

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 16/07/2025

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

i) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \frac{z+3}{(z+1)(z-3)^2} dz$, dove

a) γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 (**1,5 punti**);

b) γ è il quadrato di lato unitario con centro di simmetria nell'origine (**1,5 punti**);

c) γ è la circonferenza con centro nel punto $1+i$ e raggio 5 (**3 punti**).

ii) Stabilire se il risultato del punto c) di i) si può ottenere per via teorica, senza fare calcoli (**2 punti**).

Esercizio 2.

i) Dopo aver verificato che la funzione $f(t) = e^{-3|t|}$ è trasformabile secondo Fourier, calcolare la sua trasformata di Fourier (**2 punti**);

ii) verificare il risultato (trovato col calcolo diretto) del punto precedente, ricavando una formula generale per la trasformata di Fourier della funzione $g(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, usando la formula di riscaldamento a partire dalla trasformata di $g(t)$ con $t = 1$ (**2 punti**);

iii) trovare la soluzione $y(t)$, $t \geq 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 1 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

utilizzando la trasformata di Laplace (**4 punti**).

Domanda 1.

i) Enunciare e dimostrare il Principio del massimo modulo (**3 punti**);

ii) dire se esiste un teorema analogo per il minimo (**1 punto**);

iii) Enunciare due importanti corollari che seguono da questo principio e dimostrarli (**2 punti**);

iv) Enunciare Teorema della media, mostrando da quale risultato segue (**2 punti**).

Domanda 2.

i) Dare la definizione di funzione Fourier e Laplace trasformabile e definire le trasformate di Fourier e di Laplace di una funzione $f(t)$ (Fourier e Laplace trasformabile rispettivamente) (**2 punti**);

ii) enunciare e dimostrare i risultati relativi al legame tra la trasformazione di Fourier e la derivazione (Teorema della derivata della trasformata di Fourier e Teorema della trasformata di Fourier della derivata) (**4 punti**).