

Cagliari, 10/07/2025

**Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)**

**MATRICOLA** \_\_\_\_\_

**NOME e COGNOME** \_\_\_\_\_

**1) Calcolo combinatorio (3 punti)**

Si calcoli in quanti modi si può formare un campione di 5 persone in un gruppo di 10.

**2) Studio di funzione: La TTX del pesce palla (11 punti)**

*La tetrodotossina (TTX) è una delle neurotossine più potenti conosciute, celebre per la sua presenza nel pesce palla. Non è prodotta direttamente dal pesce, ma da batteri simbiotici che vivono nei tessuti del pesce. Si tratta di una sostanza termostabile, per cui la cottura non distrugge la tossina. La dose letale per l'uomo è di circa 0.5 – 0.6 mg, oltre 100 volte più tossica del cianuro, e la morte può sopraggiungere in un tempo tra 20 minuti e 8 ore, tipicamente per paralisi respiratoria.*

Sia data la seguente funzione, che modella la quantità di veleno (in mg) nel sangue in funzione del tempo (in ore):

$$Q(t) = \frac{kt}{t^2 + 1}$$

Dove  $k$  è una costante positiva e non nulla.

- Supponendo che la morte sopraggiunga in corrispondenza della quantità massima di veleno nel sangue, si ricavi dopo quanto tempo si ha il decesso. (2 punti)
- Si calcoli il valore di  $k$  perché la quantità massima sia pari a 0.5 mg. (1 punto)
- Utilizzando il valore di  $k$  trovato, effettuare uno studio completo della funzione  $Q(t)$ , tracciandone un grafico accurato. (8 punti)

### 3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (9 punti)

Sia data la seguente funzione, che modella la velocità di crescita di una popolazione batterica (in milioni di unità) rispetto al tempo (in ore):

$$v(t) = \frac{2t + 2}{t^2 + 5t + 6}$$

- Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo tempo ed in funzione del numero iniziale di batteri  $N_0$ . (5 punti)
- Creare una tabella che mostri la variazione del numero di batteri presenti nel campione nelle prime 24 ore, con frequenza di campionamento (i.e. ogni quanto tempo si effettua ogni misurazione) non superiore alle 4 ore e per un numero iniziale di organismi pari a un milione. (2 punti)
- Tracciare un grafico dei valori ottenuti al punto precedente. (2 punti)

### 4) Statistica: Confronto tra servizi (7 punti)

Tre diverse aziende introducono sul mercato altrettanti servizi simili.

Sia data la seguente tabella che lega il numero di prodotti venduti al costo di produzione totale del servizio:

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

- Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra costo di produzione e il numero di servizi venduti. (3 punti)
- Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
- Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti sia di 1.50 €. (2 punti)

Permutazioni semplici	$P_n = n!$
Permutazioni con ripetizioni	$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$
Disposizioni semplici	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Disposizioni con ripetizioni	$D'_{n,k} = n^k$
Combinazioni semplici	$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$
Combinazioni con ripetizioni	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

## Valori di riferimento per i test di ipotesi

Test T				
$\alpha$ v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
39	1.685	2.023	2.708	3.558
49	1.677	2.010	2.680	3.500
59	1.671	2.001	2.662	3.463
69	1.667	1.995	2.649	3.437
79	1.664	1.990	2.640	3.418
89	1.662	1.987	2.632	3.403
99	1.660	1.984	2.626	3.392

Test Z				
$\alpha$	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Test $\chi^2$				
$\alpha$ v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
11	17.275	19.675	24.725	31.264
12	18.549	21.026	26.217	32.909
13	19.812	22.362	27.688	34.528
14	21.064	23.685	29.141	36.123
15	22.307	24.996	30.578	37.697
16	23.542	26.296	32.000	39.252
17	24.769	27.587	33.409	40.790
18	25.989	28.869	34.805	42.312
19	27.204	30.144	36.191	43.820
20	28.412	31.410	37.566	45.315
21	29.615	32.671	38.932	46.797
22	30.813	33.924	40.289	48.268
23	32.007	35.172	41.638	49.728
24	33.196	36.415	42.980	51.179
25	34.382	37.652	44.314	52.620
26	35.563	38.885	45.642	54.052
27	36.741	40.113	46.963	55.476
28	37.916	41.337	48.278	56.892
29	39.087	42.557	49.588	58.301
30	40.256	43.773	50.892	59.703

$$Z^* = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma} \sqrt{n} \quad T_{n-1}^* = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s} \sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i^{\text{expected}} - f_i^{\text{observed}})^2}{f_i^{\text{expected}}}$$

# SOLUZIONI

## 1) CALCOLO COMBINATORIO

Non contando l'ordine di scelta delle persone e non essendoci ripetizioni di persone, si tratta di una combinazione semplice di  $n = 10$  elementi in  $k = 5$  posizioni senza ripetizioni:

$$C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

## 2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$Q(t) = \frac{kt}{t^2 + 1} \quad Q_{Max} = 0.5 \frac{\mu g}{l}$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$Q'(t) = k \frac{t^2 + 1 - t(2t)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$Q'(t) = k \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

La funzione fratta si annulla quando il numeratore si annulla, perciò, ricordando che il tempo è una variabile necessariamente positiva:

$$Q'(t) = 0 \rightarrow 1 - t_M^2 = 0 \rightarrow (1 + t_M)(1 - t_M) = 0 \rightarrow t_M = 1 \text{ hr}$$

b)

Il valore di  $k$  si ottiene imponendo nella funzione  $Q(t)$  la condizione per cui per  $t = 1$  si ha  $Q = Q_{MAX}$ :

$$Q(t = 1) = k \frac{1}{1 + 1} \rightarrow k \frac{1}{1 + 1} = 0.5 \rightarrow k = 1$$

c)

Lo studio della funzione  $Q(t)$  dev'essere svolto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente  $t$  che quella dipendente  $Q$  corrispondano a grandezze fisiche positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$Q(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

- Dominio:

$$t^2 + 1 \neq 0 \rightarrow D: \forall t \in R \quad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$Q(t) = 0 \rightarrow \frac{t}{t^2 + 1} = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow P_0(0; 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \rightarrow C(t = 0) = 0 \rightarrow P_0(0; 0)$$

- Studio del segno:

$$Q(t) > 0 \rightarrow \frac{t}{t^2 + 1} > 0$$

$$N(t) > 0 \rightarrow t > 0$$

$$D(t) > 0 \rightarrow t^2 + 1 > 0 \rightarrow \forall t \in R$$

$$Q(t) > 0 \rightarrow t > 0$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{t^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2t} \right) = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$Q'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(1 + t)(1 - t)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$Q'(t) = 0 \rightarrow (1 + t)(1 - t) = 0 \rightarrow t = 1$$

$$Q(t = 1) = 0.5 \rightarrow M(1; 0.5)$$

$$Q'(t) > 0$$

$$(1 + t)(1 - t) > 0 \rightarrow -1 < t < 1 \rightarrow 0 < t < 1$$

$$(t^2 + 1)^2 > 0 \rightarrow \forall t \in R$$

$$Q'(t) > 0 \rightarrow 0 < t < 1$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$Q''(t) = \frac{-2t(t^2 + 1)^2 - 2(t^2 + 1) \cdot 2t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^4} = \frac{2t(t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^3}$$

$$Q''(t) = 2t \frac{t^2 - 3}{(t^2 + 1)^3}$$

$$Q''(t) = 0 \rightarrow t = 0; t^2 - 3 = 0 \rightarrow t = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ hr} = 1 \text{ hr } 43 \text{ min } 55 \text{ sec}$$

$$Q(t = \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433 \text{ mg}$$

$$F_1(0; 0) \quad F_1(1.73; 0.433)$$

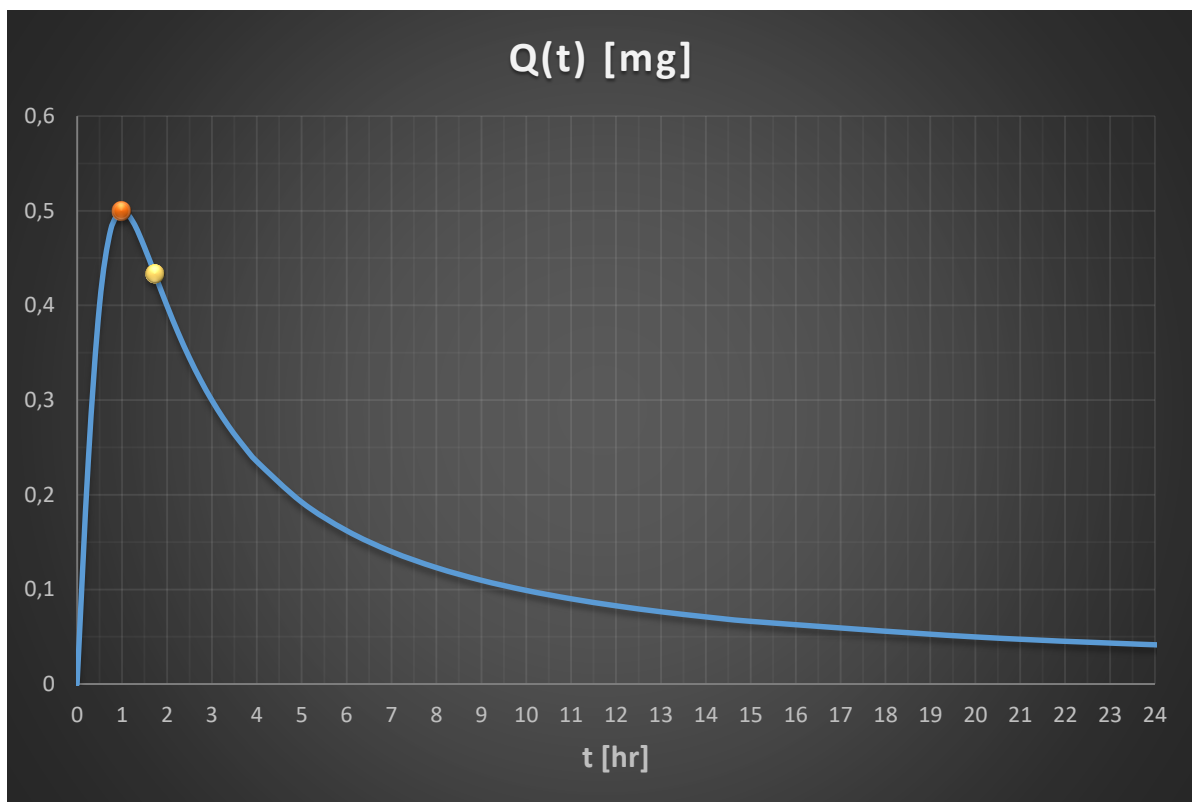
$$Q''(t) > 0$$

$$2t > 0 \rightarrow t > 0$$

$$t^2 - 3 > 0 \rightarrow t < -\sqrt{3} \cup t > \sqrt{3} \rightarrow t > \sqrt{3}$$

$$(t^2 + 1)^3 > 0 \rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$$

$$Q''(t) > 0 \rightarrow t > \sqrt{3}$$



### 3) INTEGRALE

$$v(t) = \frac{2t + 2}{t^2 + 5t + 6}$$

a)

Per calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo momento  $t_x$ , bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e  $t_x$  e tener conto della popolazione iniziale  $N_0$  che è data in milioni di unità:

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t) dt$$

$$\frac{2t + 2}{t^2 + 5t + 6} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t + 3} = \frac{(A + B)t + 3A + 2B}{(t + 2)(t + 3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{4}{t + 3} - \frac{2}{t + 2}$$

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t) dt = N_0 + \int_0^{t_x} \left( \frac{4}{t + 3} - \frac{2}{t + 2} \right) dt =$$

$$= N_0 + [4 \ln(t + 3) - 2 \ln(t + 2) + c]_0^{t_x}$$

$$N(t) = N_0 + 4 \ln(t_x + 3) - 2 \ln(t_x + 2) - 4 \ln 3 + 2 \ln 2$$

$$N(t) = N_0 + 4 \ln(t_x + 3) - 2 \ln(t_x + 2) - 3$$

In alternativa:

$$N(t) = N_0 + 2 \ln \left[ \frac{(t_x + 3)^2}{t_x + 2} \right] + 2 \ln \frac{2}{9}$$

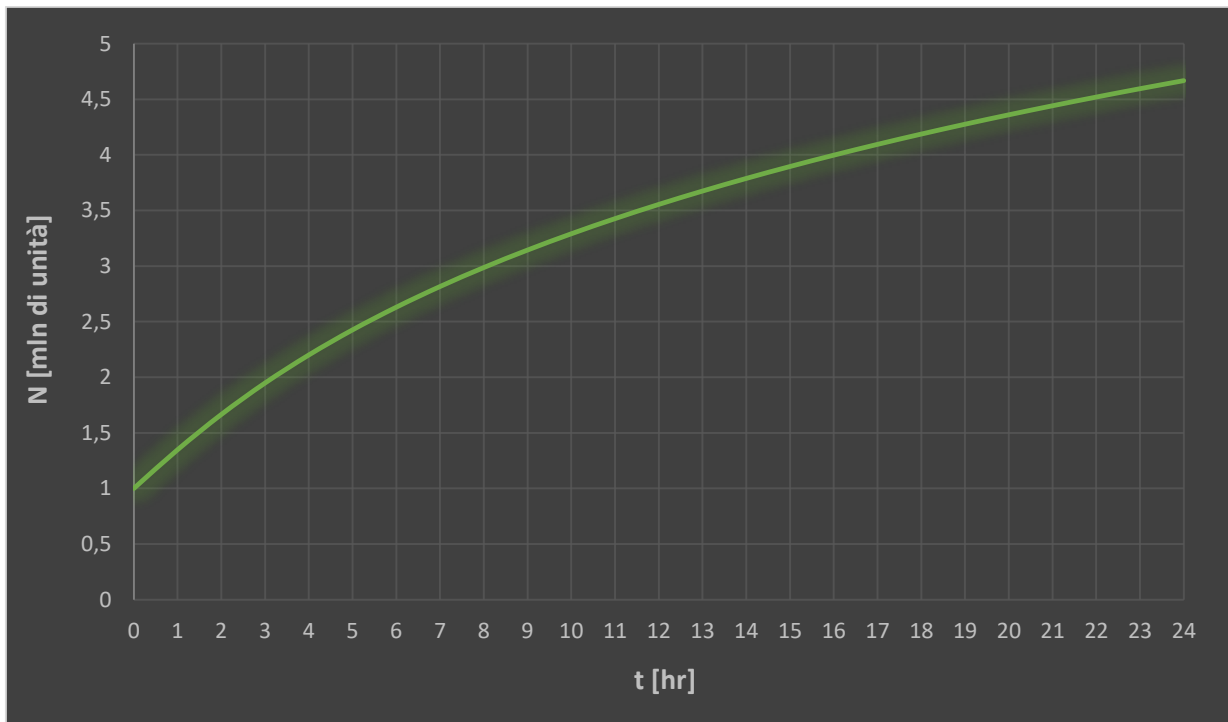
$$N(t) = N_0 + 2 \ln \left[ \frac{(t_x + 3)^2}{t_x + 2} \right] - 3$$

b)

Se il numero iniziale di batteri è pari ad un milione, ricordando che  $N$  è dato in milioni di unità:

$$N(t) = 1 + 2 \ln \left[ \frac{(t_x + 3)^2}{t_x + 2} \right] - 3 = 2 \ln \left[ \frac{(t_x + 3)^2}{t_x + 2} \right] - 2$$

t [hr]	N [mln]
0	1.00
4	2.20
8	2.99
12	3.55
16	4.00
20	4.36
24	4.67



#### 4) STATISTICA

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a)

Avendo un numero limitato di campioni ( $N = 3$ ), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

SERVIZI	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Costo di produzione	1 306.67 €	28 433.33 €	168.62 €
Servizi venduti	841	8 812	93.87

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = -15\,500$$

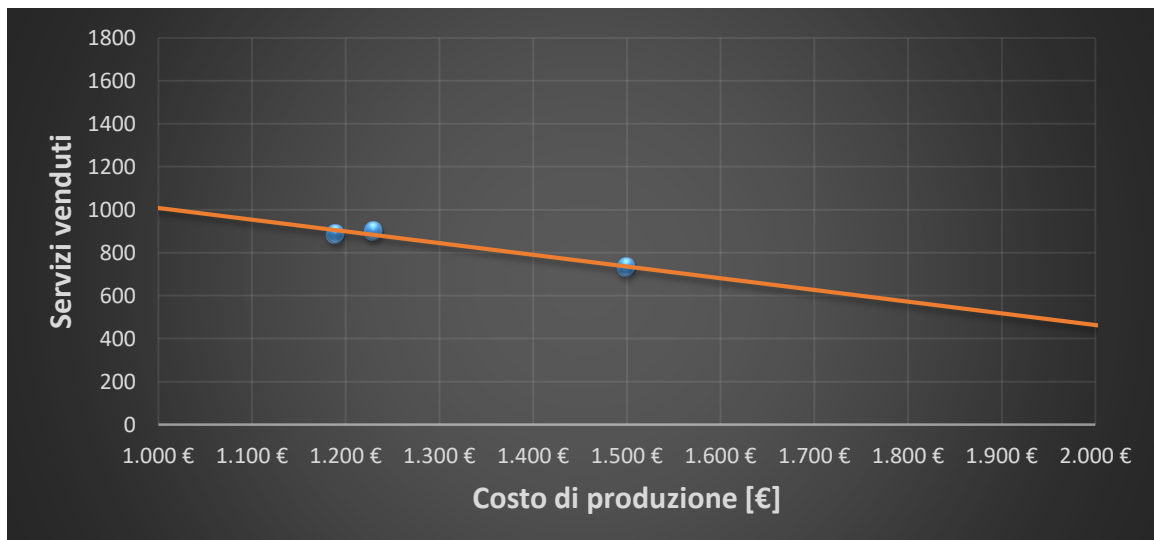
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = -0.979$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$y = -0.545x + 1553$$



c)

Il test fa riferimento al rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati:

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1 500 €	1 230 €	1 190 €
Servizi venduti	733 €	903 €	887 €
<b>Rapporto</b>	<b>2.05 €</b>	<b>1.36 €</b>	<b>1.34 €</b>

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a  $n = 3$  (A, B, C). Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a  $v = n - 1 = 2$  e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$T_{n-1}^* = \frac{|x - \mu|}{s} \sqrt{n}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

Media	1.58 €
Varianza C	0.16089
Dev Std C	0.40111
<b>Pivot T</b>	<b>0.360</b>

		Test T			
$\alpha$	$v$	0.10	0.05	0.01	0.001
1	1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2	2.920	4.303	9.925	31.599

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per  $v = 2$ , si ottiene che l'ipotesi nulla  $H_0$  secondo la quale il rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti sia pari a 1.50 € è non negabile al 90%.