Cagliari, 15/07/2025

Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino la circonferenza di centro C (-2; 1) e raggio pari a 3, nonché la retta passante per i punti A (2; -1) e B (-1; 5).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza e la retta.

2) Studio di funzione: L'arsenico (13 punti)

L'arsenico è un metalloide altamente tossico che si trova naturalmente in alcuni minerali e può essere rilasciato nell'ambiente attraverso attività industriali. È noto per essere uno dei veleni più antichi e letali, utilizzato storicamente per avvelenamenti intenzionali. L'arsenico agisce interferendo con vari processi cellulari, in particolare inibendo la produzione di ATP, la principale fonte di energia delle cellule, portando a danni cellulari e alla morte delle cellule. La morte può sopraggiungere in un tempo che può variare da poche ore a diversi giorni.

Si ipotizzi che un individuo venga avvelenato con l'arsenico e si modellizzi la concentrazione di arsenico nel suo sangue (in mg/L) in funzione del tempo (in ore) tramite la seguente funzione:

$$C(t) = kt\, e^{-\frac{t}{k}}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Supponendo che la morte sopraggiunga dopo 5 ore, in corrispondenza del momento di massima concentrazione di arsenico, si ricavi il valore di *k*. (2 punti)
b. Si calcoli il valore massimo della concentrazione di arsenico nel sangue. (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione *C(t)*, tracciandone il grafico. (8 punti)
d. Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo la concentrazione di veleno nel sangue scende al di sotto di 1 mg/L. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Ciclo di vita di un’app (6 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza il numero di download di una certa applicazione in funzione del tempo (in anni):

$$n(t) = kt^3e^{-t^4}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero totale di download effettuati fino ad un certo tempo t_x. (4 punti)
b. Ricavare la costante k perché il numero totale di download effettuati durante il primo anno dal lancio dell’app sia pari a 1400. (2 punti)

4) Statistica: Confronto tra servizi (6 punti)

Tre diverse aziende introducono sul mercato altrettanti servizi simili.
Sia data la seguente tabella che lega il numero di prodotti venduti al costo di produzione totale del servizio:

AZIENDA	**A**	**B**	**C**
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a) Effettuare un’analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra costo di produzione e il numero di servizi venduti. (4 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

FORMULE UTILI

Coefficienti retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2} \qquad q = \bar{y} - m\bar{x}$

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -2 \quad y_C = 1 \qquad r = 3 \ \rightarrow \ r^2 = 9$$

$$x_A = 2 \quad y_A = -1 \qquad x_B = -1 \quad y_B = 5$$

SOLUZIONE

Equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \ y = -2x + 3$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = 1 \\ x_{P2} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -2x_P + 3$:

$$\begin{cases} y_{P1} = 1 \\ y_{P2} = \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(1;\ 1)\, , \mathrm{P}_2\left(-\frac{1}{5};\ \frac{17}{5}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$C(t) = kt\, e^{-\frac{t}{k}} \qquad t_{C_{Max}} = 5\, hr \qquad [\, C\,] = \frac{mg}{L}$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$C'(t) = k\left[e^{-\frac{t}{k}} + t\left(-\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{t}{k}}\right]$$

$$\boldsymbol{C'(t) = k\left(1 - \frac{t}{k}\right)e^{-\frac{t}{k}}}$$

Il problema ci dice che il massimo della funzione viene raggiunto per $t = t_{C_{Max}} = 5\, hr$, perciò il valore di *k* sarà calcolato imponendo che la derivata prima si annulli in corrispondenza del suddetto valore della variabile t. Ricordando che un esponenziale con base positiva è sempre strettamente positivo e che il tempo è una variabile necessariamente positiva, si ha:

$$C'(t) = 0 \;\; \rightarrow \;\; 1 - \frac{t_{C_{Max}}}{k} = 0 \;\; \rightarrow \;\; 1 - \frac{5}{k} = 0 \;\rightarrow \;\; k = 5$$

Per cui, possiamo finalmente scrivere:

$$\boldsymbol{C(t) = 5t\, e^{-\frac{t}{5}}}$$

b)

Il valore massimo della concentrazione si avrà dopo 5 ore, perciò, sostituendo questo valore nella funzione *C (t)* si ha $C = C_{Max}$:

$$C_{Max} = C(t=5) = 25\, e^{-1} = \frac{25}{e} = 9.197\, \frac{mg}{L} \approx \, 9.2\, \frac{mg}{L}$$

c)

Lo studio della funzione *C(t)* dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente *t* che quella dipendente *C* corrispondano a grandezze fisiche positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$C(t) = 5t\, e^{-\frac{t}{5}}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in R \qquad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$C(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad C(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Studio del segno:

$$C(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 5t\, e^{-\frac{t}{5}} > 0$$

$5t > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$

$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{C(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0}$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} 5t\, e^{-\frac{t}{5}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5t}{e^{\frac{t}{5}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{5t}{e^{\frac{t}{5}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5}{\frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{25}{e^{\frac{t}{5}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{C'(t) = 5\left(1 - \frac{t}{5}\right)e^{-\frac{t}{5}}}$$

$C'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{t}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad t = 5$

$C(t=5) \approx 9.2 \quad \rightarrow \quad M(5; 9.2)$

$$C'(t) > 0$$

$1 - \frac{t}{5} > 0 \quad \rightarrow \quad 5 - t > 0 \quad \rightarrow \quad -t > -5 \quad \rightarrow \quad t < 5$

$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{C'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t < 5}$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$C'(t) = 5\left(1 - \frac{t}{5}\right) e^{-\frac{t}{5}} = 5\, e^{-\frac{t}{5}} - \frac{t}{5}\, e^{-\frac{t}{5}}$$

$$C''(t) = -1 \cdot\, e^{-\frac{t}{5}} + (5 - t) \cdot \left(-\frac{t}{5}\right)\, e^{-\frac{t}{5}}$$

$$\boldsymbol{C''(t) = \left(\frac{t}{5} - 2\right) e^{-\frac{t}{5}}}$$

$$C''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 10\, hr$$

$$C(t = 10) = 6.767\, \frac{mg}{L} \approx 6.77\, \frac{mg}{L}$$

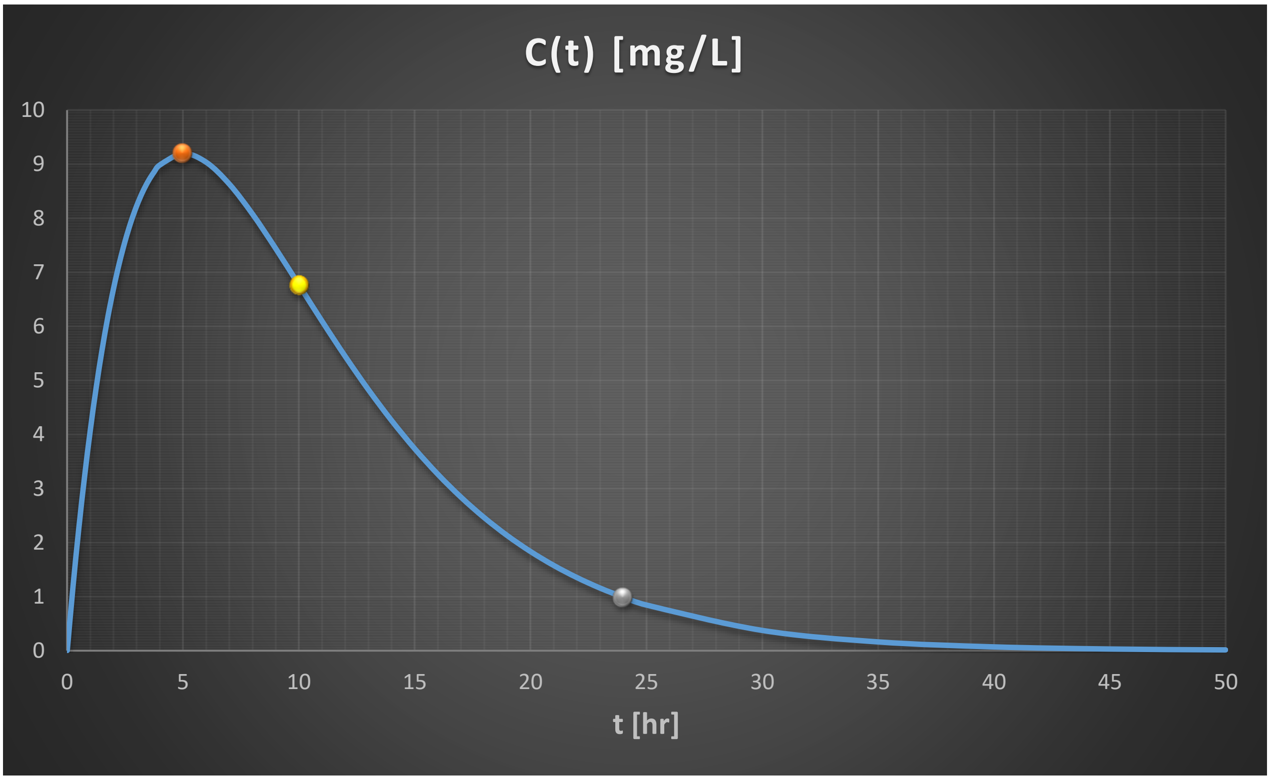
$$\boldsymbol{F(10; 6.77)}$$

$C''(t) > 0$

$\left(\frac{t}{5} - 2\right) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 10$

$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$C''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 10$$



d)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. La concentrazione scende al di sotto di il valore di 1 mg/L dopo 24 ore.

t [hr]	C(t) [mg/L]
0	0
0.25	1.189
0.5	2.262
0.75	3.228
1	4.094
1.25	4.868
1.5	5.556
1.75	6.166
2	6.703
2.25	7.173
2.5	7.582
2.75	7.933
3	8.232
3.25	8.483
3.5	8.690
3.75	8.857
4	8.987
5	9.197
6	9.036
7	8.631
8	8.076
9	7.438
10	6.767
11	6.094
12	5.443
13	4.828
14	4.257
15	3.734
16	3.261
17	2.837
18	2.459
19	2.125
20	1.832
21	1.575
22	1.351
23	1.156
24	0.988
25	0.842
30	0.372
35	0.160
40	0.067
45	0.028
50	0.011

3) INTEGRALE

DATI

$$n(t) = kt^3\, e^{-t^4} \qquad N_{1°\,anno} = 1\,400$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x :

$$N(t) = \int_0^{t_x} n(t)dt = k\int_0^{t_x} t^3\, e^{-t^4}\; dt = k\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{t_x} (-4)t^3\, e^{-t^4}\; dt = -\frac{k}{4}\left[e^{-t^4} + c\right]_0^{t_x}$$

$$N(t) = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - \left(e^{-0^4} + c\right)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - (1 + c)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} - 1\right]$$

$$\boldsymbol{N(t) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-t_x{}^4}\right)}$$

b)

$$N_{1°\,anno} = N(t_x = 1) = N_1 = 1\,400 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{4\,N_1}{e^{-1} - 1} = \frac{4\,N_1}{1 - e^{-1}} \quad \rightarrow \quad k = 8\,859$$

4) STATISTICA

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

SERVIZI	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Costo di produzione	1 306.67 €	28 433.33 €	168.62 €
Servizi venduti	841	8 812	93.87

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = -15\,500$$

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = -0.979$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.545\,x + 1\,553}$$