta definizione, il concetto di curva cessa di essere un concetto primitivo, e viene ad avere una definizione che soddisfa i canoni moderni del rigore.

## CURVA E SOSTEGNO

Una figura $\gamma$ comunemente chiamata "curva" si chiama invece, tecnicamente, SOSTEGNO (in inglese: trace) della curva, mentre la funzione $\boldsymbol{r}(t)$ che la rappresenta, o meglio la coppia $(\boldsymbol{r}, \gamma)$, o addirittura l'insieme di tutte le parametrizzazioni di $\gamma$, sono quello che tecnicamente si dice "curva".

## CURVE CHIUSE

Un arco $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ si dice "curva chiusa" se gli estremi coincidono, cioè se $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

## CURVE SEMPLICI

Un arco $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ si dice "curva semplice" se non ha autointersezioni, e quindi, in particolare, se non ha la forma di un 8.

Deve dunque aversi $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$ comunque si prendano $t_1$ e $t_2$ nell'intervallo $(a,b)$ purché ovviamente risulti $t_1 \neq t_2$, e deve aversi altresì $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{r}(b)$ per ogni $t \in (a,b)$. È consentito, invece, che una curva semplice sia chiusa.

## CURVE PATOLOGICHE

La nozione di arco, testé introdotta, si discosta dall'intuizione perché, ad esempio, esistono archi (con autointersezioni) che hanno la forma di un quadrato (pieno), come la cosiddetta "curva di Peano".

Una curva patologica più a portata di mano è il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

## CURVE REGOLARI

Per evitare archi patologici come la curva di Peano, si considerano le curve "regolari", cioè funzioni $\boldsymbol{r}(t)$ di classe $C^1$ e tali che $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ per ogni $t$.

Per una curva semplice, l'esistenza della derivata $\boldsymbol{r}'(t_0)$ (definita alla pagina seguente) e la condizione $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$ garantiscono che, vicino al punto $\boldsymbol{r}(t_0)$, il sostegno della curva sia approssimabile con un segmento opportuno.

In tal caso, la retta tangente alla curva $\gamma$ nel punto $\boldsymbol{r}(t_0)$ ha equazione parametrica

$$(x_1, \ldots, x_N) = \boldsymbol{r}(t_0) + t\,\boldsymbol{r}'(t_0).$$

## CURVE REGOLARI A TRATTI

La nozione di curva regolare è troppo restrittiva: infatti esclude, ad esempio, il (contorno del) quadrato e tutte le spezzate.

Si dice "regolare a tratti" (ingl. piecewise regular) una curva costituita da un numero finito di archi regolari.

Le spezzate sono curve regolari a tratti.

## VELOCITÀ DI UNA CURVA

Il vettore $\boldsymbol{r}'(t)$ si chiama "velocità" della curva $\boldsymbol{r}(t)$. La terminologia si ispira al caso in cui $\boldsymbol{r}(t)$ rappresenta la legge oraria del moto di un punto materiale.

## DERIVATA DI UN VETTORE

Consideriamo una funzione $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ per $t \in (a,b)$, ed un istante $t_0 \in (a,b)$.

La derivata della funzione $\boldsymbol{r}(t)$ nell'istante $t = t_0$ si può definire, equivalentemente, nei due modi appresso riportati.

## DEFINIZIONE 1

Si dice che $\boldsymbol{r}(t)$ è derivabile per $t = t_0$ se lo sono tutte e tre le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

In tal caso, il vettore $\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0),\, y'(t_0),\, z'(t_0))$ si dice DERIVATA o VELOCITÀ di $\boldsymbol{r}$ in $t_0$.

## DEFINIZIONE 2

Si dice che $\boldsymbol{r}(t)$ è derivabile per $t = t_0$ se esiste il limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

In tal caso, il vettore limite si dice DERIVATA o VELOCITÀ di $\boldsymbol{r}$ in $t_0$, e si denota con $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

## LIMITE DI UN VETTORE

La definizione precedente presuppone la nozione di LIMITE per una funzione a valori in $\mathbb{R}^3$.

Vediamo due definizioni equivalenti tra loro. Entrambe si riconducono a limiti di funzioni scalari.

## DEFINIZIONE 1. Si scrive

$$\lim_{t \to t_0} (x(t), y(t), z(t)) = (a, b, c)$$

se risulta: $\lim_{t \to t_0} x(t) = a$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = b$, e $\lim_{t \to t_0} z(t) = c$.

## DEFINIZIONE 2. Si scrive

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0$$

se la funzione scalare $\|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0\|$ tende a zero per $t \to t_0$.

## PASSAGGIO DA $\mathbb{R}^3$ A $\mathbb{R}^N$

Le definizioni riportate in questa pagina si estendono facilmente a vettori in $\mathbb{R}^N$, qualunque sia $N$.

## Le funzioni iperboliche

Per svolgere elegantemente talune integrazioni conviene utilizzare le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} t$ e $\cosh t$, che si possono definire come segue:

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^t}{2},$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^t}{2}.$$

Elevando ambo i membri al quadrato, e sottraendo la prima relazione dalla seconda, si trova

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1. \tag{12}$$

Di conseguenza, la curva le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \operatorname{senh} t \end{cases}$$

è il ramo dell'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ giacente nel semipiano $x > 0$. Si constata, inoltre, che

$$\frac{d}{dt} \operatorname{senh} t = \cosh t,$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \operatorname{senh} t.$$

Si può verificare che, per ogni $t > 0$, l'area della figura delimitata dalla suddetta iperbole, dall'asse $x$ e dalla retta passante per l'origine e per il punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ vale $t/2$, in analogia con quanto avviene con le funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

## CENNI ALLE FUNZIONI IPERBOLICHE INVERSE

Particolarmente utili per l'integrazione sono le funzioni iperboliche inverse.

La funzione $y(t) = \operatorname{senh} t$ è iniettiva, e la sua inversa si denota con $t(y) = \operatorname{sett\,senh} y$, $x \in \mathbb{R}$. Si trova che

$$\operatorname{sett\,senh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}\,). \qquad (13)$$

La funzione $x(t) = \cosh t$, ristretta al semiasse $t \geq 0$, è iniettiva e la sua inversa si denota con $t(x) = \operatorname{sett\,cosh} x$, $x \geq 1$. Si trova che

$$\operatorname{sett\,cosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}\,). \qquad (14)$$

Dal teorema di derivazione della funzione inversa discende che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\operatorname{sett\,senh} y &= \frac{1}{\frac{d}{dt}\operatorname{senh} t}\\ &= \frac{1}{\cosh t},\end{aligned}$$

da cui, usando la (12), si ricava

$$\frac{d}{dy}\operatorname{sett\,senh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Procedendo in modo analogo si ricava anche

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sett\,cosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

e di conseguenza

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \operatorname{sett\,senh} y + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(x)\ \operatorname{sett\,cosh}|x| + C.$$

Notare l'analogia con

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen} y + C.$$

Per ricavare la (13) si parte dall'uguaglianza

$$y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

e si moltiplicano ambo i membri per $2\,e^t$. Si ottiene

$$(e^t)^2 - 2y\,e^t - 1 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $e^t > 0$, dunque la soluzione è

$$e^t = y + \sqrt{y^2+1}\,,$$

da cui discende la (13). A questo proposito si noti che $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} \geq y$, e perciò la soluzione $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ è da scartare.

La (14) si ricava in modo analogo: partendo da

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

si ottiene un'equazione nell'incognita $e^t \geq 1$ le cui due soluzioni reali sono

$$x \pm \sqrt{x^2-1}\,.$$

Si noti che per ogni $x \geq 1$ risulta $1 - x \leq 0 \leq \sqrt{x^2-1}$, dunque

$$x + \sqrt{x^2-1} \geq 1.$$

Invece, moltiplicando ambo i membri per $x - \sqrt{x^2-1}$, si trova

$$x - \sqrt{x^2-1} \leq 1.$$

Deve perciò aversi

$$e^t = x + \sqrt{x^2-1}$$

da cui segue la (14).

## AREA DEL SETTORE IPERBOLICO

Fissiamo un punto $P = (x, y)$, con $x, y > 0$, sull'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{15}$$

e poniamo $Q = (x, -y)$. Consideriamo la figura piana delimitata dai segmenti $OP$ ed $OQ$ e dall'arco $PQ$ della suddetta iperbole: tale figura è un "settore iperbolico", e la sua area $A$ è data da

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{sett}\cosh x & (16)\\ &= \operatorname{sett}\operatorname{senh} y. & (17)\end{aligned}$$

Infatti l'area $A$ si può ricavare dall'area $xy$ del triangolo isoscele di vertici $OPQ$: per il significato geometrico dell'integrale si ha

$$A = xy - 2\int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi. \tag{18}$$

L'integrale si può svolgere per parti:

$$\begin{aligned}\int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi &= \xi\sqrt{\xi^2 - 1}\Big]_1^x \\ &\quad - \int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi \\ &= xy - \int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi.\end{aligned}$$

Aggiungendo $-1+1$ al numeratore della frazione, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi &= \int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi \\ &\quad + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi\end{aligned}$$

e perciò

$$2\int_1^x \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = xy - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi.$$

Sostituendo nella (18) si ottiene

$$A = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi.$$

Ma poiché la funzione integranda è la derivata di $\operatorname{sett}\cosh \xi$, si giunge alla (16).

A sua volta la (16) implica che $\cosh A = x$, e da questa, usando la (12) e la (15), si ricava $\operatorname{senh} A = y$. Dunque vale la (17).

# Semplici funzioni di due variabili

## MOTIVAZIONI

Per esprimere i legami che intercorrono fra più variabili, si usano, fra le altre, funzioni a valori reali il cui argomento è una coppia, o una terna, o, più in generale, una ennupla di variabili reali.

Ci concentriamo, per semplicità, sulle funzioni $f(x, y)$ di due sole variabili.

Un esempio semplicissimo è l'area $A$ di un rettangolo di base $b$ e altezza $a$, che è data dalla funzione $A(a, b) = ab$ delle due variabili $a$ e $b$.

Oltre alla moltiplicazione (vedi sopra), sono funzioni di due variabili:

| | |
|---|---|
| l'addizione | $f(x, y) = x + y$ |
| la sottrazione | $f(x, y) = x - y$ |
| la divisione | $f(x, y) = \frac{x}{y}$ |
| l'elevam. a potenza | $f(x, y) = x^y$ |

---

## DISTANZA FRA DUE PUNTI

Per studiare i grafici nello spazio occorre innanzitutto saper esprimere la distanza tra due punti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, a partire dalle loro coordinate.

A tal fine basta pensare i due punti $P_1, P_2$ come vertici opposti di un opportuno parallelepipedo avente le facce parallele ai piani coordinati.

Per il teorema di Pitagora, la diagonale $d_b$ della base del parallelepipedo è data da

$$d_b = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Applicando nuovamente il teorema di Pitagora, si trova che la distanza tra $P_1$ e $P_2$ è $\sqrt{d_b^2 + (z_1 - z_2)^2}$, dunque $\overline{P_1P_2} =$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

---

## IL PIANO

Dal punto di vista sia algebrico che geometrico, la superficie più semplice è il piano.

I piani non paralleli all'asse $z$, cioè non verticali, sono i grafici dei polinomi di primo grado in due variabili, la cui espressione generale è

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

Per vederlo, basta fissare un qualunque punto $P_0$ dello spazio le cui coordinate $(x_0, y_0, z_0)$ soddisfino l'equazione

$$z = ax + by + c.$$

Un qualunque altro punto $P = (x, y, z)$ soddisfa la stessa equazione se e solo se

$$\boldsymbol{v} \cdot (P - P_0) = 0, \qquad (19)$$

dove $\boldsymbol{v} = (a, b, -1)$. Lo si constata sostituendo nella (19) le componenti di $\boldsymbol{v}$ e le coordinate di $P$ e di $P_0$.

Se ne deduce, in particolare, che il vettore $\boldsymbol{v} = (a, b, -1)$ è perpendicolare al piano considerato.

## RICHIAMI SULLE QUADRICHE

La funzione $A(a,b) = ab$ considerata alla pagina precedente è un particolare polinomio di secondo grado in due variabili. L'espressione generale di un tale polinomio è

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}\,x_2^2 \\ &+ 2\,a_{13}\,x_1 + 2\,a_{23}\,x_2 + a_{33}. \end{aligned}$$

I coefficienti "2" compaiono per praticità: infatti, con la notazione matriciale, si può scrivere

$$f(x_1,x_2) = \boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{x}^T$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 1)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ è una matrice simmetrica, e $\boldsymbol{x}^T$ è il vettore trasposto di $\boldsymbol{x}$.

I polinomi di secondo grado in due variabili hanno per grafico superfici notevoli, studiate fin dall'antichità e dette QUADRICHE.

Per la verità, la quadrica più generale non è necessariamente esprimibile come grafico di un polinomio, ma è piuttosto il luogo degli zeri di un polinomio di secondo grado IN TRE VARIABILI.

Si pensi, ad esempio, alla quadrica più importante, che è la sfera, la cui equazione, se il centro si trova nell'origine, è $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

La suddetta equazione esprime la condizione che la distanza del punto $P = (x,y,z)$ dall'origine sia $R$.

Tale notevole superficie non è il grafico di alcuna funzione $z = f(x,y)$.

Lo studio sistematico delle quadriche esula dai limiti di questo corso.

Ci limitiamo ad esaminarne alcune fra le più notevoli, poste in posizioni particolarmente comode da rappresentare.

Quadrica n. 1: il grafico di $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ è la semisfera superiore di raggio $R$ centrata nell'origine.

Quadrica n. 2: il grafico di $f(x,y) = x^2 + y^2$ è un paraboloide di rotazione con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto.

Quadrica n. 3: il grafico di $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è un cono di rotazione con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto.

Quadrica n. 4: il grafico di $f(x,y) = xy$ si dice "paraboloide iperbolico". È il grafico della funzione $A(a,b)$ richiamata all'inizio.

Quadrica n. 4-bis: il grafico di $f(x,y) = x^2 - y^2$ è anch'esso un paraboloide iperbolico. Lo si vede ruotando di $45°$ il riferimento $xOy$.

Quadrica n. 4-ter: il grafico di $f(x,y) = y^2 - x^2$ è ancora un paraboloide iperbolico. Lo si vede scambiando tra loro gli assi $x$ e $y$.

## COME DISEGNARE I PIANI

Il metodo più adatto dipende dalla posizione del piano stesso, da determinarsi di volta in volta.

Può essere utile trovare, se esistono, i tre punti di intersezione del piano dato con i tre assi coordinati. Questo metodo è utile, ad esempio, con il piano

$$z = 1 - x - y.$$

Può anche essere utile trovare le tre rette, se esistono, di intersezione con i tre piani coordinati. Questo metodo è utile, ad esempio, per il piano precedente e per il piano $z = 1$.

Può, infine, essere utile limitarsi a rappresentare un punto del piano dato, ed un vettore normale (perpendicolare) ad esso. Questo metodo è utile per il piano $z = -x - y$, che passa per l'origine ed è perpendicolare a $(1, 1, 1)$.

---

## FUNZIONI RADIALI E SUPERFICI DI ROTAZIONE

Una funzione $f(x, y)$ tale che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ogniqualvolta $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ si dice RADIALE, e può essere scritta come $f(x, y) = \varphi(r)$, essendo $\varphi$ una funzione opportuna della variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Il grafico di una funzione radiale è una superficie di rotazione intorno all'asse $z$.

Per rappresentarlo nello spazio, conviene trovarne la linea di intersezione con il piano $y = 0$, oppure con il piano $x = 0$, e poi fare ruotare tale linea intorno all'asse $z$.

Questo metodo funziona, ad esempio, con il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e con il cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

---

## LINEE DI LIVELLO

Le linee di equazione

$$f(x, y) = \text{cost.} \tag{20}$$

si dicono LINEE DI LIVELLO della funzione $f$. Si disegnano sul piano $xy$. Aiutano ad immaginarsi il grafico di $f$.

Spesso si scelgono le costanti al secondo membro della (20) in modo tale che esse formino una progressione aritmetica (la differenza fra due costanti consecutive rimane la stessa).

Lo studio delle linee di livello è utile, ad esempio, per capire il grafico dei paraboloidi iperbolici $z = xy$, $z = x^2 + y^2$, e $z = y^2 - x^2$.

Ulteriori informazioni sulla tecnica delle linee di livello si possono trovare sul libro di testo.

---

## LINEE DI MASSIMA PENDENZA

Sono le linee integrali del gradiente di $f$, e sono perpendicolari alle linee di livello. Ne riparleremo in una prossima lezione (pag. A75).

# Topologia, limiti e continuità

## MOTIVAZIONI

Le nozioni di LIMITE e di CONTINUITÀ per funzioni $f(x, y)$ di due variabili reali sono importanti perché servono per esprimere la seguente, comune aspettativa:

"se i parametri che descrivono un fenomeno subiscono leggere variazioni, l'andamento del fenomeno stesso varierà sì, ma di poco".

Oppure, da un altro punto di vista:

"è vero sì che le misurazioni effettuate sono affette da piccoli errori: ciò non ostante, le conclusioni da noi tratte sono affette sì da errori, ma piccoli anch'essi".

Viceversa, anche la discontinuità è importante: ad esempio, essa è la proprietà che ci fa vedere i contorni delle cose.

Particolarizzeremo la discussione facendo riferimento al seguente, classico problema: calcolare $0^0$.

Ovvero: perché $0^0$ è una forma indeterminata.

## PERCHÉ $0^0$ È UNA FORMA INDETERMINATA

Riconosciamo, innanzitutto, che grazie alla convenzione secondo la quale $0^0 = 1$, è possibile scrivere:

I. Un qualunque polinomio $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, come $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$;

II. Il polinomio di Taylor associato ad una funzione $f(x)$, come $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\,(x - x_0)^k/k!$;

III. La formula di Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$.

Ora ci poniamo la seguente DOMANDA: se la base $x$ e l'esponente $y$ sono diversi da zero ma piccoli in valore assoluto, con $x > 0$, la potenza $x^y$ sarà vicina a $1$?

Un semplice esperimento sembra avvalorare questa ipotesi: se prendiamo $x_n = y_n = 1/n$, con $n$ grande, la potenza $x_n^{y_n} = 1/\sqrt[n]{n}$ si avvicina proprio a 1.

Tuttavia, la risposta alla domanda precedente è negativa: infatti, prendendo $x_n = 2^{-n}$, e $y_n = 1/n$, la potenza $x_n^{y_n} = (2^{-n})^{1/n} = 1/2$ tende banalmente ad $1/2$ benché $x_n$ e $y_n$ tendano a zero.

Si dice che la funzione $f(x, y) = x^y$, avente per dominio il semipiano $x > 0$, non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

## Punti di accumulazione

Per poter definire, in generale, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

di una funzione di due variabili $f(x,y)$ occorre innanzitutto che il punto $(x,y)$, variabile nel dominio della funzione $f$, si possa avvicinare bene quanto si vuole al punto $(x_0,y_0)$, restando distinto da esso.

Si utilizza, a tal fine, la nozione di PUNTO DI ACCUMULAZIONE, sviluppata per studiare le serie di Fourier: un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ è un punto di accumulazione per un dato insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ se esistono punti di $S$ DISTINTI DA $(x_0,y_0)$ e vicini ad esso tanto quanto si vuole.

In altri termini, per ogni $\delta > 0$ deve esistere almeno un punto $(x,y) \in S$ distinto da $(x_0,y_0)$ tale che

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta.$$

Si può esprimere questo concetto utilizzando la nozione di INTORNO SFERICO $B_\delta\,(x_0,\,y_0)$ di raggio $\delta$ del punto $(x_0,y_0)$:

$$B_\delta(x_0,y_0) =$$
$$= \{\,(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\,\}$$

Si DEFINISCE, dunque, "punto di accumulazione" di un insieme $S$ un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ in ogni intorno sferico del quale vi sia almeno un punto di $S$ DISTINTO dal punto $(x_0,y_0)$.

La DEFINIZIONE DI LIMITE è la seguente: dato un insieme $S \subset \mathbb{R}^N$, una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$, ed un punto $(x_0,y_0)$ di accumulazione per $S$, si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell\,(\in \mathbb{R})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $(x,y)$, distinto da $(x_0,y_0)$ e appartenente all'intersezione $S \cap B_\delta(x_0,y_0)$, risulta $|f(x,y)-\ell\,| < \varepsilon$.

CONTINUITÀ: se la funzione $f$ è definita anche in $(x_0,y_0)$, e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

la funzione $f$ si dice continua nel punto $(x_0,y_0)$.

Si scrive, invece,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $(x,y)$, distinto da $(x_0,y_0)$ e appartenente sia al dominio di $f$ che all'intorno sferico $B_\delta(x_0,y_0)$, risulta $f(x,y) > M$. Si scrive, infine,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$$

se $-f(x,y) \to +\infty$.

---

Le definizioni di intorno sferico, punto di accumulazione, limite, e continuità, SI ESTENDONO FACILMENTE a $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$.

## INDICAZIONI PRATICHE

Per accertarsi della continuità di una funzione si usano le seguenti proprietà:

- le proiezioni canoniche $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$ sono continue;

- la somma, la differenza, e il prodotto di due funzioni continue sono ancora funzioni continue, e così pure il rapporto, se il denominatore è diverso da zero;

- la funzione composta $g(f(x,y))$ di una funzione continua $f(x,y)$ e di una $g(t)$ continua in $t$ è anch'essa continua.

Viceversa, confutare la continuità di una funzione può richiedere un'analisi più fine, e l'ideazione di un opportuno controesempio.

---

Esempio 1. La funzione $f(x,y)$, così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y, & x \in (0,+\infty),\ y \in \mathbb{R}; \\ 1, & x = y = 0, \end{cases}$$

è CONTINUA in ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$. Infatti possiamo scrivere $x^y = e^{y \log x}$, quindi $x^y$ è composta delle proiezioni canoniche, della funzione logaritmica e della funzione esponenziale.

La medesima funzione NON È CONTINUA nel punto $(0,0)$ perché sussiste il controesempio costruito a pagina A40 con $x_n = 2^{-n}$ e $y_n = 1/n$.

Esempio 2. La funzione $g(x,y)$, così definita:

$$g(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

È CONTINUA in ogni punto del suo dominio. Infatti $g(x,y)$ si ottiene dalle proiezioni canoniche mediante operazioni aritmetiche, e il denominatore è diverso da zero.

La medesima funzione $g(x,y)$ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$, e perciò NON È PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ nell'origine.

Infatti, passando alle coordinate polari $(r,\vartheta)$, tramite le sostituzioni

$$\begin{cases} x(r,\vartheta) = r\,\cos\vartheta, \\ y(r,\vartheta) = r\,\operatorname{sen}\vartheta, \end{cases}$$

si ottiene

$$g(x(r,\vartheta),\, y(r,\vartheta)) = \operatorname{sen} 2\vartheta.$$

Dunque quando $r \to 0$ con $\vartheta = \text{cost.}$ il limite dipende dal particolare valore di $\vartheta$.

Ad esempio, prendendo $x_n = 1/n$, con $n$ grande, e $y_n \equiv 0$ (dunque, prendendo $\vartheta = 0$), si ha $g(x_n,y_n) \equiv 0$ e quindi il limite è $0$; prendendo invece $x_n = y_n = 1/n$ (cioè $\vartheta = \pi/4$) si ha $g(x_n,y_n) \equiv 1$ e quindi il limite è $1$.

Si può, comunque, affermare che $g(x,y)$ È LIMITATA perché $\operatorname{sen} 2\vartheta$ lo è.

---

La funzione dell'esempio 2 venne utilizzata da H. A. Schwartz nel 1872 in un articolo sull'equazione di Laplace.

# ELEMENTI DI TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$, E IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

La topologia è una branca della matematica i cui concetti più elementari sono quelli di

- punto interno ad un insieme;
- punto esterno ad un insieme;
- frontiera di un insieme;
- insieme aperto;
- insieme chiuso;
- punto di accumulazione;
- limite;
- funzione continua.

Concetti di fondamentale importanza per le applicazioni sono quelli di "insieme connesso" e, soprattutto, di "insieme compatto".

La compattezza serve per dimostrare l'esistenza delle soluzioni di problemi matematici (di massimo e minimo, equazioni differenziali, ecc.) anche quando non la si riesce a scrivere esplicitamente.

La trattazione dettagliata della topologia, i cui assiomi furono concepiti da Felix Hausdorff (1868-1942), esula dai limiti del corso.

Ci limitiamo ad esaminare brevemente il significato dei concetti citati, con riferimento alle figure piane, cioè i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. L'estensione a $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$ è semplice.

La base della topologia di $\mathbb{R}^2$ è costituita dagli intorni sferici $B_\delta(x, y)$, $\delta \in (0, +\infty)$.

## PUNTI INTERNI

Un punto $(x, y)$ si dice interno ad un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ se esiste almeno un intorno sferico $B_\delta(x, y)$ centrato in $(x, y)$ e incluso in $S$.

La semplice appartenenza del punto $(x, y)$ all'insieme $S$ non basta, in generale, per poterlo chiamare "punto interno".

## PUNTI ESTERNI

Un punto $(x, y)$ si dice esterno ad un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ se esiste almeno un intorno sferico $B_\delta(x, y)$ centrato in $(x, y)$ e disgiunto da $S$.

Il semplice fatto che il punto $(x, y)$ non appartenga all'insieme $S$ non basta, in generale, per poter dire che è "esterno".

## FRONTIERA

La frontiera, o bordo, di un insieme $S$ si indica con $\partial S$ ed è costituita da quegli eventuali punti che non sono né interni, né esterni ad esso.

Ad esempio, la frontiera di un disco $B_\delta(x, y)$ è la circonferenza $\partial B_\delta(x, y)$.

## INSIEMI APERTI

Si dice aperto un insieme i cui punti sono tutti interni, come ad esempio avviene per il disco aperto $B_\delta(x, y)$.

Appartenere ad un insieme aperto, dunque, è la stessa cosa che essere interno ad esso.

## INSIEMI CHIUSI

Si dice chiuso un insieme il cui complementare è aperto.

I chiusi sono quegli insiemi che contengono la loro frontiera.

I chiusi si possono anche vedere come quegli insiemi che contengono i loro punti di accumulazione.

La proprietà di essere chiuso serve, in generale, a garantire che facendo il limite di oggetti che stanno in un chiuso (ad esempio, funzioni di un certo tipo), l'oggetto limite (la funzione limite) è dello stesso tipo.

Ciò è fondamentale perché, fin dall'epoca di Archimede, quando non si riesce a risolvere un problema con un numero finito di passi, si tenta con un limite.

## INSIEMI CHIUSIAPERTI

Talvolta si dicono "chiusiaperti" gli insiemi che sono sia chiusi che aperti, come ad esempio l'insieme vuoto $\emptyset$ ed il piano $\mathbb{R}^2$.

Si noti che il piano $\mathbb{R}^2$ è chiusaperto nella topologia di $\mathbb{R}^2$, cioè se si considerano solo figure piane. Invece, nella topologia dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, ciascun piano è chiuso e non è aperto.

---

Punto di accumulazione, limite di una funzione, e funzione continua sono concetti trattati nelle pagine precedenti.

## CHIUSURA DI UN INSIEME

Si dice chiusura, o aderenza di un insieme $S$ l'unione $S \cup \partial S$ di $S$ con la sua frontiera $\partial S$, ovvero l'unione $S \cup DS$ di $S$ con il suo derivato $DS$ (il derivato è l'insieme dei punti di accumulazione di $S$).

La chiusura di un insieme $S$ si denota con $\overline{S}$ ed è un insieme chiuso, qualunque sia $S$.

## LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI PUNTI

Si dice che una successione $\{\,(x_k, y_k)\,\}$ converge ad un punto $(x_0, y_0)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $(x_k, y_k) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ definitivamente.

Qui "definitivamente" significa che esiste un indice opportuno $k_0$ tale che $(x_k, y_k) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ per ogni $k \geq k_0$.

## SOTTOSUCCESSIONI

A partire da una successione data $\{\,(x_k, y_k)\,\}$, dove l'indice $k$ varia nell'insieme $\mathbb{N}$, si ottiene una sottosuccessione selezionando infiniti valori $k_0, k_1, k_2, \ldots$ dell'indice $k$, e quindi i corrispondenti punti $\{\,(x_{k_i}, y_{k_i})\,\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Una sottosuccessione può avere limite anche se la successione data non converge.

Si intende che gli indici $k_0, k_1, k_2, \ldots$ devono essere presi in ordine strettamente crescente, cioè $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$; non è ammesso né tornare indietro, né ripetere due volte uno stesso valore di $k$.

## INSIEMI CONNESSI

Si dice "connesso per archi" un insieme $S \in \mathbb{R}^2$ tale che ogni suo punto $(x_1, y_1)$ si può collegare ad un qualunque altro suo punto $(x_2, y_2) \in S$ mediante un arco continuo incluso in $S$.

Il concetto di "connesso per archi" vuole tradurre l'idea intuitiva di "fatto di un solo pezzo".

## INSIEMI COMPATTI

Si dice "compatto per successioni" un insieme $K \subset \mathbb{R}^2$ tale che qualunque successione di suoi punti ha almeno una sottosuccessione convergente, il cui limite è ancora un punto di $K$.

Ciò è fondamentale nella matematica moderna, che affronta elettivamente problemi di cui non solo non si riesce ad ottenere la soluzione in un numero finito di passi, dunque si è condotti a costruire una successione, ma, come se ciò non bastasse, non si riesce nemmeno a determinarne esplicitamente il limite, dunque serve sapere almeno se esso esiste.

## TEOREMA DI HEINE-BOREL

I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^2$ sono quelli chiusi e limitati.

"Limitato" è un insieme contenuto un un disco $B_R(0,0)$ di raggio $R$ sufficientemente grande.

La suddetta, semplice caratterizzazione dei compatti (teorema di Heine-Borel) vale anche in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ma non negli spazi di dimensione infinita come sono, ad esempio, gli spazi funzionali. Per essi si sfruttano condizioni più sofisticate, il cui studio esula dai limiti del corso.

## TEOREMA DI WEIERSTRASS

Karl Weierstrass (1815-1897) ebbe un ruolo nel sottolineare che l'esistenza del minimo di talune importanti funzioni (per la precisione, funzionali integrali del calcolo delle variazioni) andava dimostrata e non poteva essere data per scontata.

Il fondamentale teorema di Weierstrass sull'esistenza dei massimi e dei minimi asserisce che

"qualunque funzione continua $f : K \to \mathbb{R}$, avente per dominio un insieme compatto $K$ (si intende, non vuoto), ha almeno un punto di massimo ed almeno un punto di minimo (eventualmente coincidenti, se $f$ è costante)."

Ulteriori dettagli sui massimi e sui minimi si possono trovare a pag. A54.

# Calcolo differenziale

## DERIVATE PARZIALI

Sia $(x_0, y_0)$ un punto interno al dominio di una funzione $f(x, y)$. Le derivate parziali di $f$ in tale punto si possono definire nei seguenti due modi equivalenti.

## DEFINIZIONE 1

Se esiste finito il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

si dice che $f$ è derivabile parzialmente rispetto alla $x$ nel punto $(x_0, y_0)$.

In tal caso il valore del limite si chiama derivata parziale di $f$ rispetto alla $x$ in $(x_0, y_0)$ e si indica con le notazioni

$$f_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{21}$$

## DEFINIZIONE 2

Consideriamo la restrizione della funzione $f(x, y)$ alla retta $y = y_0$, e cioè la funzione $f(x, y_0)$, della sola variabile $x$.

Se $f(x, y_0)$ è derivabile per $x = x_0$, si dice che la funzione di due variabili $f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla $x$ nel punto $(x_0, y_0)$.

La derivata di $f(x, y_0)$ per $x = x_0$ si dice derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto alla $x$ in $(x_0, y_0)$ e si indica con le notazioni (21).

---

La derivata parziale $f_y = \partial f / \partial y$ si definisce in modo analogo.

## LA CLASSE $C^1$

Se la funzione $f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla $x$ ed alla $y$ in tutti i punti di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

sono, ovviamente, funzioni di $x$ e di $y$. SE SONO CONTINUE in ogni punto di $\Omega$ si dice che $f$ è di classe $C^1$ in $\Omega$, e si scrive $f \in C^1(\Omega)$.

## LA DERIVABILITÀ PARZIALE NON IMPLICA LA CONTINUITÀ

La derivabilità di una funzione di una sola variabile implica la sua continuità. Invece, se una funzione $f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla $x$ e alla $y$ in un punto $(x_0, y_0)$, non è detto che sia continua in tale punto.

Ciò è dovuto al fatto che le derivate parziali tengono conto soltanto dei valori di $f$ lungo le due rette passanti per $(x_0, y_0)$ e parallele agli assi coordinati, e non dei valori di $f$ nei punti vicini a $(x_0, y_0)$ ma al di fuori di queste rette.

Per avere un esempio si può considerare la seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0 \\ 1, & \text{se } xy \neq 0. \end{cases} \tag{22}$$

Nel punto $(0, 0)$ esistono entrambe le derivate parziali, e sono nulle. Tuttavia tale funzione è discontinua nell'origine.

## MOTIVAZIONI

La differenziabilità serve a:

- esprimere il concetto intuitivo di tangenza;
- approssimare una funzione non lineare con una lineare.

## ALLA RICERCA DEL PIANO TANGENTE

Supponiamo che una funzione $f(x, y)$ sia derivabile parzialmente rispetto alla $x$ e alla $y$ in un punto $(x_0, y_0)$. Ciò significa che le funzioni (di una sola variabile) $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$ sono derivabili, rispettivamente nel punto $x = x_0$ e nel punto $y = y_0$.

Il grafico di $f(x, y_0)$ si può vedere come l'intersezione tra il grafico di $f(x, y)$ ed il piano di equazione $y = y_0$. Poiché $f(x, y_0)$ è derivabile per $x = x_0$, per il significato geometrico della derivata esiste nel piano $y = y_0$ la retta tangente al grafico di $f(x, y_0)$ nel punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La indicheremo con $r_1$.

Similmente, nello stesso punto esiste la retta tangente al grafico di $f(x_0, y)$ (contenuta nel piano di equazione $x = x_0$). La indicheremo con $r_2$.

Le rette $r_1$ ed $r_2$ giacciono entrambe sul piano rappresentato dal grafico della funzione

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ &+ f(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{23}$$

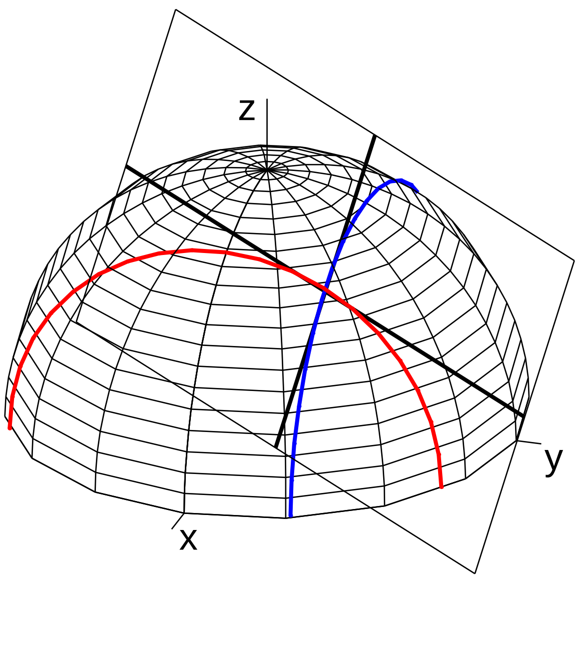
Si noti, innanzitutto, che il grafico di $z(x, y)$ è un piano perché $z(x, y)$ è un polinomio di primo grado nelle variabili $x$ e $y$. Le altre quantità al secondo membro della (23) sono costanti.

Inoltre la retta $r_1$ giace sul piano (23) perché i punti di $r_1$ hanno coordinate $(x, y_0, z)$ con $x$ e $z$ che soddisfano l'equazione

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f(x_0, y_0),$$

e perciò soddisfano anche la (23).

Con un ragionamento simile si vede che anche $r_2$ giace sul piano (23).



## DIFFERENZIABILITÀ

Se risulta che

$$f(x,y) - z(x,y) = \\ = o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,), \quad (24)$$

e cioè se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-z(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

si dice che $f$ è differenziabile nel punto $(x_0, y_0)$. In tal caso, il differenziale $df$ è, per definizione,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy,$$

ed il piano (23) si dice piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0)$.

## LA DERIVABILITÀ PARZIALE NON IMPLICA LA DIFFERENZIABILITÀ

Per dimostrarlo, è sufficiente esibire un controesempio: come la funzione $f(x,y)$ data dalla (22), nel punto $(0,0)$.

## CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ (TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE)

Se una funzione $f$ è di classe $C^1$ in un aperto $\Omega$ del piano, allora essa è differenziabile in ogni punto di $\Omega$.

La dimostrazione si basa sul teorema di Lagrange.

## LA DIFFERENZIABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ

Infatti, se per ipotesi vale la (24), allora possiamo scrivere

$$f(x,y) = z(x,y) + \\ + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,),$$

dove $z(x,y)$ è dato dalla (23). Si vede subito che $f(x,y) \to f(x_0,y_0)$ quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

## INDICAZIONI PRATICHE

- Le derivate parziali si calcolano con le usuali regole di derivazione, avendo cura di considerare una delle due variabili come una costante.

- La definizione delle derivate parziali si estende facilmente a funzioni $f(x_1,\ldots,x_N)$ di $N$ variabili. In tal caso, $N-1$ di esse si considerano costanti, e si deriva rispetto alla variabile rimanente.

- La differenziabilità di una funzione si stabilisce, di solito, mediante la condizione sufficiente appena enunciata.

- Invece, l'accertamento della non differenziabilità in un determinato punto richiede un'analisi che varia da caso a caso, e il cui successo non è garantito.

## DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Se due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili per $t = t_0$, e se $f(x, y)$ è differenziabile nel punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, allora la funzione composta $f(x(t), y(t))$ è derivabile per $t = t_0$ e la sua derivata è data da

$$\left(\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right)_{t=t_0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y'(t_0).$$

Questa formula, che si dimostra applicando le definizioni, si può ricordare dividendo, per il differenziale $dt$, l'espressione del differenziale $df$.

## IL GRADIENTE

Se una funzione $f(x, y)$ è differenziabile in un punto $(x_0, y_0)$, si definisce gradiente di $f$ in tale punto il vettore che ha per componenti le derivate parziali di $f$:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Il gradiente si indica anche con i simboli $Df$ e $\nabla f$.

L'introduzione del simbolo $\nabla$ si attribuisce a William R. Hamilton (1805–1865). Il nome "nabla" viene da uno strumento musicale ebraico avente una forma simile*.

La differenziabilità di $f$ implica che il gradiente non cambia in modulo, direzione e verso anche se si rototrasla il sistema di riferimento, dunque ha un significato indipendente da esso.

## PUNTI CRITICI

I punti dove il gradiente esiste ed è nullo si dicono stazionari o critici.

*M. Kline, Storia del pensiero matematico, vol. II, Einaudi, pag. 910.

## DERIVATE DIREZIONALI

Se, nella definizione delle derivate parziali, al posto delle rette $x = x_0$ e $y = y_0$ sostituiamo una qualunque retta di equazioni parametriche $x = x_0 + t\,v_x$, $y = y_0 + t\,v_y$, giungiamo alla definizione della derivata di $f(x, y)$ rispetto al vettore $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}\, f(x_0 + t\,v_x,\; y_0 + t\,v_y).$$

La derivata di $f(x, y)$ rispetto al vettore $\boldsymbol{v}$ si denota con $\partial f/\partial \boldsymbol{v}$, o $D_v f$.

Se il vettore $v = (v_x, v_y)$ ha modulo 1, cioè se $v_x^2 + v_y^2 = 1$, la derivata $\partial f/\partial \boldsymbol{v}$ prende il nome di derivata direzionale.

Le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ si possono vedere come derivate direzionali fatte rispetto ai versori degli assi coordinati $\hat{\boldsymbol{\imath}} = (1, 0)$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (0, 1)$.

## FORMULA DEL GRADIENTE

Se $f$ è differenziabile in un punto $(x_0, y_0)$, allora in tale punto è anche derivabile parzialmente in tutte le direzioni, e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^2.$$

La tesi si ottiene ponendo $x(t) = x_0 + t\,v_x$, $y(t) = y_0 + t\,v_y$ e derivando la funzione composta $f(x(t),\, y(t))$.

## SIGNIFICATO DEL GRADIENTE

Il gradiente, se non nullo, indica la direzione e il verso di massima crescita dei valori di $f$, ed è perpendicolare alla linea di livello di $f$ passante per $(x_0, y_0)$, la quale, a sua volta, esiste ed è regolare in un intorno di $(x_0, y_0)$ se $f$ è di classe $C^1$ (teorema della funzione implicita).

Il modulo del gradiente ha il valore numerico della derivata direzionale di $f$ più grande possibile: lo si vede dalla formula del gradiente, ricordando che

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla f = \|\boldsymbol{v}\|\; \|\nabla f\| \,\cos\alpha$$

essendo $\alpha$ l'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\nabla f$. Se dunque $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, il prodotto scalare risulta massimo quando $\alpha = 0$, cioè quando $\boldsymbol{v}$ è parallelo e concorde con $\nabla f$.

## DERIVATE PARZIALI SECONDE

Se esistono le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ in un aperto $\Omega$ del piano, esse sono funzioni del punto $(x, y)$, dunque possono essere a loro volta derivabili parzialmente rispetto alle variabili $x$ e $y$.

In tal caso, le derivate

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

e

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

si dicono derivate seconde pure, mentre le derivate

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

si dicono derivate seconde miste.

## TEOREMA DI SCHWARZ

Se le derivate miste sono continue, allora sono anche uguali fra loro: è questo il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Più precisamente: se le due derivate seconde miste esistono in un intorno di un punto $(x_0, y_0)$, e sono continue in esso, allora in tale punto hanno lo stesso valore.

Anzi, è sufficiente che in un intorno di $(x_0, y_0)$ esistano $f_x, f_y$ e $f_{xy}$, e che quest'ultima sia continua in $(x_0, y_0)$, per far sì che esista anche $f_{yx}(x_0, y_0)$ e risulti $f_{xy} = f_{yx}$ in $(x_0, y_0)$ (v. Trench, Introduction to real analysis, pag. 320).

## MATRICE HESSIANA

La matrice le cui componenti sono le derivate parziali seconde, e cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

si dice matrice hessiana della funzione $f(x, y)$, dal nome di Ludwig Otto Hesse (1811-1874), e si denota con $D^2 f$ oppure con $\mathbf{H}_f$.

Se le derivate seconde sono continue, per il teorema di Schwarz la matrice hessiana risulta simmetrica.

## DERIVATE DIREZIONALI SECONDE

Indichiamo con $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ un vettore rispetto al quale deriveremo la funzione $f(x, y)$.

Se le derivate parziali prime di una funzione $f(x, y)$ esistono in un intorno di un punto $(x_0, y_0)$, e sono differenziabili in $(x_0, y_0)$, allora la funzione

$$\begin{aligned} f_v(x, y) &= \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(x, y) \\ &= v_x\, f_x(x, y) + v_y\, f_y(x, y) \end{aligned}$$

è differenziabile in $(x_0, y_0)$. Derivando ambo i membri rispetto a $\boldsymbol{v}$, e applicando la formula del gradiente a $f_x$ e $f_y$, si trova

$$f_{vv}(x_0, y_0) = \boldsymbol{v}\, \mathbf{H}_f\, \boldsymbol{v}^T.$$

Quindi, se la matrice $\mathbf{H}_f$ è simmetrica, la derivata direzionale seconda $f_{vv}(x_0, y_0)$ è una forma quadratica nella variabile $\boldsymbol{v}$.

## FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 1 CON IL RESTO DI PEANO

Se $f(x,y)$ è differenziabile nel punto $(x_0,y_0)$, allora dalla definizione (24) si ricava immediatamente

$$f(x,y) = z(x,y) + \\ + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,) \qquad (25)$$

dove il polinomio $z(x,y)$ è dato dalla (23), e cioè

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) \\ &+ f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

La formula (25) è la formula di Taylor con il resto di Peano, arrestata al primo ordine, ed il polinomio $z(x,y)$ è il corrispondente polinomio di Taylor.

La formula (25) realizza l'approssimazione indicata fra le motivazioni della differenziabilità a pag. A48.

È possibile ottenere un'approssimazione migliore facendo intervenire le derivate seconde (se esistono). Vediamo come.

## LA CLASSE $C^2$

Se le quattro derivate seconde della funzione $f(x,y)$ esistono e sono continue in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si dice che $f$ è di classe $C^2$ in $\Omega$, e si scrive $f \in C^2(\Omega)$.

## FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 CON IL RESTO DI PEANO

Se $f(x,y)$ è differenziabile in un intorno del punto $(x_0,y_0)$, e se le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ sono differenziabili in tale punto, allora le derivate seconde miste in $(x_0,y_0)$ sono uguali fra loro, e si ha

$$\begin{aligned} f(x,y) &= z(x,y) + \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 \\ &+ 2\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)\,(x-x_0)\,(y-y_0) \\ &+ \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2\Big) \\ &+ o\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\big) \qquad (26) \end{aligned}$$

dove il polinomio $z(x,y)$ è ancora come nella (23).

La formula (26) è la formula di Taylor con il resto di Peano, arrestata al secondo ordine.

Il polinomio di Taylor del secondo ordine è dato dalla somma di $z(x,y)$ e di $\frac{1}{2}$ della forma quadratica avente per matrice la matrice hessiana $\mathbf{H}_f(x_0,y_0)$, applicata al vettore le cui componenti sono $(x-x_0,\ y-y_0)$.

La suddetta forma quadratica si dice "differenziale secondo" della funzione $f$, e si indica con $d^2 f$.

Una dimostrazione della formula (26) si può trovare in Pagani, Salsa, Analisi Matematica, vol. I, Masson/Zanichelli.

## MOTIVAZIONI

Una delle più tipiche applicazioni del calcolo differenziale consiste nella determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione data.

Tale problema matematico corrisponde, in pratica, alla determinazione della soluzione più redditizia di un problema finanziario, alla determinazione della configurazione di equilibrio di un sistema meccanico, e a tante altre interpretazioni.

## MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Data una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$, si dice che un punto $(x_0, y_0) \in S$ è un:

• punto di massimo assoluto per $f$ se risulta $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in S$;

• punto di minimo assoluto per $f$ se risulta $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in S$.

## MASSIMI E MINIMI RELATIVI (1)

Data una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$, si dice che un punto $(x_0, y_0) \in S$ è un:

• punto di massimo relativo per $f$ se esiste un raggio $\delta \in (0, +\infty)$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap S$;

• punto di minimo relativo per $f$ se esiste un raggio $\delta \in (0, +\infty)$ tale che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap S$.

## MASSIMI E MINIMI RELATIVI (2)

Data una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$, si dice che un punto $(x_0, y_0) \in S$ è un:

• punto di massimo relativo per $f$ se esiste un intorno di $(x_0, y_0)$ nel quale il suddetto punto è un punto di massimo assoluto per la restrizione di $f$ a tale intorno;

• punto di minimo relativo per $f$ se esiste un intorno di $(x_0, y_0)$ nel quale il suddetto punto è un punto di minimo assoluto per la restrizione di $f$ a tale intorno.

## TERMINOLOGIA ANGLOSASSONE

I punti di massimo assoluto si dicono “global maxima”, quelli di minimo assoluto “global minima”. I punti di massimo relativo si dicono “local maxima”, quelli di minimo relativo “local minima”.

Spesso tali espressioni vengono riportate in italiano per assonanza, e diventano “massimi globali”, “minimi globali”, “massimi locali”, “minimi locali”.

---

(1) (2) Si badi, a scanso di equivoci, che le due definizioni contraddistinte dai numeri (1) e (2) sono equivalenti tra loro.

## RICERCA DEI MASSIMI E DEI MINIMI MEDIANTE LA DEFINIZIONE

Spesso è possibile riconoscere i massimi e i minimi di una funzione senza fare calcoli.

Ad esempio, l'origine è l'unico punto di minimo assoluto per le seguenti funzioni:

- $x^2+y^2$ (avente per grafico un paraboloide di rotazione);
- $\sqrt{x^2+y^2}$ (avente per grafico un cono).

L'origine è l'unico punto di massimo assoluto per la funzione $1-x^2-y^2$ (avente per grafico un paraboloide di rotazione).

Quanto sopra si vede applicando direttamente la definizione.

## FUNZIONI COMPOSTE CON FUNZIONI MONOTONE

Se $\varphi(t)$ è una funzione strettamente crescente della variabile reale $t$ (esempi: $\varphi(t) = \sqrt{t}$, e $\varphi(t) = e^t$) allora la funzione composta $\varphi(f(x,y))$ ha gli stessi punti di massimo e di minimo della funzione $f(x,y)$ ristretta al dominio $S$ della composta $\varphi(f(x,y))$.

Ciò segue immediatamente dalla definizione.

Ad esempio, l'origine è l'unico punto di minimo assoluto per la funzione $e^{x^2+y^2}$, ed è l'unico punto di massimo assoluto per la funzione $e^{-x^2-y^2}$.

Dunque, se la funzione da studiare ha la forma $\varphi(f(x,y))$, con $\varphi(t)$ strettamente crescente, ci si può ricondurre a studiare la funzione $f(x,y)$.

In tal caso, fare attenzione a non considerare $f(x,y)$ al di fuori del dominio di $\varphi(t)$.

Esempio: la funzione $\sqrt{1-x^2-y^2}$ ha un unico punto di massimo assoluto nell'origine, dove il radicando è massimo.

La stessa funzione ha minimo assoluto in ogni punto della circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$.

I punti al di fuori del disco chiuso $\overline{B}_1(0,0)$ non appartengono al dominio della funzione data.

Il radicando, invece, non ha minimo in $\mathbb{R}^2$ perché è illimitato inferiormente.

Il radicando, ristretto al disco chiuso $\overline{B}_1(0,0)$ ha minimo assoluto, che vale zero, ed è assunto sulla circonferenza $\partial B_1(0,0)$.

## Ricerca dei massimi e dei minimi con l'ausilio del calcolo differenziale

Innanzitutto conviene riconoscere i punti di massimo e di minimo che si possono individuare senza l'uso del calcolo differenziale (v. pag. preced.).

Il teorema di Weierstrass (pag. A45), se le ipotesi sono soddisfatte, garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluto ancor prima di averli trovati.

Vale il teorema di Fermat: le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$, se esistono, sono nulle nei punti di massimo e nei punti di minimo della funzione $f$ purché tali punti siano interni al dominio.

Dunque, dopo aver riconosciuto i punti di massimo e di minimo più evidenti, si può studiare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0; \\ f_y(x,y) = 0, \end{cases}$$

con $(x, y)$ interno al dominio di $f$.

Le soluzioni di tale sistema non sono necessariamente punti di massimo o di minimo.

Il tipico esempio è dato dalle funzioni $xy$ e $x^2 - y^2$. In entrambi i casi, l'origine è un punto critico ma non è né un punto di massimo, né un punto di minimo.

N.B. i punti critici sono quelli dove il gradiente è nullo.

Le tipiche condizioni sufficienti affinché un punto critico di una funzione di classe $C^2$ sia un punto di minimo relativo sono:

- Che la matrice hessiana sia definita positiva nel punto considerato.

- Che la matrice hessiana sia semidefinita positiva in un intorno del punto considerato.

Queste condizioni valgono anche per funzioni di tre o più variabili.

I punti di massimo (relativo o assoluto) di una funzione $f$ sono i punti di minimo di $-f$, dunque le condizioni precedenti si possono usare anche per trovare i massimi.

---

La matrice hessiana di una funzione di due variabili è, ovviamente, una matrice $2 \times 2$, dunque:

- Per stabilire se è definita positiva basta vedere se il suo determinante è positivo, e se gli elementi della diagonale principale sono positivi.

- Per stabilire se è semidefinita positiva basta vedere se il suo determinante è non negativo, e se gli elementi della diagonale principale sono non negativi.

Purtroppo questi criteri, spesso usati negli esercizi, non sono validi per le funzioni di tre o più variabili.

# Funzioni da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^k$

## MOTIVAZIONI

Le funzioni aventi per dominio un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, e per codominio $\mathbb{R}^k$, $N, k \geq 1$, si usano in molte circostanze. Vediamo alcuni esempi.

---

## IL CASO PARTICOLARE $k = 1$

Le superfici più semplici, e cioè i piani, purché non paralleli all'asse $z$, sono grafici di funzioni del tipo $z = a\,x + b\,y + c$, da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

Molte altre superfici interessanti sono grafici di opportune funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

La più generale equazione differenziale ordinaria si rappresenta nella forma $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, dove $F$ è una funzione da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$, $N = n + 2$, e $n$ è l'ordine dell'equazione.

---

## IL CASO PARTICOLARE $N = 1$

La legge oraria del moto di un punto materiale nello spazio è una funzione che alla variabile $t$ associa il corrispondente punto $(x(t), y(t), z(t))$, dunque va da un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$ allo spazio $\mathbb{R}^3$.

## IL CASO $N, k > 1$: CAMBIAMENTI DI COORDINATE

## COORDINATE POLARI PIANE

La funzione che trasforma le coordinate polari $(r, \vartheta)$ in coordinate cartesiane $(x, y)$ è data da

$$\begin{cases} x = r\,\cos\vartheta, \\ y = r\,\operatorname{sen}\vartheta. \end{cases}$$

La funzione è ben definita per ogni $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, anche se le variabili $r, \vartheta$ perdono il significato di "coordinate polari" quando $r < 0$.

La funzione così definita non è invertibile. È invertibile, invece, la sua restrizione all'insieme $(0, +\infty) \times [\,0, 2\pi)$.

## COORDINATE SFERICHE

Secondo il libro di testo, la funzione che trasforma le coordinate sferiche $(r, \phi, \vartheta)$ in coordinate cartesiane $(x, y, z)$ è data da

$$\begin{cases} x = r\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\vartheta, \\ y = r\,\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\vartheta, \\ z = r\,\cos\phi. \end{cases}$$

La funzione è ben definita per ogni $(r, \phi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3$, anche se le variabili $r, \phi, \vartheta$ perdono il significato di "coordinate sferiche" quando $r < 0$.

Il codominio è lo stesso spazio $\mathbb{R}^3$.

La funzione così definita non è invertibile. È invertibile, invece, la sua restrizione all'insieme delle terne $(r, \phi, \vartheta)$ tali che $r \in (0, +\infty)$, $\phi \in (0, \pi)$, $\vartheta \in [\,0, 2\pi)$.

## COORDINATE CILINDRICHE

La funzione che trasforma le coordinate cilindriche $(r, \vartheta, z)$ in coordinate cartesiane $(x, y, z)$ è data da

$$\begin{cases} x = r\,\cos\vartheta, \\ y = r\,\operatorname{sen}\vartheta, \\ z = z. \end{cases}$$

La funzione è ben definita per ogni $(r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$, anche se le variabili $r, \vartheta, z$ perdono il significato di "coordinate cinindriche" quando $r < 0$. Il codominio è lo spazio $\mathbb{R}^3$.

La funzione così definita non è invertibile. È invertibile, invece, la sua restrizione all'insieme $(0, +\infty) \times [\,0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

---

## IL CASO $N, k > 1$: SISTEMI LINEARI

Il più generale sistema di due equazioni di primo grado in due incognite, dato da

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

si può scrivere semplicemente come segue:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

dove $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la funzione che al vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ associa il vettore $\boldsymbol{y}$ le cui componenti $(y_1, y_2)$ sono date da

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 - b_1, \\ y_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 - b_2, \end{cases}$$

e $\boldsymbol{0}$ è il vettore nullo.

## IL CASO $N, k > 1$: SISTEMI NON LINEARI

Il più generale sistema di $k$ equazioni in $N$ incognite, dato da

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_N) = 0, \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_N) = 0, \end{cases}$$

dove $f_1, \ldots f_k$ sono funzioni date, aventi per dominio un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ e a valori reali, si può scrivere semplicemente come segue:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

dove $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ è la funzione che al vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ associa il vettore $\boldsymbol{y}$ le cui componenti $(y_1, \ldots, y_k)$ sono date da

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_N), \\ \ldots \\ y_k = f_k(x_1, \ldots, x_N). \end{cases} \tag{27}$$

---

## RAPPRESENTAZIONE DI UNA $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ MEDIANTE $k$ FUNZIONI SCALARI – MATRICE JACOBIANA

Il sistema (27) è importante anche perché permette di esprimere una qualunque funzione $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ mediante le $k$ funzioni scalari $f_1, \ldots, f_k$ dette "componenti" di $\boldsymbol{F}$.

Se le componenti di $\boldsymbol{F}$ sono derivabili rispetto a $x_1, \ldots, x_N$, resta individuata la MATRICE JACOBIANA di $\boldsymbol{F}$, data da

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

## CASI PARTICOLARI DELLA MATRICE JACOBIANA

### IL CASO PARTICOLARE $k = 1$

In questo caso la funzione considerata è una funzione $f(x_1, \ldots, x_N)$ a valori scalari.

La matrice jacobiana (così chiamata dal nome di Karl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) si riduce a

$$\boldsymbol{J} = \nabla f.$$

---

### IL CASO PARTICOLARE $N = 1$

In questo caso la funzione considerata associa ad una variabile reale $x$ un vettore $(y_1(x), \ldots, y_k(x))$.

La matrice jacobiana è il vettore velocità

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_k'(x) \end{pmatrix}.$$

---

### IL CASO PARTICOLARE $N, k = 1$

In questo caso stiamo parlando di una funzione $y = f(x)$, della variabile reale $x$ e a valori scalari.

La matrice jacobiana è la matrice $1 \times 1$ la cui unica componente è la derivata di $f$:

$$\boldsymbol{J} = (f'(x)).$$

## REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

La regola di derivazione della funzione composta (pag. A50) ammette un'elegante formulazione mediante la matrice jacobiana.

Consideriamo una funzione $\boldsymbol{F}$, definita in un intorno di $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e a valori in $\mathbb{R}^k$, e poniamo $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$.

Consideriamo, inoltre, una funzione $\boldsymbol{G}$, definita in un intorno di $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^k$ e a valori in $\mathbb{R}^\ell$.

Se $\boldsymbol{F}$ è differenziabile nel punto $\boldsymbol{x}_0$, nel senso che tutte le sue componenti sono differenziabili in tale punto, e se $\boldsymbol{G}$ è differenziabile nel punto $\boldsymbol{y}_0$, allora la funzione composta

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$$

è differenziabile nel punto $\boldsymbol{x}_0$, e la sua matrice jacobiana $\boldsymbol{J}$, di ordine $\ell \times N$, è il prodotto matriciale

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J_G}\,\boldsymbol{J_F}$$

dove $\boldsymbol{J_F}$ e $\boldsymbol{J_G}$ denotano le matrici jacobiane di $\boldsymbol{F}$ e di $\boldsymbol{G}$.

# Calcolo integrale

## MOTIVAZIONI

La teoria della misura e dell'integrazione nasce con il problema di determinare le aree ed i volumi delle figure geometriche.

Uno dei precursori è stato Archimede di Siracusa (287–212 a.C.).

Oggi, la teoria ha molte altre applicazioni.

Ad esempio, l'integrale doppio

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

dove $R$ è il rettangolo dato da $R = [a,b] \times [c,d]$, e $f\colon R \to [0,+\infty)$, si può interpretare come il volume del sottografico di $f$, che è il solido dato da

$$\{\,(x,y,z) \mid (x,y) \in R,\quad 0 \le z \le f(x,y)\,\}. \tag{28}$$

Dunque, nel caso particolare $f \equiv z_0$, con $z_0 =$ costante $> 0$, lo stesso integrale si può interpretare come il volume del parallelepipedo $R \times [0,z_0]$, e si ha

$$\iint_R z_0\,dx\,dy = (b-a)\,(d-c)\,z_0. \tag{29}$$

Quando la funzione integranda non è così banale, l'integrale doppio esteso al rettangolo $R$ si può definire come segue.

## DEFINIZIONE (INTEGRALE DI RIEMANN ESTESO AD UN RETTANGOLO).

Consideriamo una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$ avente per dominio un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$.

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in $n$ parti mediante i punti

$$x_h = a + (b-a)\,h/n, \qquad h = 0,\ldots,n.$$

Dividiamo anche l'intervallo $[c,d]$ in $n$ parti, mediante i punti

$$y_k = c + (d-c)\,k/n, \qquad k = 0,\ldots,n.$$

In ciascuno dei sottorettangoli $I_{hk} = [x_{h-1},\, x_h] \times [y_{k-1},\, y_k]$, prendiamo un punto a piacere $\mathbf{p}_{hk} = (\xi_{hk},\, \eta_{hk})$.

Consideriamo la somma di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\xi_{hk},\, \eta_{hk})$$

dove $|I_{hk}|$ denota l'area di $I_{hk}$, cioè

$$|I_{hk}| = \frac{b-a}{n}\,\frac{d-c}{n}. \tag{30}$$

Poiché $|I_{hk}|$ non dipende né da $h$ né da $k$, si può anche scrivere

$$s_n = |I_{hk}| \sum_{h,k=1}^{n} f(\xi_{hk},\, \eta_{hk}).$$

Se esiste il limite di $s_n$ per $n \to +\infty$, e se il suo valore non dipende da come si scelgono i punti $\mathbf{p}_{hk}$, la funzione $f$ si dice integrabile secondo Riemann sul rettangolo $R$, e si scrive

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} s_n. \tag{31}$$

Essendo $f$ limitata per ipotesi, questo limite, se esiste, ha un valore finito.

## A CHE SERVE LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE

La definizione testé enunciata serve per dimostrare i teoremi che riguardano l'integrale, presentando così in modo organico e rigoroso le idee sviluppate nel corso dei secoli dai predecessori di Bernhard Riemann (1826–1866).

Ad esempio, serve per dimostrare che se $f(x, y)$ è integrabile su di un rettangolo $R$, allora il prodotto $\lambda\, f(x, y)$ della funzione $f$ per uno scalare qualunque $\lambda \in \mathbb{R}$ è anch'esso una funzione integrabile, e risulta

$$\iint_R \lambda\, f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Inoltre, se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono due funzioni integrabili sul rettangolo $R$, allora la somma $f(x, y) + g(x, y)$ è anch'essa una funzione integrabile, e risulta

$$\begin{aligned}\iint_R \Big(f(x, y) + g(x, y)\Big)\, dx\, dy \\ = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \\ + \iint_R g(x, y)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

E ancora: se $f(x, y)$ è integrabile su di un rettangolo $R$, allora anche la funzione $|f(x, y)|$ lo è, e risulta

$$\left|\iint_R f(x, y)\, dx\, dy\right| \leq \iint_R |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

Se, in particolare, risulta $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in R$, allora anche l'integrale di $f$ è non negativo, e rappresenta il volume del sottografico (28) di $f$.

## ESEMPIO

Applichiamo la definizione dell'integrale doppio alla funzione $f \equiv z_0 =$ costante $\in \mathbb{R}$.

Quali che siano i punti $\mathbf{p}_{hk}$, si ha $f(\xi_{hk}, \eta_{hk}) = z_0$, e perciò troviamo

$$\begin{aligned} s_n &= |I_{hk}| \sum_{h,k=1}^{n} f(\xi_{hk}, \eta_{hk}) \\ &= |I_{hk}| \sum_{h,k=1}^{n} z_0. \end{aligned}$$

Le aree $|I_{hk}|$ sono date dalla (30). Inoltre la costante $z_0$ non dipende dagli indici di somma $h, k$. Siccome i termini della sommatoria sono $n^2$, si deduce che

$$s_n = (b - a)\,(d - c)\, z_0 \quad \text{per ogni } n.$$

Dunque il limite di $s_n$ per $n \to +\infty$ esiste banalmente, e si verifica la (29) qualunque sia $z_0 \in \mathbb{R}$.

## A CHE COSA NON SERVE LA DEFINIZIONE

La definizione dell'integrale di Riemann, a mio parere, non è stata messa a punto per divulgare ad un vasto pubblico, in modo facilmente accessibile, i concetti principali riguardo all'integrazione.

## COME SI CALCOLANO GLI INTEGRALI

Una singola somma di Cauchy-Riemann $s_n$, con un valore di $n$ abbastanza grande, può servire per trovare un'approssimazione numerica di un integrale.

Tuttavia, in generale, stabilire se esiste il limite di $s_n$ per $n \to +\infty$ e trovarne il valore è troppo difficile da fare per via diretta. In pratica ci si serve di:

- condizioni sufficienti per l'integrabilità, che assicurano l'esistenza del suddetto limite;

- formule di integrazione, che possono trasformare l'integrale dato in altri più semplici;

- metodi numerici per trovare un valore approssimato dell'integrale.

Una delle principali condizioni sufficienti per l'integrabilità su di un rettangolo è la continuità della funzione integranda.

## INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Se la definizione descritta a pagina A62 viene applicata ad una funzione $f \in C^0(R)$, allora il limite (31) esiste, ed il suo valore non dipende da come si scelgono i punti $\mathbf{p}_{hk}$.

Dunque le funzioni continue sono integrabili.

## I PIÙ SEMPLICI METODI DI INTEGRAZIONE

Un metodo di integrazione numerica consiste nel calcolare la somma $s_n$ assegnando ad $n$ un valore numerico grande.

Il valore così ottenuto approssima quello dell'integrale.

Questo metodo si usa in combinazione con metodi per stimare l'errore così commesso.

Un altro metodo di integrazione è il seguente. Si esprime l'integrale

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

considerando la $x$ come un parametro fissato, e la $y$ come l'unica variabile di integrazione.

Il risultato viene a dipendere da $x$: è una funzione del parametro $x$. Si integra tale funzione sull'intervallo $(a,b)$.
Sotto opportune ipotesi, ad esempio se $f \in C^0(R)$, si ottiene il valore dell'integrale doppio. Si ha, cioè,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Scambiando i ruoli di $x$ ed $y$, si ha anche

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Le precedenti due formule si dicono "formule di riduzione" dell'integrale doppio a due integrali semplici.

## ESEMPIO

Applichiamo le formule di riduzione al seguente integrale:

$$\iint_R z_0 \, dx \, dy$$

dove $z_0 =$ costante $\in \mathbb{R}$. Considerando la $x$ come un parametro fissato, e la $y$ come l'unica variabile di integrazione, si ha

$$\int_c^d z_0 \, dy = (d-c)\, z_0.$$

La quantità così ottenuta è una funzione (costante in un caso così banale) del parametro $x$. La integriamo sull'intervallo $(a, b)$ e troviamo

$$\int_a^b \left( \int_c^d z_0 \, dy \right) dx = (b-a)\,(d-c)\, z_0.$$

Constatiamo che il risultato così ottenuto coincide con l'integrale doppio espresso dalla (29).

## ESEMPIO

Applichiamo le formule di riduzione al seguente integrale:

$$\iint_R \operatorname{sen} x \, dx \, dy.$$

Considerando la $x$ come un parametro fissato, e la $y$ come l'unica variabile di integrazione, si ha

$$\int_c^d \operatorname{sen} x \, dy = (d-c) \operatorname{sen} x.$$

Integrando sull'intervallo $(a, b)$ la funzione così ottenuta, troviamo

$$\int_a^b \left( \int_c^d \operatorname{sen} x \, dy \right) dx = \\ = (d-c)\,(\cos a - \cos b).$$

dunque

$$\iint_R \operatorname{sen} x \, dx \, dy = (d-c)\,(\cos a - \cos b).$$

## Integrazione su alcuni domini limitati

La definizione dell'integrale si estende al caso in cui il dominio di integrazione è un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, non necessariamente rettangolare.

In tal caso si prende un qualunque rettangolo $R$ con i lati paralleli agli assi e contenente $\Omega$, e si definisce

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

dove si intende che la $f(x,y)$ al secondo membro vale 0 ogniqualvolta $(x,y) \in R \setminus \Omega$.

Se, in particolare, $f(x,y) = 1$ in $\Omega$, allora l'integrale

$$|\Omega| = \iint_\Omega dx\,dy \qquad (32)$$

esprime l'area di $\Omega$, se $\Omega$ è particolarmente semplice.

Più esattamente, la (32) esprime la misura di Peano-Jordan del dominio $\Omega$, così chiamata dai nomi di Giuseppe Peano (1858-1932) e di Camille Jordan (1838-1922).

L'integrale doppio presenta una difficoltà in più rispetto all'integrale semplice: infatti, oltre all'espressione della funzione integranda, interviene anche la forma del dominio di integrazione.

Ad esempio, una funzione semplicissima come $f(x,y) \equiv 1$ non è integrabile sul dominio $\Omega$ nel piano $xy$ dato dal sottografico della funzione di Dirichlet.

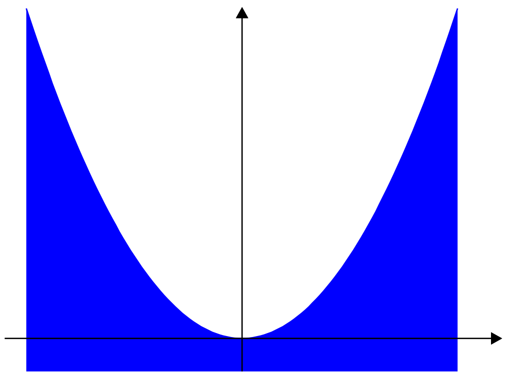
## Domini semplici

Vediamo ora alcuni domini misurabili secondo Peano-Jordan, cioè tali che la costante 1 è integrabile su di essi.

L'importanza sta anche nel fatto che tutte le funzioni continue sono integrabili su tali domini.

Si dice "$y$-semplice" un insieme chiuso delimitato dai grafici di due funzioni continue $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, cioè un insieme del tipo

$$\Omega = \{\,(x,y) \mid x \in [a,b],\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\,\}.$$



Analogamente, si dice "$x$-semplice" un insieme chiuso delimitato dai grafici di due funzioni continue $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, cioè un insieme del tipo

$$\Omega = \{\,(x,y) \mid y \in [c,d],\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\,\}.$$

Uno stesso dominio, come ad esempio il disco chiuso $\Omega = \overline{B}_r(x_0,y_0)$, può benissimo essere sia $x$-semplice che $y$-semplice.

## FORMULE DI RIDUZIONE

Le formule di riduzione dell'integrale doppio a due integrali semplici, già viste nel caso $\Omega = R$ (rettangolo), si estendono ai domini semplici.

Più precisamente, se $f \in C^0(\Omega)$ e se $\Omega$ è $y$-semplice, allora

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Se, invece, $\Omega$ è $x$-semplice, allora

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

## DOMINI REGOLARI

Si dice "regolare" o "semplicemente decomponibile" un dominio decomponibile in un numero finito di domini semplici.

Il tipico esempio di dominio regolare, non semplice, è la corona circolare $\Omega = \overline{B}_{r_2}(x_0,y_0) \setminus B_{r_1}(x_0,y_0)$, $r_1 < r_2$.

Si badi che tutti i domini semplici, inclusi i rettangoli e i dischi, sono anche domini regolari.

Si dimostra che se $\Omega$ è un dominio regolare (e, a maggior ragione, chiuso e limitato), e se $f \in C^0(\Omega)$, allora $f$ è integrabile secondo Riemann su $\Omega$.

## CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Insieme all'applicazione della definizione, utile per approssimazioni numeriche, e alle formule di riduzione, uno dei principali metodi di integrazione consiste nel cambiamento delle variabili.

La formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi si enuncia sotto ipotesi più restrittive rispetto agli integrali semplici.

Si richiede, infatti, che la trasformazione $(x,y) = \mathbf{T}(u,v)$, oltre ad essere di classe $C^1$,

1) sia invertibile, e
2) anche la funzione inversa di $\mathbf{T}$ sia di classe $C^1$.

Sotto tali ipotesi, consideriamo un dominio regolare $\Omega$ nel piano $uv$ ed una funzione $f \in C^0(\mathbf{T}(\Omega))$, dove $\mathbf{T}(\Omega)$ è l'immagine del dominio $\Omega$ tramite la trasformazione $\mathbf{T}$. Si ha, allora:

$$\iint_{\mathbf{T}(\Omega)} f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \iint_\Omega f(\mathbf{T}(u,v))\ |\det D\mathbf{T}(u,v)|\ du\,dv$$

dove $|\det D\mathbf{T}|$ è il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana $D\mathbf{T}$.

Nel caso particolare in cui: $\Omega$ è il rettangolo $R = [0,b] \times [0,h]$, $f$ è la costante 1, e $\mathbf{T}$ è un'applicazione affine, la formula indicata sopra si può verificare direttamente.

## ESEMPI

Il cambiamento di variabili più tipico è il passaggio a coordinate polari dato da $(x, y) = \mathbf{T}(r, \vartheta)$, dove

$$\begin{cases} x = r\,\cos\vartheta \\ y = r\,\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

La matrice jacobiana $D\mathbf{T}$ è

$$D\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\,\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & r\,\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

dunque $|\det D\mathbf{T}| = r$. Ad esempio, il rettangolo $R = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2]$ nel piano $r\vartheta$, con $0 < r_1 < r_2$ e $0 \le \vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$, si trasforma nella figura $\mathbf{T}(R)$ la cui area è

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(R)| &= \iint_{\mathbf{T}(R)} dx\,dy \\ &= \iint_R r\,dr\,d\vartheta. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale, a sua volta, si esprime con le formule di riduzione:

$$\iint_R r\,dr\,d\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left( \int_{r_1}^{r_2} r\,dr \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{r_1 + r_2}{2}\,(r_2 - r_1)\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

Questo risultato si può trovare anche senza l'uso del calcolo integrale.

Poiché $\frac{1}{2}\,(r_2 + r_1) = r + o(1)$ per $r_1$, $r_2 \to r$, e poiché $|R| = (r_2 - r_1)\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)$, tale risultato mostra, in particolare, che

$$|\mathbf{T}(R)| = r\,|R| + o(|R|).$$

## DOMINI NORMALI

I domini semplici vengono anche detti "domini normali". Sussiste tuttavia la seguente ambiguità.

I domini $y$-semplici vengono detti "normali rispetto all'asse $y$" nei testi di L. Amerio e di E. Giusti, "normali rispetto all'asse $x$" nel testo di P. Marcellini e C. Sbordone.

Per fortuna, tale ambiguità non può indurre in errore al momento di usare le formule di riduzione.

## ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE

Dalla definizione dell'integrale discende anche che se $f \in C^0(\Omega)$, dove $\Omega$ è un dominio regolare, a sua volta unione di due domini regolari $\Omega_1, \Omega_2$ aventi in comune solo punti di frontiera, allora

$$\begin{aligned} \iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy &= \iint_{\Omega_1} f(x, y)\,dx\,dy \\ &+ \iint_{\Omega_2} f(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Tale proprietà si chiama additività dell'integrale.

## Integrali tripli

L'integrale triplo ha, come l'integrale doppio, innumerevoli interpretazioni e applicazioni. Ad esempio, l'integrale

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$$

esprime il volume del solido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. L'integrale

$$\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

esprime la massa di $\Omega$, se $\mu(x,y,z)$ è la densità materiale.

## Definizione

La definizione dell'integrale triplo, nel senso di Riemann, procede come quella dell'integrale doppio. Si definisce, innanzitutto,

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (33)$$

dove $f\colon R \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, e il dominio di integrazione è un parallelepipedo $R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$.

Più precisamente, si suddivide $R$ in parallelepipedi più piccoli, e si considerano le somme di Cauchy-Riemann.

Se le somme di Cauchy-Riemann ammettono limite, ed il valore del limite è indipendente dai punti utilizzati per costruire tali somme, si dice che la funzione $f$ è integrabile secondo Riemann sul parallelepipedo $R$, ed il valore del suddetto limite si indica con il simbolo in (33).

## Integrale triplo su di un dominio limitato

La definizione dell'integrale triplo si estende ad un dominio limitato $\Omega$ considerando un parallelepipedo $R \supset \Omega$ e ponendo

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \\ = \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

dove si intende che la funzione $f$ al secondo membro è nulla nell'insieme differenza $R \setminus \Omega$.

Perfino la semplicissima funzione $f(x,y,z) \equiv 1$ può non essere integrabile su di un dominio $\Omega$, se questo è molto irregolare.

I domini sui quali è integrabile la costante 1 si dicono misurabili secondo Peano-Jordan, e la loro misura è data da

$$|\Omega| = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz.$$

La misura di Peano-Jordan serve per definire rigorosamente che cosa è il volume di un solido.

## METODI DI CALCOLO DEGLI INTEGRALI TRIPLI

I metodi di calcolo più semplici sono i seguenti.

1) Calcolare una somma di Cauchy-Riemann per fare un'approssimazione numerica dell'integrale.

Questo metodo si usa in combinazione con una stima dell'errore così commesso.

2) Cambiamento di variabili. La formula è simile a quella valida per l'integrale doppio. Il cambiamento di variabili più usato è il passaggio a coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta, \\ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta, \\ z = r \cos\phi \end{cases} \tag{34}$$

la cui matrice jacobiana è

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta & r \cos\phi \cos\vartheta & -r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta & r \cos\phi \operatorname{sen}\vartheta & r \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta \\ \cos\phi & -r \operatorname{sen}\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante $r^2 \operatorname{sen}\phi$ di tale matrice è maggiore o uguale a zero per ogni $\phi \in [0, \pi]$.

Se, dunque: $R$ è un parallelepipedo (chiuso) nello spazio $r\phi\vartheta$, con $R \subset [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$; $\Omega$ denota l'immagine di $R$ tramite le (34), e $f \in C^0(\Omega)$, si ha

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_R g(r,\phi,\vartheta)\, r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\vartheta$$

dove $g(r,\phi,\vartheta) = f(r \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta,\ r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta,\ r \cos\phi)$.

3) Formule di riduzione. Il libro di testo parla di integrazione "per fili" e "per strati".

3A - "Integrazione per fili". Supponiamo che il dominio $\Omega$ sia delimitato da due funzioni continue $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ definite su di uno stesso dominio regolare $D$ nel piano $xy$:

$$\Omega = \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D,$$
$$u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \}.$$

Supponiamo, inoltre, che la funzione integranda sia continua. Allora essa è integrabile su $\Omega$ e si ha

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_D \left( \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

3B - "Integrazione per strati". Supponiamo che $\Omega$ sia un dominio di rotazione intorno all'asse $z$, avente la forma

$$\Omega = \{ (x,y,z) \mid$$
$$\sqrt{x^2+y^2} \le r(z),\ \ z \in [z_1, z_2] \}$$

dove $r(z)$ è una funzione continua. Supponiamo, inoltre, che sia continua anche la funzione integranda $f$. Allora essa è integrabile su $\Omega$, e si ha

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_{z_1}^{z_2} \left( \iint_{\overline{B}_{r(z)}(0,0)} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

# Integrali curvilinei

## L'INTEGRALE DI LINEA DI PRIMA SPECIE

OVVERO

## L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SCALARE LUNGO UNA CURVA

## MOTIVAZIONI

L'integrale di una funzione scalare lungo una curva $\gamma$, si usa, ad esempio:

1. Per esprimere la massa $M$ di un filo a partire dalla densità lineare di massa $\lambda$:

$$M = \int_\gamma \lambda(s)\, ds.$$

2. Per esprimere le coordinate $x_B, y_B, z_B$ del baricentro del filo:

$$x_B = \frac{1}{M} \int_\gamma x(s)\, \lambda(s)\, ds;$$

$$y_B = \frac{1}{M} \int_\gamma y(s)\, \lambda(s)\, ds.$$

$$z_B = \frac{1}{M} \int_\gamma z(s)\, \lambda(s)\, ds.$$

3. Per esprimere la carica $q$ di un filo a partire dalla densità lineare di carica $\rho$:

$$q = \int_\gamma \rho(s)\, ds.$$

4. Per esprimere la lunghezza $\ell(\gamma)$ della curva:

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds, \tag{35}$$

e per tante altre applicazioni.

## DEFINIZIONE

Nel corso di Analisi II si definisce l'integrale di linea facendo riferimento ad una parametrizzazione della curva data, supponendo che la curva sia regolare.

Indichiamo con $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare della curva data.

Consideriamo una funzione scalare $f\colon \gamma \to \mathbb{R}$ avente per dominio il sostegno $\gamma$ della curva.

Supponiamo che la funzione composta $f(\boldsymbol{r}(t))$ sia continua, il che garantisce che la seguente definizione è ben posta.

L'integrale di $f$ lungo $\gamma$ si denota con il simbolo

$$\int_\gamma f\, ds$$

e si definisce come segue:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\, \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt. \tag{36}$$

L'integrale al secondo membro è l'integrale del prodotto $f(\boldsymbol{r}(t))$ $\|\boldsymbol{r}'(t)\|$, che è continuo sull'intervallo $[a,b]$ per le ipotesi di regolarità fatte sulla funzione $f$ e sulla parametrizzazione $\boldsymbol{r}(t)$.

Dunque all'integrale al secondo membro si applica la definizione dell'integrale di Riemann.

Si noti che il valore numerico dell'integrale di linea di prima specie non dipende dal verso di percorrenza della curva.

## Approssimazione dell'integrale

La definizione dell'integrale di Riemann implica che l'integrale di linea si può approssimare con somme opportune, come segue.

Fissato un intero positivo $n$, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $n$ parti mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

In ciascuno degli intervalli $I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, \ldots, n$, prendiamo un punto a piacere $\xi_k$ e costruiamo la somma di Cauchy-Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(\xi_k)) \, \|\boldsymbol{r}'(\xi_k)\| \, (t_k - t_{k-1}).$$

L'integrale di linea

$$\int_\gamma f \, ds$$

si può approssimare bene quanto si vuole con la somma $S_n$ prendendo piccola la norma della suddivisione, cioè il valore

$$\delta = \max_{k=1,\ldots,n} (t_k - t_{k-1}).$$

Infatti l'integrale è il limite

$$\int_\gamma f \, ds = \lim_{\delta \to 0} S_n,$$

e tale limite non dipende né da come sono presi i punti di suddivisione $t_k$, né da come sono presi i punti $\xi_k$ nei corrispondenti intervalli.

## Il caso del segmento

Fissato un punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ nello spazio, esaminiamo la curva $\boldsymbol{r}(t) = Pt$, $t \in [0, 1]$, il cui sostegno è il segmento $OP$.

Con la notazione $Pt$ si intende il punto di coordinate $(x_P\, t,\ y_P\, t,\ z_P\, t)$. La velocità della curva è dunque

$$\boldsymbol{r}'(t) = P,$$

e l'integrale di una funzione continua $f$ lungo il segmento $\gamma$ è

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^1 f(Pt) \, \|P\| \, dt.$$

In particolare, se $f$ è la costante 1, si ha

$$\int_\gamma ds = \int_0^1 \|P\| \, dt = \|P\|.$$

Si noti che il modulo $\|P\|$ è la lunghezza $\ell(\gamma)$ del segmento $OP$, dunque si verifica la formula (35) di pag. A72.

Alla stessa conclusione si perviene quando $\gamma$ è un qualunque segmento dello spazio, o anche una linea spezzata.

## Curve rettificabili

Discutiamo una definizione della lunghezza di una curva applicabile a curve continue, anche non regolari.

Una curva continua $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ si dice RETTIFICABILE se il seguente estremo superiore, che esiste per la completezza dell'insieme $\mathbb{R}$, ha un valore finito:

$$\sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})\|. \tag{37}$$

Qui il simbolo $\Delta$ denota la suddivisione, o decomposizione, dell'intervallo $[a,b]$ in $n$ parti mediante i punti $t_k$ come alla pagina precedente.

La sommatoria nella (37) rappresenta la lunghezza della spezzata che congiunge i punti $\boldsymbol{r}(t_k)$.

Si chiama LUNGHEZZA di una curva rettificabile l'estremo superiore indicato nella formula (37).

Si dimostra che se la curva considerata è anche regolare, allora è rettificabile e la sua lunghezza è data dalla (35).

---

## Lunghezza del grafico di una funzione

Il grafico di una funzione $y = y(x)$ di classe $C^1([a,b])$ è la curva regolare $\gamma$ le cui equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b],$$

e la cui velocità è $(1, y'(t))$. La sua lunghezza è pertanto

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Tale formula si ottiene svolgendo l'integrale (35) con la definizione (36), e la si può ricordare esprimendo audacemente l'elemento d'arco $ds$ tramite il teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{1 + (y')^2}\, |dx|. \end{aligned}$$

---

## Ascissa curvilinea

La lettera $s$ si usa per denotare un parametro particolare, detto "ascissa curvilinea".

Per definire l'ascissa curvilinea su di una data curva $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, possiamo procedere come segue.

Innanzitutto, occorre che la curva considerata sia rettificabile.

Dopodiché, ad ogni valore del parametro $t \in [a,b]$ si fa corrispondere il punto $\boldsymbol{r}(t)$ della curva, e a tale punto si associa come valore di $s$ la lunghezza dell'arco avente per estremi i punti $\boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t)$.

Se la curva considerata è regolare, allora, rispetto al parametro $s$, il vettore velocità ha modulo 1 in tutti i punti.

## CAMPI VETTORIALI, INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE, CAMPI CONSERVATIVI

Le funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, o da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, già introdotte a pag. A57, si possono utilizzare per rappresentare dei CAMPI VETTORIALI.

Esempio 1. Secondo la legge della gravitazione universale di Newton, una massa puntiforme $M$ collocata nell'origine genera un campo gravitazionale dato da

$$-G\frac{M}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\boldsymbol{r} \tag{38}$$

dove $G$ è la costante di gravitazione universale.

Il campo gravitazionale è dunque, in questo caso, una funzione che al vettore di posizione $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$ fa corrispondere la forza (38) agente sull'unità di massa collocata in tale punto.

Esempio 2. Secondo la legge di Coulomb, una carica elettrica puntiforme $q$ collocata nell'origine genera un campo elettrico dato da

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{\|\boldsymbol{r}\|^3}\boldsymbol{r} \tag{39}$$

dove $\varepsilon_0$ è la costante dielettrica.

Il campo elettrico è dunque, in questo caso, una funzione che al vettore di posizione $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$ fa corrispondere la forza (39) agente sull'unità di carica collocata in tale punto.

Esempio 3. Secondo la legge di Biot-Savart, una corrente elettrica di intensità $i$ che percorre l'asse $z$, nello stesso verso, determina un campo magnetico dato da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(x,y,z) &= \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{x^2+y^2}\,(-y,x,0)\end{aligned} \tag{40}$$

dove $\mu_0$ è la permeabilità magnetica.

Il campo magnetico è dunque, in questo caso, una funzione che al punto $(x,y,z)$, non appartenente all'asse $z$, fa corrispondere il vettore $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ dato dalla (40).

Esempio 4. Data una funzione scalare $f(x,y,z)$, di classe $C^1$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, il gradiente $\nabla f(x,y,z)$ è un campo vettoriale.

---

## LINEE DI CAMPO

Le linee che, in ogni loro punto, risultano tangenti al vettore di un campo dato, si dicono linee di campo.

Le linee di campo del gradiente $\nabla f$ di una funzione scalare $f(x,y,z)$ si dicono linee di massima pendenza.

Le linee di massima pendenza sono perpendicolari alle superfici di livello della funzione $f$: vedere a pag. A38.

## L'INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE

ovvero

## L'INTEGRALE DI UN CAMPO VETTORIALE LUNGO UNA LINEA ORIENTATA

## DEFINIZIONE

Consideriamo un campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ definito per $(x,y,z) \in \Omega$, essendo $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^3$, e supponiamo che $\boldsymbol{F} \in C^0(\Omega)$.

Consideriamo, inoltre, una curva regolare $\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to \Omega$ il cui sostegno $\gamma$ sia contenuto in $\Omega$. Si pone, allora,

$$\int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt.$$

Osservazione: il valore numerico dell'integrale di linea di seconda specie DIPENDE DAL VERSO DI PERCORRENZA della curva $\gamma$.

Il verso di percorrenza della curva dipende dalla parametrizzazione, cioè dalla particolare funzione $\boldsymbol{r}(t)$ avente per sostegno $\gamma$.

Invertendo il verso di percorrenza, l'integrale di linea di seconda specie cambia segno.

La dipendenza dell'integrale dal verso di percorrenza della curva si indica denotando il dominio di integrazione con $+\gamma$, e si scrive

$$\int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{-\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

## MOTIVAZIONI

Se il campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ rappresenta una forza, l'integrale

$$L = \int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

definisce il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ lungo la curva $\gamma$, percorsa nel verso specificato dalla parametrizzazione.

Ad esempio, fissiamo nello spazio un punto $\boldsymbol{r}_0 \neq \boldsymbol{0}$, e consideriamo la semiretta $\gamma$ uscente da $\boldsymbol{r}_0$, allineata con l'origine ma non contenente quest'ultima, parametrizzata da $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{r}_0$, $t \in [1,+\infty)$.

Sia, inoltre, $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ il campo dato dalla (38). Allora l'integrale

$$U(\boldsymbol{r}_0) = \int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -G\,\frac{M}{\|\boldsymbol{r}_0\|}$$

esprime l'energia potenziale gravitazionale nel punto $\boldsymbol{r}_0$.

In generale, se il campo $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ è il gradiente di una funzione scalare $f(x,y,z)$, e se la curva $\gamma$ è parametrizzata da una funzione $\boldsymbol{r}(t)$ avente per dominio un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora si ha

$$\int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(b)) - f(\boldsymbol{r}(a)). \quad (41)$$

Ciò costituisce un'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

La dimostrazione della (41) si trova alla pagina seguente.

## CAMPI CONSERVATIVI

Un campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, di classe $C^0$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si dice CONSERVATIVO se per ogni coppia di curve orientate $\gamma_1$ e $\gamma_2$, uscenti da un medesimo punto $P$ ed aventi uno stesso secondo estremo $Q$, risulta

$$\int_{+\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{+\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

dunque l'integrale dipende solo dagli estremi $P$ e $Q$, e non dalla curva che li congiunge.

Vi sono due importanti condizioni necessarie e sufficienti affinché un dato campo sia conservativo.

## CONDIZIONE N. 1

Un campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ è conservativo se e solo se l'integrale

$$\int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

è nullo ogniqualvolta $\gamma$ è una linea chiusa contenuta in $\Omega$.

L'integrale di linea di seconda specie esteso ad una curva chiusa si chiama CIRCUITAZIONE, e si indica con il simbolo

$$\oint_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Dunque il campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ è conservativo quando risulta

$$\oint_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

per ogni curva chiusa $\gamma$.

## CONDIZIONE N. 2

Un campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ è conservativo se e solo se esiste un'opportuna funzione scalare $f \in C^1(\Omega)$, detta "potenziale", tale che

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z). \qquad (42)$$

Che quest'ultima condizione sia sufficiente lo si deduce dalla (41).

Poiché disponiamo di tre caratterizzazioni equivalenti dei campi conservativi, è legittimo adottare, per ragioni stilistiche, una qualunque delle tre come definizione. Ad esempio, il libro di testo utilizza la condizione n. 2.

---

## DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA (41)

Per dimostrare la formula (41) di pagina A76 basta definire $g(t) = f(\boldsymbol{r}(t))$, $t \in [a, b]$. Per la regola di derivazione della funzione composta (v. pag. A50), si ha

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$$

Integrando ambo i membri sull'intervallo $[a, b]$, e per il teorema fondamentale, si ha

$$g(b) - g(a) = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt.$$

Per la definizione della funzione $g$, e per la definizione dell'integrale di linea di seconda specie, si ottiene la (41).

## COME TROVARE IL POTENZIALE DI UN CAMPO DATO

Verifichiamo che se un dato campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ è conservativo, allora la condizione n. 2 indicata alla pagina precedente è soddisfatta.

In altri termini, verifichiamo che la suddetta condizione è necessaria affinché il campo dato sia conservativo.

Il seguente procedimento consente infatti di definire un potenziale $f(x, y, z)$ a partire dal campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, sotto l'ipotesi che si tratti di un campo conservativo.

Per semplicità, ci concentriamo sul caso in cui l'aperto $\Omega$, dominio del campo, è connesso (v. pag. A45).

Per definire la funzione scalare $f(x, y, z)$, fissiamo un punto $\boldsymbol{r}_0 \in \Omega$. Per ogni $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in \Omega$, prendiamo una curva regolare a tratti $\gamma$ uscente da $\boldsymbol{r}_0$ e avente secondo estremo in $\boldsymbol{r}$. Curve del genere esistono perché $\Omega$ è connesso. Poniamo

$$f(x, y, z) = \int_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{43}$$

Questa definizione è corretta grazie al fatto che, per ipotesi, l'integrale al secondo membro dipende solo da $\boldsymbol{r}_0$ ed $\boldsymbol{r}$.

Dobbiamo vedere se la funzione $f(x, y, z)$ così definita soddisfa la (42). Iniziamo con il calcolo della derivata parziale $\partial f / \partial x$.

Se indichiamo con $s$ il segmento orientato che dal punto $(x, y, z)$ va al punto $(x+h,\, y, z)$, parametrizzato da $\boldsymbol{r}(t) = (x, y, z) + t \operatorname{sgn}(h)\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$, $t \in [0, |h|\,]$, possiamo scrivere

$$f(x+h,\, y, z) = \int_{+\gamma+s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{44}$$

dove la curva somma $+\gamma+s$ si ottiene percorrendo le due curve $+\gamma$ e $+s$ una dopo l'altra.
Sottraendo la (43) dalla (44) troviamo

$$f(x+h,\, y, z) - f(x, y, z) = \int_{+s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

L'integrale al secondo membro, per definizione, vale

$$\int_{+s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{|h|} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot (\operatorname{sgn}(h)\, \hat{\boldsymbol{\imath}})\, dt$$

perciò

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\, y, z) - f(x, y, z)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{1}{h} \int_0^{|h|} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot (\operatorname{sgn}(h)\, \hat{\boldsymbol{\imath}})\, dt \right)$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, il limite al secondo membro vale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(0)) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Dunque $\partial f / \partial x = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}$, e con un procedimento analogo si verifica che $\partial f / \partial y = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\partial f / \partial z = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$.

Essendo il campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ continuo per ipotesi, ne segue che la funzione $f(x, y, z)$ data dalla (43) è di classe $C^1$ e soddisfa la (42), come volevasi dimostrare.

# Superfici nello spazio

## RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE SUPERFICI

Le funzioni da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^k$, esaminate a pag. A57, ed utilizzate per esprimere i cambiamenti di variabile (*ibidem*) e per rappresentare le curve nello spazio (pag. A28) e i campi vettoriali (A75), si possono usare per la rappresentazione delle superfici.

Per fare un esempio, consideriamo le formule di passaggio da coordinate sferiche a coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta, \\ y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta, \\ z = r \cos\phi. \end{cases} \tag{45}$$

Se teniamo fisso $r$ e facciamo variare $\phi \in [0,\pi]$ e $\vartheta \in [0,2\pi)$, il corrispondente punto $\boldsymbol{r}(\phi,\vartheta)$, le cui coordinate $(x,y,z)$ sono date dalle (45), descrive la sfera centrata nell'origine e di raggio $r$.

## MOTIVAZIONE

Il vantaggio della rappresentazione parametrica sta nella possibilità di rappresentare tutta la sfera, mentre le funzioni

$$z(x,y) = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

hanno per grafico due semisfere.

Si vedano tuttavia le precisazioni a pag. A83.

In generale, una funzione $\boldsymbol{r}(u,v)$ avente per dominio un aperto di $\mathbb{R}^2$ e per codominio lo spazio $\mathbb{R}^3$, si può interpretare come la rappresentazione parametrica di una superficie.

Per quanto riguarda la regolarità della superficie, e la determinazione del piano tangente, si vedano le precisazioni alla pagina successiva e a pag. A83.

---

## IL PIANO

Fissiamo un punto $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ nello spazio, e consideriamo una coppia di vettori $\boldsymbol{r}_u = (a_1, b_1, c_1)$ ed $\boldsymbol{r}_v = (a_2, b_2, c_2)$, diversi dal vettore nullo e non allineati, cioè tali che $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$.

Il piano passante per $\boldsymbol{r}_0$ e parallelo ad $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ ha la rappresentazione parametrica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\,\boldsymbol{r}_u + v\,\boldsymbol{r}_v$, $u, v \in \mathbb{R}$, e cioè

$$\begin{cases} x = x_0 + u\,a_1 + v\,a_2, \\ y = y_0 + u\,b_1 + v\,b_2, \\ z = z_0 + u\,c_1 + v\,c_2. \end{cases} \tag{46}$$

Un vettore $\boldsymbol{n}$ perpendicolare a tale piano può, all'occorrenza, essere ricavato da $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$.

La rappresentazione parametrica dei piani va a completare la rappresentazione cartesiana esplicita considerata a pag. A36.

## LINEE COORDINATE

Data la rappresentazione parametrica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ di una superficie, fissando uno dei due parametri e facendo variare solo l'altro si ottengono le cosiddette "linee coordinate".

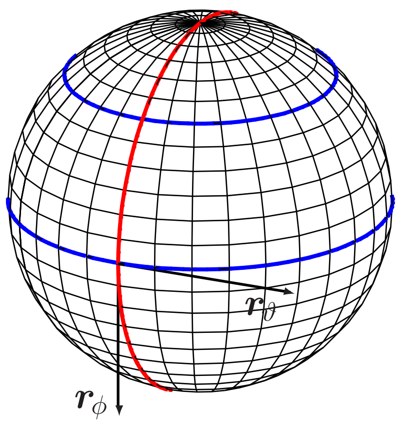
Consideriamo, ad esempio, la rappresentazione parametrica della sfera di raggio $r$ centrata nell'origine:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \vartheta, \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \vartheta, \\ z = r \cos \phi. \end{cases} \tag{47}$$

Fissando $\phi = \phi_0$ si ottengono le equazioni parametriche della circonferenza orizzontale, di raggio $r_0 = r \operatorname{sen} \phi_0$, centrata sull'asse $z$ e giacente nel piano $z = r \cos \phi_0$.

Ponendo, invece, $\vartheta = \vartheta_0$ si ottengono le equazioni parametriche della circonferenza di intersezione tra la suddetta sfera ed il piano verticale la cui equazione cartesiana è

$$x \operatorname{sen} \vartheta_0 - y \cos \vartheta_0 = 0.$$




## PIANO TANGENTE E REGOLARITÀ

Consideriamo una superficie rappresentata nella forma parametrica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, e fissiamo un punto $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ su di essa.

L'idea per determinare il piano tangente a tale superficie nel punto $\boldsymbol{r}_0$ è di partire dalle linee coordinate $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0)$ e $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v)$, prendere i loro vettori velocità $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$, infine costruire il piano parallelo ad essi e passante per $\boldsymbol{r}_0$.

Affinché questa procedura possa avere successo qualunque sia il punto di tangenza, si richiede che la superficie sia "regolare" nel senso che:

- la funzione $\boldsymbol{r}(u, v)$ è di classe $C^1$ in un aperto $G \subset \mathbb{R}^2$;
- i vettori velocità

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) = \left( \frac{d}{du} \boldsymbol{r}(u, v_0) \right)_{u=u_0} \tag{48}$$

$$\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = \left( \frac{d}{dv} \boldsymbol{r}(u_0, v) \right)_{v=v_0} \tag{49}$$

soddisfano la condizione

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) \neq \boldsymbol{0}$$

per ogni $(u_0, v_0) \in G$. Sotto tali ipotesi, il piano tangente in un punto $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ esiste, ed ha la rappresentazione parametrica

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\, \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) + v\, \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0).$$

## AREA E INTEGRALE SUPERFICIALE

Vogliamo misurare l'estensione di una superficie rappresentata in forma parametrica. Consideriamo, per incominciare, superfici piane giacenti sul piano di equazioni parametriche (46).

L'applicazione affine $\boldsymbol{r} = \mathbf{T}(u, v)$ data dalle (46) trasforma un rettangolo $R$ del piano $uv$ in un parallelogramma $\mathbf{T}(R)$ nello spazio.

Inoltre, l'area $|\mathbf{T}(R)|$ del parallelogramma è legata all'area $|R|$ del rettangolo dalla relazione

$$|\mathbf{T}(R)| = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \; |R|$$

Infatti il modulo $\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|$ del prodotto vettoriale $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ esprime l'area del parallelogramma i cui quattro vertici sono: un qualunque punto $\boldsymbol{r}_0$, e i punti $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r}_v$.

Usando un procedimento di passaggio al limite, che riprende e sviluppa le idee di Archimede di Siracusa, si giunge alla conclusione che se $\Omega$ è un qualunque dominio regolare nel piano $uv$ allora l'area della figura piana $\mathbf{T}(\Omega)$ posta nello spazio è data da

$$\iint_\Omega \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \, du \, dv = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \; |\Omega|.$$

Consideriamo ora la rappresentazione parametrica $\boldsymbol{r} = \mathbf{T}(u, v)$, $(u, v) \in G$, di una superficie regolare non necessariamente piana.

Si definisce area della figura $\Sigma = \mathbf{T}(\Omega)$, immagine di un dominio regolare $\Omega \subset G$, come il valore del seguente integrale doppio:

$$\iint_\Omega \|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

dove i vettori $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ ed $\boldsymbol{r}_v(u, v)$, detti "campi coordinati", sono dati dalle (48)-(49).

Si definisce, infine, l'integrale superficiale di una funzione continua $f(x, y, z)$, avente per dominio la figura $\Sigma = \mathbf{T}(\Omega)$, ponendo

$$\iint_\Sigma f \, dS =$$

$$\iint_\Omega f(\mathbf{T}(u, v)) \, \|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

Con questa notazione, l'area di $\Sigma$ si può anche rappresentare come

$$|\Sigma| = \iint_\Sigma dS.$$

Se $\Sigma$ è il grafico di una funzione $z = g(x, y)$, $g \in C^1(\Omega)$, la si può rappresentare in forma parametrica ponendo $x = u$, $y = v$, $z = g(u, v)$.

In tal caso risulta $\boldsymbol{r}_x = (1, 0, g_x)$ e $\boldsymbol{r}_y = (0, 1, g_y)$. Dunque $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = -g_x \, \hat{\boldsymbol{\imath}} - g_y \, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$, e l'area di $\Sigma$ è data da

$$|\Sigma| = \iint_\Omega \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2} \, dx \, dy.$$

## PRECISAZIONI – VARIETÀ DIFFERENZIABILI

La rappresentazione parametrica (47) consente sì di rappresentare tutta la sfera, ma non è regolare nei due punti $\phi = 0$ e $\phi = \pi$.

Infatti il campo coordinato

$$\boldsymbol{r}_\vartheta(\vartheta, \phi) = \\ = (-r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\vartheta,\ r \operatorname{sen}\phi \cos\vartheta,\ 0)$$

è nullo nei due punti suddetti.

Per rappresentare tutta la sfera occorre combinare fra loro almeno due rappresentazioni parametriche regolari, che vengono dette "carte locali".

Quando, al posto della sfera, si considerano superfici più complicate, ed eventualmente superfici di dimensione $d > 2$ immerse nello spazio $\mathbb{R}^N$, $N > 3$, si combinano fra loro più carte e si parla di "varietà differenziabili".

Le varietà differenziabili di dimensione $d > 2$ si presentano naturalmente in meccanica quando si considerano sistemi meccanici con $d$ gradi di libertà, le cui configurazioni sono individuate da $d$ numeri reali, detti "coordinate lagrangiane".

# Flusso, divergenza e rotore

## SUPERFICI ORIENTABILI

Sappiamo che un vettore normale ad una superficie regolare $\Sigma$ si può ottenere calcolando il prodotto vettoriale $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ dei campi coordinati (pagine A80, A81).

Per l'antisimmetria del prodotto vettoriale, se si scambiano fra loro i parametri $u$ e $v$ si ottiene ancora un vettore normale ma di verso opposto al precedente.

Sappiamo anche che, se si richiede la regolarità della rappresentazione, allora anche superfici semplici come la sfera richiedono l'utilizzo di due o più carte locali $\boldsymbol{r}_1(u_1, v_1), \boldsymbol{r}_2(u_2, v_2), \ldots$ (pag. A83).

Scambiando fra loro le variabili $u_k, v_k$ per qualche valore di $k$ è possibile, di solito, accordare fra loro le orientazioni dei vettori normali dati dalle diverse carte.

Così facendo, si ottiene un campo vettoriale $\boldsymbol{n}$ avente per dominio tutta la superficie $\Sigma$, di classe $C^0(\Sigma)$, e perpendicolare ad essa in ogni punto (e non nullo).

Questo è possibile, ad esempio, nel caso della sfera.

Tuttavia vi sono superfici, come il nastro di Möbius, dove non esiste un campo continuo di vettori normali non nulli: esse si dicono "superfici non orientabili".

## FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Consideriamo una superficie regolare orientabile $\Sigma$. Per definizione, esiste un campo vettoriale $\boldsymbol{n} \in C^0(\Sigma)$ perpendicolare ad essa e diverso dal vettore nullo in ogni punto.

Poiché $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, possiamo, se necessario, dividere il vettore $\boldsymbol{n}$ per il modulo $\|\boldsymbol{n}\|$ e ottenere ancora un campo continuo di vettori normali, questa volta di modulo 1.

Per semplificare la notazione, supporremo che $\|\boldsymbol{n}\| \equiv 1$ fin dall'inizio.

Sotto tali ipotesi, si definisce flusso di un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$, di classe $C^0(\Sigma)$, attraverso la superficie orientata $\Sigma$ il seguente integrale superficiale:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS. \tag{50}$$

È legittimo utilizzare $-\boldsymbol{n}$ al posto di $\boldsymbol{n}$ come vettore normale, ma in tal caso il valore dell'integrale cambia segno.

Se la superficie regolare $\Sigma$ è, a sua volta, frontiera di un dominio regolare $\Omega$, come ad esempio accade per la sfera $\Sigma = \partial B_r(0,0,0)$, allora essa è orientabile.

In tal caso, se il campo $\boldsymbol{n}$ è orientato nel verso uscente da $\Omega$, come ad esempio $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|$ nel caso della sfera, allora il flusso definito dalla (50) si dice "flusso uscente" dalla superficie.

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Il flusso di un campo vettoriale interviene nell'enunciato di due importanti conseguenze del teorema fondamentale del calcolo integrale: il teorema della divergenza, e il teorema di Stokes o teorema del rotore.

Si definisce divergenza di un campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, di classe $C^1$ in un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$, lo scalare

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

dove $X$, $Y$, $Z$ sono le componenti di $\boldsymbol{F}$. La divergenza si può anche indicare con il simbolo $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$.

Il teorema della divergenza asserisce che se $\Omega$ è un dominio regolare (v. pag. seg.) incluso nell'aperto $A$, allora, indicata con $\Sigma$ la sua frontiera, e con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a $\Sigma$ e uscente da $\Omega$, si ha

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

cioè l'integrale triplo della divergenza di $\boldsymbol{F}$, esteso al dominio $\Omega$, è uguale al flusso del campo $\boldsymbol{F}$ uscente da $\Sigma$.

## IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA NEL PIANO

Se $A$ è un aperto in $\mathbb{R}^2$, un campo vettoriale piano $\boldsymbol{F}\colon A \to \mathbb{R}^2$ si può estendere all'aperto tridimensionale $A \times \mathbb{R}$ considerando il campo $(x, y, z) \mapsto (\boldsymbol{F}(x, y), 0)$.

Applicando al campo così ottenuto il teorema enunciato a lato si ottiene il teorema della divergenza nel piano:

se $\Omega$ è un dominio regolare (v. pag. seg.) incluso nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, allora, indicata con $\gamma$ la sua frontiera, e con $\boldsymbol{n}$ il versore normale a $\gamma$ e uscente da $\Omega$, si ha

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{51}$$

cioè l'integrale doppio della divergenza di $\boldsymbol{F}$, esteso al dominio $\Omega$, è uguale al flusso del campo $\boldsymbol{F}$ uscente da $\gamma$. Si intende che la divergenza del campo piano $\boldsymbol{F}$ è data da

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

dove $X$ e $Y$ sono le componenti di $\boldsymbol{F}$.

Il secondo membro della (51) si può intendere come l'integrale di linea di prima specie (pagina A72) della funzione $f = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$.

## DOMINI REGOLARI

Per la validità del teorema della divergenza (alla pagina precedente) è sufficiente che:

1) il dominio di integrazione $\Omega$ sia semplice rispetto a tutti e tre gli assi coordinati, cioè risulti

$$\begin{aligned}\Omega &= \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D_1, \\ &\qquad g_1(x,y) \le z \le h_1(x,y) \} \\ &= \{ (x,y,z) \mid (y,z) \in D_2, \\ &\qquad g_2(y,z) \le x \le h_2(y,z) \} \\ &= \{ (x,y,z) \mid (z,x) \in D_3, \\ &\qquad g_3(z,x) \le y \le h_3(z,x) \},\end{aligned}$$

dove per ogni $k = 1,2,3$ il dominio $D_k$ è semplicemente decomponibile (v. pag. A67) e le funzioni $g_k, h_k$ sono continue in $D_k$ e differenziabili nei punti interni di $D_k$;

2) il grafico $\Sigma$ di $h_1$ sia incluso in una superficie regolare (pagina A81) con normale $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n_z \ge 0$, e per ogni funzione $f$ continua su $\Sigma$ risulti

$$\int_\Sigma f\, n_z\, dS = \iint_{D_1} f(x,y,h_1(x,y))\, dx\, dy$$

così come accade, ad esempio, se $h_1 \in C^1(D_1)$. Una proprietà simile si richiede per $g_1$ e per $g_k, h_k$, $k = 2,3$.

Ai fini del teorema della divergenza nel piano è sufficiente che il dominio bidimensionale $\Omega$ sia semplicemente decomponibile (pagina A67) e la sua frontiera sia una curva regolare a tratti.

## CALCOLO DI AREE COL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Poiché il campo piano $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ ha la proprietà che $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 2$, l'area di $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si può esprimere tramite il teorema della divergenza nel piano:

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_\gamma \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, ds. \tag{52}$$

Ora svolgiamo l'integrale al secondo membro utilizzando una rappresentazione parametrica regolare della curva $\gamma$:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b].$$

Posto $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, il vettore velocità è dato da

$$\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t)),\ y'(t)).$$

Se la curva $\gamma$ è percorsa in senso antiorario, il versore normale uscente è

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{(y'(t),\ -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \tag{53}$$

Applicando la definizione dell'integrale di linea di prima specie (pagina A72), la formula (52) diventa

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\, y'(t) - y(x)\, x'(t))\ dt.$$

Integrando per parti, e siccome $x(a) = x(b)$ e $y(a) = y(b)$, si vede che

$$\int_a^b x(t)\, y'(t)\, dt = \int_a^b -y(x)\, x'(t)\, dt$$

dunque si può anche scrivere

$$|\Omega| = \int_a^b x(t)\, y'(t)\, dt = \int_a^b -y(x)\, x'(t)\, dt.$$

## Dimostrazione del teorema della divergenza nel piano – Formule di Gauss-Green

Consideriamo un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ semplice rispetto ad entrambi gli assi: supponiamo cioè $\Omega =$

$$= \{ (x, y) \mid x \in [a, b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

$$= \{ (x, y) \mid y \in [c, d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \}$$

con $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$, e $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$. Gli integrali doppi

$$\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy, \quad \iint_\Omega \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy$$

si possono esprimere con le formule di riduzione. Usando anche il teorema fondamentale del calcolo integrale, si trova:

$$\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d (X(h_2(y), y) - X(h_1(y), y))\, dy \quad (54)$$

e

$$\iint_\Omega \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b (Y(x, g_2(x)) - Y(x, g_1(x)))\, dx. \quad (55)$$

Per sommare i secondi membri fra di loro supponiamo per semplicità che $h_1(c) = h_2(c)$, $h_1(d) = h_2(d)$, e che la frontiera di $\Omega$ sia una curva $\gamma$ regolare (ma il ragionamento si può estendere alle curve regolari a tratti).

Indichiamo con $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ una parametrizzazione regolare di $\gamma$, orientata in senso antiorario, e con $\boldsymbol{n}(t) = (n_x(t), n_y(t))$ il versore normale uscente (53).

Dunque avremo: $n_x(t) = y'(t)$, e $n_y(t) = -x'(t)$.

Possiamo anche fare in modo che il punto $\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}(t_1)$ abbia coordinate $(h_1(c), c) = (h_2(c), c)$.

Esiste, inoltre, $t^* \in (t_0, t_1)$ tale che $\boldsymbol{r}(t^*) = (h_1(d), d) = (h_2(d), d)$.

Con il cambiamento di variabile $y = y(t)$, che è legittimo perché la funzione $y(t)$ è di classe $C^1([t_0, t^*])$, si ottiene

$$\int_c^d X(h_2(y), y)\, dy = \int_{t_0}^{t^*} X(h_2(y(t)), y(t))\, y'(t)\, dt.$$

Ma essendo $y(t)$ di classe $C^1([t^*, t_1])$ si ha anche

$$-\int_c^d X(h_1(y), y)\, dy = \int_d^c X(h_1(y), y)\, dy = \int_{t^*}^{t_1} X(h_1(y(t)), y(t))\, y'(t)\, dt,$$

dunque la (54) diventa

$$\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy = \int_\gamma X\, n_x\, ds. \quad (56)$$

Con un procedimento analogo si verifica che

$$\iint_\Omega \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy = \int_\gamma Y\, n_y\, ds. \quad (57)$$

Le uguaglianze (56)-(57) si dicono “formule di Gauss-Green nel piano”: sommandole fra loro, e ponendo $\boldsymbol{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$, si ottiene la (51).

## TEOREMA DI STOKES, O TEOREMA DEL ROTORE

Oltre al teorema della divergenza, considerato nelle pagine precedenti, un'importante conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale è il teorema di Stokes, o teorema del rotore:

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{58}$$

Qui $\Sigma$ denota una superficie regolare e orientabile, avente per bordo una curva regolare $\gamma$; $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a $\Sigma$ che ne determina l'orientazione; $\boldsymbol{F} = (X, Y, Z)$ è un campo vettoriale di classe $C^1$ in un aperto $A \supset \Sigma$, e $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ il campo vettoriale dato da

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \hat{\boldsymbol{k}}$$

Il rotore $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ si può anche indicare con i simboli $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ e $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Si intende che l'orientazione della superficie $\Sigma$ e quella della curva $\gamma$ sono accordate tra loro in modo tale che se il pollice della mano destra è disposto come $\boldsymbol{n}$, allora le altre dita indicano il verso di $\gamma$.

Altrimenti gli integrali nella (58) sono uguali in modulo ed hanno segno opposto.

## IL TEOREMA DI STOKES PER UNA SUPERFICIE PIANA

Se la superficie considerata, che denotiamo con $\Sigma$, è piana, conviene disporre gli assi $x$ e $y$ sullo stesso piano di $\Sigma$, e prendere $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$ come versore normale.

Così facendo, si ottengono varie semplificazioni:

- la parametrizzazione della superficie $\Sigma$ è la seguente:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases} \qquad (u, v) \in \Sigma;$$

- la parametrizzazione della frontiera $\gamma$ è del tipo

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), 0), \qquad t \in [t_0, t_1];$$

- il prodotto scalare $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ si riduce a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Pertanto la tesi del teorema di Stokes (58) si può scrivere come segue:

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \tag{59}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(X(\boldsymbol{r}(t))\, x'(t) + Y(\boldsymbol{r}(t))\, y'(t)\right) dt.$$

## DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI STOKES PER UNA SUPERFICIE PIANA

La (59) si può ricavare facilmente dalle formule di Gauss-Green (56)-(57).

Osserviamo, innanzitutto, che in tali formule le lettere $X$ ed $Y$ denotano due qualunque funzioni regolari.

Per il presente scopo, conviene scrivere $X$ al posto di $Y$, e viceversa. Si ha, dunque:

$$\iint_\Omega \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma Y\,n_x\,ds,$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma X\,n_y\,ds.$$

Sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, e ricordando che $n_x$ e $n_y$ sono le componenti del versore $\boldsymbol{n}$ (53), si ottiene la (59).

## CHE COSA RAPPRESENTA IL ROTORE

Utilizzando il teorema di Stokes, possiamo dare la seguente interpretazione del rotore di un campo vettoriale $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Scegliamo un punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e fissiamo un versore $\boldsymbol{n}$. Per ogni $r \in (0, +\infty)$, indichiamo con $\Sigma_r$ il disco di raggio $r$ centrato in $(x, y, z)$ e perpendicolare al versore $\boldsymbol{n}$.

Dividendo ambo i membri della (58) per l'area $|\Sigma_r| = \pi r^2$ del disco $\Sigma_r$, e facendo tendere $r$ a zero, si trova

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(P)\cdot\boldsymbol{n} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|\Sigma_r|}\oint_{+\gamma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \quad (60)$$

Questa uguaglianza si può leggere, in parole povere, come segue.

- La circuitazione di $\boldsymbol{F}$ intorno ad un dischetto dipende dal versore $\boldsymbol{n}$, cioè dalla giacitura del dischetto stesso.

- La circuitazione di $\boldsymbol{F}$ intorno ad un dischetto si rende massima, a parità di raggio, quando la normale $\boldsymbol{n}$ al dischetto ha la direzione ed il verso di $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$.

- L'intensità di $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ è uguale alla circuitazione intorno all'unità di superficie, o meglio, è una specie di derivata, data dal secondo membro della (60) quando $\Sigma_r$ è perpendicolare a $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$, e $\gamma$ è orientata secondo la regola della mano destra (pollice come $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$).

## CAMPI NOTEVOLI

### ESEMPI 1 E 2

Il campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^3$, già incontrato a pag. A75, ha componenti

$$X = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$Y = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$Z = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Applicando la definizione della divergenza vista a pagina A86, si trova $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

Applicando la definizione del rotore vista a pagina A89, si trova $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.

Infine, poiché risulta $\boldsymbol{F} = \nabla f$ con $f(x,y,z) = -1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, il campo $\boldsymbol{F}$ è conservativo e la suddetta funzione $f(x,y,z)$ è un potenziale di tale campo.

### ESEMPIO 3

Il campo $\boldsymbol{B}$ dato dalla (40) di pag. A75 ha componenti

$$X = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{-iy}{x^2+y^2}$$
$$Y = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{ix}{x^2+y^2}$$
$$Z = 0.$$

Applicando la definizione della divergenza vista a pagina A86, si trova $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$.

Applicando la definizione del rotore vista a pagina A89, si trova $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

### ESEMPIO 4

Le componenti $X = 1$ e $Y = Z = 0$ del campo $\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{\imath}}$ sono costanti, dunque hanno le derivate nulle.

Di conseguenza, applicando la definizione della divergenza vista a pagina A86, si trova $\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\imath}} = 0$.

Similmente, applicando la definizione del rotore vista a pagina A89, si trova $\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\imath}} = \mathbf{0}$.

Per la stessa ragione risulta: $\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\jmath}} = 0$, $\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{k}} = 0$ e $\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$.

### ESEMPIO 5

Le componenti del campo $\boldsymbol{A}$ dato da

$$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{k}} \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sono $X = Y = 0$ e

$$Z = \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Applicando la definizione della divergenza vista a pagina A86, si trova $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$.

Applicando la definizione del rotore vista a pagina A89, si trova

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{-y\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{x^2+y^2}.$$

Dunque il campo

$$\frac{\mu_0\, i}{2\pi}\,\boldsymbol{A}$$

è un potenziale vettore per il campo $\boldsymbol{B}$ dell'esempio 3 (la definizione si trova a pag. A94).

## CAMPI CONSERVATIVI: CONDIZIONE NECESSARIA

Grazie al teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione, possiamo esprimere mediante il rotore una condizione necessaria affinché un dato campo vettoriale di classe $C^1$ sia conservativo.

Sappiamo, infatti, che se $\boldsymbol{F}$ è un campo conservativo, allora esiste un'opportuna funzione scalare $f$ tale che $\boldsymbol{F} = \nabla f$ (è la condizione n. 2 di pag. A77).

Dunque le derivate prime delle componenti $X, Y, Z$ del campo $\boldsymbol{F}$ sono derivate seconde della funzione scalare $f$. Per il teorema di Schwarz, risulta

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}. \tag{61}$$

Questa è pertanto una condizione che i campi conservativi di classe $C^1$ devono necessariamente soddisfare.

Detto in altri termini, per ogni funzione scalare $f$ di classe $C^2$ risulta

$$\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}.$$

I campi che soddisfano la (61) si dicono IRROTAZIONALI. Se un campo $\boldsymbol{F}$, di classe $C^1$ in un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$, non soddisfa la (61) in qualche punto di $A$, non è conservativo.

Un'altra dimostrazione della (61), basata questa volta sul teorema di Stokes, è la seguente.

Consideriamo un campo conservativo $\boldsymbol{F}$, e supponiamo per assurdo che esista un punto $P = (x, y, z)$ dove

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(P) \neq \mathbf{0}.$$

Senza ledere la generalità, supponiamo che la terza componente $Z$ del campo $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ sia positiva in tale punto.

Indicato con $\Sigma_r$ il disco di raggio $r$ centrato in $(x, y, z)$ e perpendicolare al versore $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$, per la (60) si ha

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(P) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{62}$$

perché l'integrale al secondo membro della (60) è nullo per ogni $r$. D'altro canto, per ipotesi risulta

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(P) \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = Z(P) > 0$$

il che contraddice la (62). Dunque la (61) deve valere in ogni punto, come volevasi dimostrare.

Osserviamo, con l'occasione, che dal teorema di Schwarz segue anche che se $\boldsymbol{F}$ è un qualunque campo di classe $C^2$, conservativo o no, risulta

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0. \tag{63}$$

L'espressione di $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ si può trovare a pag. A97.

## CAMPI CONSERVATIVI: CONDIZIONE SUFFICIENTE

Se il dominio $A$ di un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ soddisfa una particolare condizione topologica, e cioè è semplicemente connesso, allora i campi irrotazionali sono anche conservativi.

Dunque la condizione (61), necessaria affinché un campo $\boldsymbol{F}$ di classe $C^1(A)$ sia conservativo, è anche sufficiente quando il dominio $A$ è semplicemente connesso.

## DOMINI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Un dominio connesso $A$ si dice "semplicemente connesso" se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto: cioè, in parole povere, se ogni curva chiusa può essere deformata fino a ridurla ad un punto, senza uscire da $A$.

## ESEMPIO 1

Facendo variare il raggio $r$ da 1 a 0, la circonferenza $\gamma_r = \partial B_r(0, 0) \subset \mathbb{R}^2$ si riduce ad un solo punto, l'origine, senza uscire dal piano.

## ESEMPIO 2

Data una qualunque curva piana $\gamma$, chiusa, parametrizzata da $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [a, b]$, definiamo la curva $\gamma_r$ tramite la parametrizzazione

$$\boldsymbol{r}_r(t) = r\,\boldsymbol{r}(t).$$

Facendo variare il parametro $r$ da 1 a 0, la curva $\gamma_r$, che coincide con la curva data $\gamma$ quando $r = 1$, si riduce ad un solo punto, l'origine, senza uscire dal piano. Dunque il piano è un insieme semplicemente connesso.

## ESEMPIO 3

Con lo stesso metodo dell'esempio 2 si dimostra che sono semplicemente connessi anche i rettangoli, i dischi e tutte le altre figure convesse.

In tre dimensioni, sono semplicemente connessi: lo spazio $\mathbb{R}^3$ tutto intero, i parallelepipedi, gli intorni sferici $B_r(x, y, z)$ e tutti gli altri solidi convessi.

## ESEMPIO 4

Il tipico esempio di dominio che non è semplicemente connesso è la corona circolare.

Anche l'aperto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (il piano bucato) non è semplicemente connesso: infatti la circonferenza $\gamma = \partial B_1(0, 0)$, che è inclusa in $A$, non può essere deformata fino a farla diventare un punto senza essere costretti ad uscire da $A$.

Si intende che si esce da $A$ quando si tocca l'origine.

In tre dimensioni, non è semplicemente connesso lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse $z$.

Tale insieme si può indicare con $A \times \mathbb{R}$, dove $A$ è il piano bucato. Il metodo per dimostrare l'asserto è lo stesso di prima.

## Perché i campi irrotazionali in un dominio semplicemente connesso sono conservativi

Ci limitiamo, per semplicità, a considerare un campo piano $\boldsymbol{F} \colon A \to \mathbb{R}^2$, dove $A$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso.

Supponiamo che il campo $(\boldsymbol{F}, 0) = (X, Y, 0)$ sia irrotazionale, cioè

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \tag{64}$$

Per dimostrare che $\boldsymbol{F}$ è conservativo, basta verificare che

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{65}$$

qualunque sia la curva chiusa $\gamma \subset A$. Intendiamo, cioè, usare la condizione n. 1 di pag. A77.

Essendo l'aperto $A$ semplicemente connesso, la superficie piana $\Sigma$ delimitata dalla curva $\gamma$ è anch'essa inclusa in $A$.

Ma allora possiamo applicare il teorema di Stokes, e scrivere

$$\iint_\Sigma \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{+\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

avendo orientato $\gamma$ in senso antiorario.

Sostituendo la (64) nella formula precedente, si giunge alla (65).

Dunque il campo $\boldsymbol{F}$ è conservativo, come volevasi dimostrare.

## Il potenziale vettore

Si dice potenziale vettore di un dato campo $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ un campo opportuno $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ avente la proprietà che $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$ in ogni punto del dominio di $\boldsymbol{F}$.

## Condizione necessaria

Vista la (63), condizione necessaria affinché un campo $\boldsymbol{F}$, di classe $C^1$, ammetta un potenziale vettore è che $\boldsymbol{F}$ sia un campo solenoidale, cioè tale che

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = 0 \tag{66}$$

in tutti i punti $(x, y, z)$ del dominio di $\boldsymbol{F}$. Tale condizione, da sola, non è sufficiente, come mostra il seguente controesempio.

## Controesempio

Mostriamo che il campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^3$, che è uno dei campi vettoriali più significativi, non ammette potenziale vettore benché sia solenoidale (v. pagg. A75 e A91).

Supponiamo per assurdo che il campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^3$ ammetta un potenziale vettore, che indicheremo con $\boldsymbol{A}(x, y, z)$. Allora la circuitazione

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

lungo la circonferenza $\gamma$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta, \\ y = \operatorname{sen} \vartheta, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \\ z = 0, \end{cases}$$

si può calcolare con il teorema di Stokes: indicata con $\Sigma^+$ la semisfera di equazioni

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\phi\,\cos\vartheta, \\ y = \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\vartheta, \\ z = \cos\phi, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \phi \in [0,\, \pi/2], \\ \vartheta \in [0,\, 2\pi], \end{matrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\ &= 2\pi, \end{aligned} \tag{67}$$

dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}$ e $\|\boldsymbol{r}\| = 1$. D'altro canto, indicata con $\Sigma^-$ la semisfera di equazioni

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta\,\operatorname{sen}\phi, \\ y = \operatorname{sen}\vartheta\,\operatorname{sen}\phi, \\ z = \cos\phi, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0,\, 2\pi], \\ \phi \in [\pi/2,\, \pi], \end{matrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\Sigma^-} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\ &= -2\pi, \end{aligned} \tag{68}$$

perché l'orientazione di $\Sigma^-$ è data dal vettore $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}$ in accordo con il verso di percorrenza di $\gamma$.

La contraddizione tra la (67) e la (68) prova che il campo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^3$ non ammette potenziale vettore, benché sia un campo solenoidale.

Dunque la condizione (66) non è sufficiente a garantire che un campo $\boldsymbol{F}$ abbia un potenziale vettore.

## Condizione sufficiente

La condizione (66) garantisce che il campo $\boldsymbol{F}$ ammette un potenziale vettore quando il dominio $\Omega$ del campo soddisfa una particolare proprietà topologica:

Se ogni superficie chiusa $\Sigma \subset \Omega$ è contrattile, cioè delimita un solido incluso in $\Omega$, allora i campi solenoidali $\boldsymbol{F}$ aventi per dominio $\Omega$ ammettono potenziale vettore.

Nel testo di C. D. Pagani e S. Salsa "Analisi matematica", vol. 2, edito dalla Zanichelli, i domini $\Omega$ aventi la suddetta proprietà sono detti fortemente connessi.

La dimostrazione dell'esistenza di un potenziale vettore si basa sul lemma di Poincaré, che si può trovare anche nel testo di W. Rudin "Principi di analisi matematica" edito dalla McGraw-Hill (v. Teorema 10.39).

Si noti che se un campo $\boldsymbol{F}$ è solenoidale, ed il suo dominio non è fortemente connesso, le considerazioni precedenti non consentono di affermare, e nemmeno di escludere, che $\boldsymbol{F}$ ammetta un potenziale vettore.

## Esempi

Lo spazio $\mathbb{R}^3$ è fortemente connesso, come pure il dominio $\Omega = \{\,(x,y,z) \mid x^2 + y^2 > 0\,\}$. Invece lo spazio bucato $\mathbb{R}^3 \setminus \{\,(0,0,0)\,\}$ non è fortemente connesso.

## CALCOLO DEL POTENZIALE VETTORE

Costruiamo esplicitamente un potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ per un qualunque campo solenoidale $\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + Y(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + Z(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ di classe $C^1$ ed avente per dominio lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Osserviamo innanzitutto che, indicato con $\boldsymbol{\beta}$ il campo dato da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}(x, y, z) &= \hat{\boldsymbol{\imath}} \int_0^z Y(x, y, t)\, dt \\ &- \hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_0^z X(x, y, t)\, dt\end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{\beta} &= X(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + Y(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ &- \hat{\boldsymbol{k}} \int_0^z (X_x(x, y, t) + Y_y(x, y, t))\, dt.\end{aligned}$$

Ma siccome il campo $\boldsymbol{F}$ è solenoidale per ipotesi, si ha

$$\begin{aligned}- \hat{\boldsymbol{k}} \int_0^z (X_x(x, y, t) + Y_y(x, y, t))\, dt &= \hat{\boldsymbol{k}} \int_0^z Z_z(x, y, t)\, dt \\ &= Z(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{k}} - Z(x, y, 0)\,\hat{\boldsymbol{k}},\end{aligned}$$

e perciò risulta

$$\boldsymbol{F} = Z(x, y, 0)\,\hat{\boldsymbol{k}} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}.$$

Questa osservazione ci permette di concentrarci sulla ricerca di un potenziale vettore del campo $Z(x, y, 0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, ricerca facilitata dal fatto che il coefficiente $Z(x, y, 0)$ non dipende dalla variabile $z$.

Si verifica facilmente che il rotore del campo

$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_0^x Z(t, y, 0)\, dt$$

è proprio il campo $Z(x, y, 0)\,\hat{\boldsymbol{k}}$.

Poiché il rotore è un operatore lineare, il rotore della somma

$$\boldsymbol{\beta} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_0^x Z(t, y, 0)\, dt$$

è la somma dei rotori dei due addendi, dunque è il campo dato $\boldsymbol{F}$.

Riassumendo, un potenziale vettore del campo $\boldsymbol{F}$ è il campo $\boldsymbol{A}$ dato da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x, y, z) &= \hat{\boldsymbol{\imath}} \int_0^z Y(x, y, t)\, dt \\ &- \hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_0^z X(x, y, t)\, dt \\ &+ \hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_0^x Z(t, y, 0)\, dt.\end{aligned}$$

## PER APPROFONDIRE

Chi volesse approfondire lo studio dell'argomento può partire dalle parole-chiave appresso elencate:

- Teorema di Clebsch
- Decomposizione di Hodge
- Invarianza di gauge
- Lemma di Poincaré
- Teorema di De Rham
- Teorema di Helmholz

## L'OPERATORE DI LAPLACE

L'equazione di Laplace (1) si può anche scrivere $\Delta f = 0$, indicando la funzione incognita con $f(x, y, z)$ e con $\Delta$ l'operatore di Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Applicando la definizione della divergenza e del gradiente si verifica che

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

L'operatore di Laplace, o laplaciano, si denota anche con $\nabla^2$.

Il simbolo $\Delta$ fu scelto da Robert Murphy nel 1833, mentre la denominazione di "operatore di Laplace" è dovuta a James Clerk Maxwell (1831–1879)*.

*M. Kline, Storia del pensiero matematico, vol. II, Einaudi, pag. 916.

## ROTORE DI UN ROTORE

Se $\boldsymbol{F}$ è un campo vettoriale le cui componenti $X, Y, Z$ sono di classe $C^2$, si può definire

$$\Delta \boldsymbol{F} = \Delta X\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta Y\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \Delta Z\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

e risulta

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{F} - \Delta \boldsymbol{F}. \tag{69}$$

Per verificarlo basta applicare le definizioni, ed usare il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Si ha, infatti,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= [(Y_x - X_y)_y - (X_z - Z_x)_z]\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ &+ [(Z_y - Y_z)_z - (Y_x - X_y)_x]\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ &+ [(X_z - Z_x)_x - (Z_y - Y_z)_y]\, \hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned}$$

e per il teorema di Schwarz

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= [(Y_y + Z_z)_x - X_{yy} - X_{zz}]\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ &+ [(Z_z + X_x)_y - Y_{zz} - Y_{xx}]\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ &+ [(X_x + Y_y)_z - Z_{xx} - Z_{yy}]\, \hat{\boldsymbol{k}}. \end{aligned}$$

Aggiungendo e sottraendo $X_{xx}$ si vede che

$$(Y_y + Z_z)_x - X_{yy} - X_{zz} = (\operatorname{div} \boldsymbol{F})_x - \Delta X$$

e procedendo in modo analogo si trova

$$(Z_z + X_x)_y - Y_{zz} - Y_{xx} = (\operatorname{div} \boldsymbol{F})_y - \Delta Y$$

$$(X_x + Y_y)_z - Z_{xx} - Z_{yy} = (\operatorname{div} \boldsymbol{F})_z - \Delta Z$$

usando le quali si giunge alla (69).

# Appendice

## Risposte alle domande degli studenti

1. Vorrei sapere se la matematica è un'invenzione della mente umana oppure una scoperta.

Quando si cerca di risolvere un problema, ad esempio un'equazione differenziale, si devono trovare le soluzioni del problema considerato (se esistono), e non le si possono inventare arbitrariamente.

D'altro canto, è un dato di esperienza comune che, per risolvere un problema, ci si avvalga talvolta, con particolare profitto, di idee ingegnose e originali.

In conclusione, scoperta e inventiva sono due componenti della matematica.

---

2. Sviluppo in serie di Taylor per funzioni di due o più variabili.

La serie di Taylor associata ad una funzione $f(x_1, \ldots, x_N)$, con $N \geq 2$, è molto più complicata che nel caso $N = 1$.

Per capirlo, pensiamo al caso $N = 2$. In questo caso, le derivate seconde sono 4, ciascuna di esse ha due derivate terze, dunque le derivate terze sono 8. Si capisce che le derivate $\alpha$-esime, con $\alpha \in \mathbb{N}$, sono $2^\alpha$.

Per abbreviare la formula, si definiscono i differenziali $d^k f(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})$, $k \geq 1$, come segue.

Indichiamo con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ la variabile indipendente, e con $\overline{\boldsymbol{x}}$ il punto base dello sviluppo. Supponendo che $f$ sia di classe $C^\infty$ in un intorno di $\overline{\boldsymbol{x}}$, poniamo

$$d^k f(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(\overline{\boldsymbol{x}}) \cdot \cdot (x_{i_1} - \overline{x}_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_k} - \overline{x}_{i_k})$$

Poniamo inoltre $d^0 f(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = f(\overline{\boldsymbol{x}})$. La serie di Taylor è la seguente:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^k f(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})}{k!}$$

Avvertenza n. 1: scrivere la serie di Taylor non vuol dire, nemmeno nel caso $N = 1$, che valga l'uguaglianza

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^k f(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})}{k!}. \tag{70}$$

Questa uguaglianza vale o meno a seconda dell'espressione di $f$. Ad esempio, se $N = 1$ e

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, +\infty); \\ e^{1/x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

la serie di Maclaurin converge a zero per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque la (70) non vale per $x < 0$.

Avvertenza n. 2: non serve la formula (70) per approssimare $f(\boldsymbol{x})$ con un polinomio di primo grado: serve la differenziabilità. Vedere alle pagine A48 e A53.

Avvertenza n. 3: per la determinazione dei massimi e dei minimi non si usa la (70), ma la formula di Taylor con il resto di Peano: vedere a pag. A53.

3. Risolvere l'equazione del pendolo
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\operatorname{sen}\vartheta$$
nell'ipotesi che la velocità angolare $\omega(t) = \vartheta'(t)$ sia positiva per ogni $t$.

Applichiamo il metodo usato alle pagine A13 e A16 per altre equazioni.

Moltiplichiamo ambo i membri per $\vartheta'$. Così facendo, stiamo introducendo le soluzioni $\vartheta' = 0$, cioè $\vartheta =$ costante.

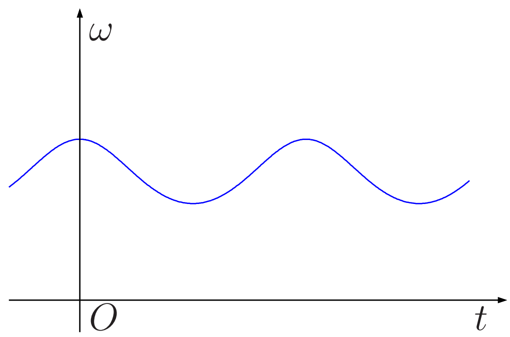
Fra di esse, le soluzioni dell'equazione di partenza sono $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, che corrispondono alle due posizioni di equilibrio del pendolo.

Integrando ambo i membri in $dt$ otteniamo
$$\int \vartheta'(t)\,\vartheta''(t)\,dt = -\int \vartheta'(t)\operatorname{sen}\vartheta(t)\,dt.$$
Al primo dei due integrali applichiamo la sostituzione $\omega = \vartheta'(t)$, al secondo integrale applichiamo la sostituzione $\vartheta = \vartheta(t)$. Otteniamo
$$\int \omega\,d\omega = -\int \operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta.$$
Questi due integrali sono immediati. Dunque possiamo scrivere
$$\frac{1}{2}\omega^2(t) = \cos\vartheta(t) + C$$
da cui, supponendo $\omega(t) > 0$, ricaviamo
$$\vartheta'(t) = \sqrt{2\cos\vartheta(t) + \omega_0^2} \qquad (71)$$
dove $\omega_0^2$ è il quadrato della velocità angolare al momento del passaggio per i punti $\vartheta = \pm\pi/2$.

Siamo giunti ad un'equazione a variabili separabili. Ancora per l'ipotesi $\vartheta'(t) > 0$, possiamo scrivere
$$\frac{\vartheta'(t)}{\sqrt{2\cos\vartheta(t) + \omega_0^2}} = 1.$$
Fissato l'istante $t = 0$ in modo tale che $\vartheta(0) = 0$, integriamo ambo i membri sull'intervallo $(0, t)$. Con la sostituzione $\alpha = \vartheta(t)/2$, e siccome $\cos\vartheta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, otteniamo
$$\int_0^{\vartheta(t)/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\alpha}} = t/k \qquad (72)$$
dove $k = 2/\sqrt{2 + \omega_0^2} \in (0, 1)$. La funzione integranda è continua, dunque è integrabile, e la funzione
$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\alpha}}$$
è strettamente crescente rispetto a $\varphi$ perché ha la derivata positiva, dunque ha un'inversa che indichiamo con la notazione di Jacobi: $\varphi(u) = \operatorname{am} u$, dove $u \in \mathbb{R}$.

Applicando la funzione $\operatorname{am} u$ ad ambo i membri della (72), ricaviamo la soluzione del problema:
$$\vartheta(t) = 2\operatorname{am}(t/k).$$

Inserendo tale espressione nella (71) otteniamo $\vartheta'(t) = \frac{2}{k}\operatorname{dn}(t/k)$, dove $\operatorname{dn}(t/k) = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\operatorname{am}(t/k)}$.



4. Tangente, normale e binormale.

Si chiamano versore tangente ad una curva data, versore normale e versore binormale tre versori che si possono, in estrema sintesi, definire come segue.

Consideriamo una funzione $\boldsymbol{r}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^2((a,b))$ e tale che $\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in (a,b)$.

La funzione $\boldsymbol{r}(t)$ si può dunque considerare una curva regolare nello spazio.

Indicato con $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t)$ il vettore velocità della curva, si definisce versore tangente il versore $\mathbf{T}(t)$ dato da

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{v}(t)}{\|\boldsymbol{v}(t)\|}. \tag{73}$$

Qualora il vettore accelerazione $\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{r}''(t)$ non sia proporzionale a $\mathbf{T}(t)$, questi due vettori individuano un piano, detto "piano osculatore".

In tal caso si definisce versore normale, o normale principale, il versore $\mathbf{N}(t)$ che è:
1) contenuto nel suddetto piano;
2) perpendicolare al versore $\mathbf{T}(t)$;
3) orientato in modo tale che il prodotto scalare $\mathbf{N}(t) \cdot \boldsymbol{r}''(t)$ sia positivo.

Si definisce, infine, versore binormale il versore $\mathbf{B}(t)$ dato da

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

dove il simbolo $\times$ denota il prodotto vettoriale.

5. L'equazione caratteristica associata ad un'equazione differenziale è anche l'equazione caratteristica di una matrice?

Sì. Per vederlo, effettuiamo il tipico cambiamento di variabile $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$ che trasforma l'equazione differenziale $y'' + b\,y' + cy = 0$ nel sistema

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -c\,z_1(t) - b\,z_2(t). \end{cases}$$

In parole povere, riduciamo l'ordine delle equazioni a costo di aumentarle di numero.

Il suddetto sistema si può porre nella forma matriciale $z'(t) = A\,z(t)$, dove $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ e $A$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (b + \lambda)\,\lambda + c \\ &= \lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto proprio il polinomio al primo membro dell'equazione caratteristica associata all'equazione data.

6. Perché il potenziale newtoniano $V(x,y,z) =$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta V(x,y,x) = -4\pi\,\mu(x,y,z)\,?$$

Nel corso della dimostrazione useremo la formula

$$\operatorname{div} f\,\boldsymbol{v} = f\,\operatorname{div}\boldsymbol{v} + v\cdot\nabla f \tag{74}$$

dove $f = f(x,y,z)$ è una funzione scalare differenziabile, e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y,z)$ un campo vettoriale differenziabile.

La (74) discende dalla regola di derivazione del prodotto, e si utilizza in tante altre circostanze. Inoltre scriveremo, per brevità,

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

e

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right).$$

Supponiamo, per semplicità, che la densità $\mu(x',y',z')$ sia una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, identicamente nulla al di fuori di una sfera $B = B_R(0,0,0)$ di raggio $R$ abbastanza grande. In particolare,

$$\nabla'\mu = 0 \text{ su } \partial B.$$

Effettuiamo, innanzitutto, il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x'' = x' - x \\ y'' = y' - y \\ z'' = z' - z \end{cases} \tag{75}$$

tipico per le convoluzioni. Notare che le variabili sono $x', x'', \dots$ mentre $(x,y,z)$ è un punto fissato.

Il potenziale assume l'espressione

$$V(x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(x''+x,\ \dots,\ z''+z)\,dx''\,dy''\,dz''}{\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}}.$$

Per la regolarità di $\mu$, e siccome $1/r$ è integrabile in senso generalizzato in ogni palla centrata in $r=0$, le derivate di $V(x,y,z)$ si possono esprimere tramite la regola di derivazione sotto il segno di integrale. Ad esempio, si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu_{x'x'}(x''+x,\ \dots)\,dx''\,dy''\,dz''}{\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}}.$$

Effettuando a ritroso il cambiamento di variabili (75), possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z) = \iiint_{\overline{B}} \frac{\mu_{x'x'}(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r}.$$

Analoghe espressioni valgono per le altre derivate seconde. Sommandole fra loro, otteniamo

$$\Delta V(x,y,z) = \iiint_{\overline{B}} \frac{\Delta'\mu(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r}. \tag{76}$$

Ora applichiamo la (74) alla funzione $f = 1/r$ ed al campo $\boldsymbol{v} = \nabla'\mu$:

$$\operatorname{div}'\frac{1}{r}\nabla'\mu = \frac{1}{r}\Delta'\mu + \left(\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla'\mu.$$

Inoltre, per il teorema della divergenza si ha

$$\iiint_{\overline{B}} \operatorname{div}'\frac{1}{r}\nabla'\mu\,dx'\,dy'\,dz' = \iint_{\partial B}\frac{1}{r}\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\mu\,dS = 0$$

perché $1/r$ è integrabile in $dS$, e le derivate parziali di $1/r$ sono integrabili in $dx'\,dy'\,dz'$. Pertanto la (76) diventa

$$\Delta V(x,y,z) = \\ -\iiint_{\overline{B}} \left(\nabla' \frac{1}{r}\right) \cdot \nabla' \mu \; dx'\,dy'\,dz'.$$

Si può dire di aver effettuato sulla (76) un'integrazione per parti. Usando la (74) con $f = \mu$ e $\boldsymbol{v} = \nabla' \frac{1}{r}$, ricaviamo

$$\operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} = \left(\nabla' \frac{1}{r}\right) \cdot \nabla' \mu$$

perché $\operatorname{div}' \nabla' \frac{1}{r} = 0$ per $r \neq 0$, cioè $1/r$ è armonica per $r \neq 0$. Dunque possiamo scrivere

$$\Delta V(x,y,z) = \\ -\iiint_{\overline{B}} \operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} \; dx'\,dy'\,dz'.$$

Fissiamo $R$ così grande che $(x,y,z) \in B$, e interpretiamo l'integrale al secondo membro come un integrale generalizzato: posto $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x,y,z)$, si ha

$$\iiint_{\overline{B}} \operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} \; dx'\,dy'\,dz' = \\ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iiint_{\overline{B} \setminus B_\varepsilon} \operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} \; dx'\,dy'\,dz'.$$

Applicando a quest'ultimo integrale il teorema della divergenza, e siccome $\mu = 0$ su $\partial B$, otteniamo

$$\iiint_{\overline{B} \setminus B_\varepsilon} \operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} \; dx'\,dy'\,dz' = \\ -\iint_{\partial B_\varepsilon} \left(\nabla' \frac{1}{r}\right) \cdot \boldsymbol{n}\, \mu \, dS$$

Il versore $\boldsymbol{n}$ della formula precedente è dato da

$$\boldsymbol{n}(x',y',z') = \frac{(x'-x,\; y'-y,\; z'-z)}{r}$$

e perciò

$$-\left(\nabla' \frac{1}{r}\right) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{su } \partial B_\varepsilon.$$

Dunque

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iiint_{\overline{B} \setminus B_\varepsilon} \operatorname{div}' \mu \,\nabla' \frac{1}{r} \; dx'\,dy'\,dz' \\ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon} \mu \, dS.$$

Questo limite vale $4\pi\,\mu(x,y,z)$. Per vederlo, si possono usare le stime

$$\min_{\partial B_\varepsilon} \mu \le \mu(x',y',z') \le \max_{\partial B_\varepsilon} \mu$$

per $(x',y',z') \in \partial B_\varepsilon$, dalle quali segue

$$4\pi \min_{\partial B_\varepsilon} \mu \le \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon} \mu \, dS \le 4\pi \max_{\partial B_\varepsilon} \mu$$

perché l'area di $\partial B_\varepsilon$ è $4\pi\varepsilon^2$. Quando $\varepsilon \to 0$, per la continuità di $\mu$ risulta

$$\min_{\partial B_\varepsilon} \mu,\; \max_{\partial B_\varepsilon} \mu \to \mu(x,y,z)$$

dunque $\Delta V(x,y,x) = -4\pi\,\mu(x,y,z)$, come volevasi dimostrare.

Questa trattazione è liberamente ispirata a:


• D. Gilbarg e N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag 1983;

• B. O. Peirce, Elements of the theory of the Newtonian potential function, Ginn & Co. 1902 (http://archive.org).

# Indice analitico