

Prova scritta di Analisi Matematica 3 e Analisi Matematica 2 (10 CFU)

Esercizio 1. (5 punti)

Sia $f(x, y, z) = \operatorname{Ch}(x + yz) + 2y$.

- Determinare la direzione di massima crescita e la massima crescita in corrispondenza del punto $(1, 1, -1)$.
- Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1, -1)$ relativamente alla direzione $\lambda = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
- Scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie di livello di f passante per il punto $(1, 1, -1)$.
- Scrivere lo sviluppo di Taylor di f attorno al punto $(1, 1, -1)$ sino al secondo ordine e con il resto di Peano. (Non è necessario semplificare l'espressione trovata.)

Esercizio 2. (6 punti)

Studiare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 \arctan x$.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0\}$.

Calcolare l'integrale

$$\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz.$$

Suggerimento: utilizzare le coordinate sferiche con θ variabile nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 4. (6 punti)

Sia data la curva γ di equazione polare $\rho = \sin^2 \theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

- Stabilire se la curva è chiusa, semplice e se è regolare a tratti.
Suggerimento: per studiare la semplicità, tenere presente il significato geometrico delle coordinate polari.
- Scrivere le equazioni parametriche di γ .
- Impostare l'integrale $\int_\gamma ds$ e calcolare $\int_\gamma \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^{1/2}} \, ds$.

vedi retro \rightarrow

Esercizio 5*. (6 punti)

Siano dati la superficie S di equazione cartesiana $z = 4 - x^2 - 4y^2$ con $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z \mathbf{i} + x(\sin^2 z + 1) \mathbf{j} - z^2(x^2 - y^2) \mathbf{k}.$$

Calcolare il flusso di \mathbf{F} attraverso S :

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}, \nu) d\sigma.$$