Prova scritta di Analisi Matematica 3 16.07.2025 Sol. (I)

1. Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde di f.

$$f_x = Sh(x+yz),\ f_y = z\,Sh(x+yz)+2,\ f_z = y\,Sh(x+yz),$$

$$f_{xx} = Ch(x+yz),\ f_{xy} = z\,Ch(x+yz),\ f_{xz} = y\,Ch(x+yz),$$

$$f_{yy} = z^2\,Ch(x+yz),\ f_{yz} = Sh(x+yz)+yz\,Ch(x+yz),$$

$$f_{zz} = y^2\,Ch(x+yz).$$

a) La massima crescita è data da $|Df(1,1,-1)|$ pari a $|(0,2,0)| = 2$, mentre la direzione di massima crescita è $Df(1,1,-1)/|Df(1,1,-1)|$, cioè $(0,1,0)$.

b) Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1,1,-1) = (Df(1,1,-1), \lambda)$$

$$= ((0,2,0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})) = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) L'equazione richiesta è data da

$$(Df(1,1,-1), (x-1, y-1, z+1)) = 0$$

cioè $\quad y = 1.$

d) Si ha

$$f(1,1,-1)=3\,,\quad Df(1,1,-1)=(0,2,0)\,,$$

$$D^2 f(1,1,-1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

quindi

$$\operatorname{ch}(x+yz)+zy=f(x,y,z)=f(1,1,-1)+$$

$$\left(Df(1,1,-1),(x-1,y-1,z+1)\right)+\frac{1}{2}\left(D^2f(1,1,-1)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}\right)$$

$$+\,o\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\right)\quad \text{per } (x,y,z)\to(1,1,-1)$$

$$=3+\left((0,2,0),(x-1,y-1,z+1)\right)+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}\right)$$

$$+\,o\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\right)$$

$$=3+2(y-1)+\frac{1}{2}\Big((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2-2(x-1)(y-1)$$

$$+\,2(x-1)(z+1)-2(y-1)(z+1)\Big)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\right)$$

$$=2+2y+\frac{1}{2}(x-y+z+1)^2+o\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2\right).$$

Prova Scritta di Analisi Matematica 3 16.07.2025 Sol. 3

2. $f_x = 3x^2 - 3 + \frac{y^2}{1+x^2}$; $f_y = 2y \operatorname{arctg} x$

da cui ricaviamo i punti stazionari

$$Df = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 + \frac{y^2}{1+x^2} = 3 \\ 2y \operatorname{arctg} x = 0 \end{cases}$$, spezzando la seconda equazione,

troviamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 3 \end{cases}$$ e quindi le soluzioni sono

$(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{3})$. Calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx} = 6x - \frac{2xy^2}{(1+x^2)^2}, \quad f_{xy} = \frac{2y}{1+x^2}, \quad f_{yy} = 2\operatorname{arctg} x$$

e le matrici hessiane nei punti trovati

$$D^2 f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \pm\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$, essendo questa una matrice

diagonale, concludiamo che $(1,0)$ è un p.to di min. rel. mentre $(-1,0)$ è un p.to di max relativo.

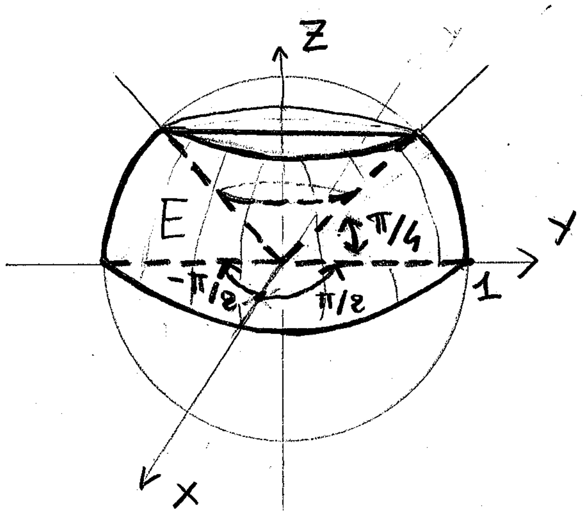
Similmente

$$D^2 f(0,\pm\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$ si ha

$\det D^2 f(0,\pm\sqrt{3}) = -12 < 0$, dunque i punti

$(0,\pm\sqrt{3})$ sono entrambi di sella.

3. L'insieme E è rappresentato nella figura:



In coordinate sferiche è descritto dalle relazioni

$$T: \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \pi/4 \le \varphi \le \pi/2, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

Ricordando che $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$,
abbiamo

$$\iiint_E yz \, dx\,dy\,dz = \iiint_T \rho^4 \sin^2\varphi \cos\theta \cos\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 \cdot \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4-\sqrt{2}}{30}.$$

4.

a) Il punto iniziale ha coordinate polari $(0,0)$, mentre quello finale $(1, \pi/2)$, questi individuano due punti diversi nel piano. Quindi γ non è chiusa. Inoltre la curva è semplice perchè per $\theta \in (0, \pi/2)$ $\rho = \rho(\theta) = \sin^2\theta > 0$, quindi a questi valori di θ corrispondono punti diversi del sostegno.

Infine $\rho(\theta) \in C^1([0, \pi/2])$,

$$\rho'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta) &= \sin^2\theta\,(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta) \\ &= \sin^2\theta\,(1 + 3\cos^2\theta) > 0 \\ &\quad \forall \theta \in (0, \pi/2], \end{aligned}$$

dunque la curva è regolare.

b)

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = \sin^2\theta\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta = \sin^3\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

c) Dato che $ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta = \sin\theta \sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d\theta$,
si trova

$$\text{Lunghezza di } \gamma = \int_\gamma ds = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d\theta$$

e

$$\int_\gamma \sqrt{1-(x^2+y^2)^{1/2}}\, ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \sin\theta \sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d\theta$$

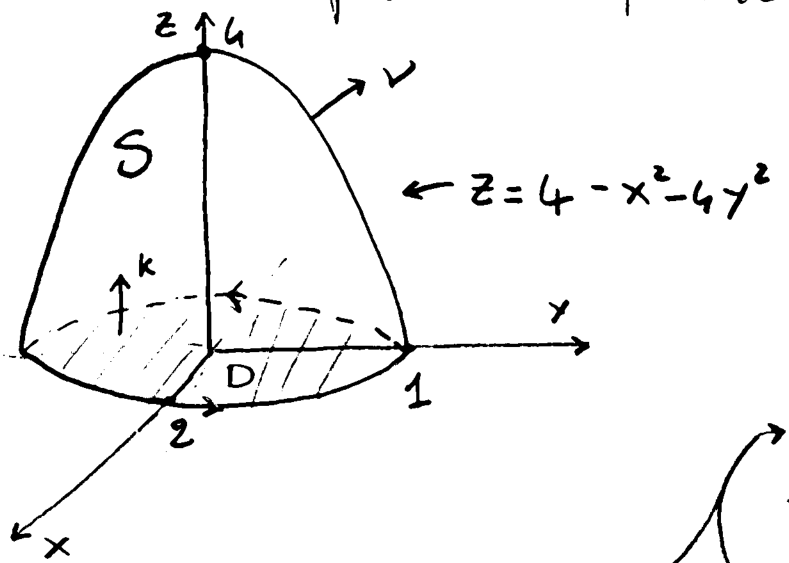
$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} -6\sin\theta\cos\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2\theta}\, d(1+3\cos^2\theta)$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{2}{3}(1+3\cos^2\theta)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{7}{9}.$$

5. S è la parte di paraboloide ellittico mostrato nella figura e orientato dalla normale esterna ν.



Applicando due volte il teorema di Stokes troviamo:

$$\iint_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma = \int_{+\partial S = +\partial D} (F, T)\, ds = \iint_D (\operatorname{rot} F, K)\, d\sigma$$

dove D è la superficie piana di equazione cartesiana $z = f(x,y) \equiv 0$ con $x^2 + 4y^2 \le 4$.

Inoltre

$$(\operatorname{rot} F, K) = (\operatorname{rot} F)_z = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ y^2 \cos z & x(\sin^2 z + 1) \end{vmatrix} = \sin^2 z + 1 - 2y\cos z$$

e $d\sigma = \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx\, dy = dx\, dy$. Quindi

$$\iint_D (\operatorname{rot} F, K)\, d\sigma = \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (\sin^2 0 + 1 - 2y\cos 0)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{x^2+4y^2 \le 4} (1 - 2y)\, dx\, dy.$$

Consideriamo ora il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = 2\rho,$$

quindi $dx\,dy = 2\rho\,d\rho\,d\theta$.

Infine

$$\iint_{x^2+4y^2\le 4} (1-2y)\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1-2\rho\sin\theta)\,2\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 2\rho\,d\rho\,d\theta - 4\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$= \rho^2\Big|_0^1 \cdot 2\pi - 4\int_0^1 \rho^2\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta}_{=0} = 2\pi.$$