Cagliari, 17/06/2025

**Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA**

**MATRICOLA** ____________________________________________________________

**NOME e COGNOME** ______________________________________________________

## 1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino la circonferenza di centro C (-1; 0) e raggio pari a 3, nonché la retta passante per i punti A (-2; 5) e B (2; -3).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza e la retta.

## 2) Studio di funzione: La melatonina (12 punti)

*La melatonina è un ormone prodotto naturalmente dalla ghiandola pineale nel cervello, noto per il suo ruolo fondamentale nella regolazione del ciclo sonno-veglia. Quando la luce diminuisce, il corpo aumenta la produzione di melatonina, segnalando che è ora di dormire. Al contrario, la sua produzione diminuisce con l'esposizione alla luce, aiutando il risveglio. Oltre al suo ruolo nel sonno, la melatonina ha proprietà antiossidanti e influenza il sistema immunitario. È disponibile anche sotto forma di integratore, spesso utilizzato per contrastare il jet lag o problemi di insonnia.*

Viene assunta da un adulto un integratore a base di melatonina ed a rilascio immediato. Si ipotizzi che questa venga assorbita dall'organismo secondo la seguente funzione che indica la quantità di melatonina nel sangue (in mg) in funzione del tempo (in ore) e a partire dal momento dell'assunzione:

$$Q(t) = \frac{kt}{t^2 + 1}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare dopo quanto tempo dall'assunzione si ha la quantità massima di melatonina nell'organismo. (3 punti)
b. Sapendo che la pastiglia contiene 5 mg di melatonina, calcolare il valore di *k*. (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione data. (6 punti)
d. Effettuando uno studio per punti, tracciare il grafico dettagliato della funzione *Q(t)* e ricavare dopo quanto tempo la quantità di melatonina nel sangue scende al di sotto di 1 mg. (2 punti)

## 3) Calcolo integrale: Mitosi cellulare (8 punti)

*La mitosi è il processo di divisione cellulare che permette a una cellula madre di generare due cellule figlie geneticamente identiche. È una fase fondamentale del ciclo cellulare e avviene nelle cellule eucariotiche, garantendo la crescita, la riparazione dei tessuti e la sostituzione delle cellule danneggiate.*

Sia data la seguente funzione che modellizza la velocità di crescita del numero di un particolare tipo di cellule nel tempo (in minuti):

$$v(t) = kt^2 e^{t^3-1}$$

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di cellule sviluppate per mitosi in funzione del tempo. (4 punti)
b. Supponendo che la crescita per mitosi parta da una singola cellula, calcolare il valore di *k* perché dopo un minuto si abbiano 60 cellule. (2 punti)

## 4) Statistica: Puzzle (5 punti)

Un'azienda produttrice di puzzle vuole effettuare un'indagine statistica sul legame tra il numero di vendite e la tipologia di puzzle acquistati in termini di numero di pezzi.

La statistica prende come campione di 8 000 puzzle venduti e suddivisi come segue:

| **Tipologia** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Numero di pezzi** | 1000 | 1500 | 2000 | 5000 | 10000 |
| **Puzzle venduti** | 3020 | 2481 | 1794 | 514 | 191 |

a) Tenendo conto sia del peso diverso che ciascuna tipologia ha all'interno della popolazione dei puzzle venduti che della dimensione della popolazione considerata, verificare il tipo di correlazione tra il numero di vendite e la tipologia di prodotto in termini di numero di pezzi del puzzle. (3 punti)
b) Visualizzare il legame tra il numero di vendite e la relativa tipologia, sovrapponendolo ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

---

---

FORMULE UTILI

Coefficienti retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2} \qquad q = \bar{y} - m\bar{x}$

# SOLUZIONI

## 1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -1 \quad y_C = 0 \qquad r = 3 \;\rightarrow\; r^2 = 9$$

$$x_A = -2 \quad y_A = 5 \qquad x_B = 2 \quad y_B = -3$$

SOLUZIONE

Equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow\; y = -2x + 1$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 - 2x - 7 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = -1 \\ x_{P2} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 1$ e, perciò, facendo attenzione a cambiare di segno $x_P$:

$$\begin{cases} y_{P1} = 3 \\ y_{P2} = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(-1;\ 3)\ , \mathrm{P}_2\left(\frac{7}{5};\ -\frac{9}{5}\right)$$

## 2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$Q(t) = \frac{k\,t}{t^2+1} \qquad Q_M = 5\,mg \quad Q_S = 1\,mg$$

a)

$$Q'(t) = k\,\frac{t^2+1-t\,(2t)}{(t^2+1)^2} = \;k\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = k\,\frac{(1+t)(1-t)}{(t^2+1)^2}$$

$$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad = (1+t)(1-t) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t_M = 1\,hr}$$

b)

$$Q_M = Q(t = t_M) = Q(1) = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{k \cdot 1}{1^2+1} = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 10}$$

c)

$$\boldsymbol{Q(t) = \frac{10\,t}{t^2+1} \qquad con\ t \geq 0}$$

- DOMINIO

$$t^2 + 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D\!:\ t > 0}$$

- INTERSEZIONI ASSE X

$Q(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A(0;0)}$

- INTERSEZIONI ASSE Y

$t = 0 \quad \rightarrow \quad Q_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B \equiv A(0;0)}$

- STUDIO DEL SEGNO

$$Q(t) > 0$$

$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$
$D(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t^2 + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$Q(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t > 0}$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{10\,t}{t^2+1} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t^2}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t}\right) = 0^+$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA ED ESTREMI RELATIVI

$$\boldsymbol{Q'(t) = 10\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}}$$

$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (1+t)(1-t) = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$ FUORI DOMINIO

$Q'(t) \geq 0$

$N'(t) \geq 0 \;\rightarrow\; 1-t^2 \geq 0 \;\rightarrow\; -1 \leq t \leq 1 \;\rightarrow\; 0 \leq t \leq 1$

$D'(t) \geq 0 \;\rightarrow\; (t^2+1)^2 \geq 0 \;\rightarrow\; \forall t \in R$

$\boldsymbol{Q'(t) \geq 0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{0 \leq t \leq 1} \;\rightarrow\; \textit{Punto di Massimo } \boldsymbol{M(1;5)}$

- SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA E PUNTI DI FLESSO

$$Q''(t) = 10\frac{-2t\,(t^2+1)^2 - (1-t^2)\cdot 2t \cdot 2(t^2+1)}{(t^2+1)^4} = 20\,t\,\frac{t^2-3}{(t^2+1)^3}$$

$$Q''(t) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2t + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_1 \equiv A(0;0) \qquad F_2\left(\sqrt{3};\,\frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = F_2(1.732;\; 4.33)}$$

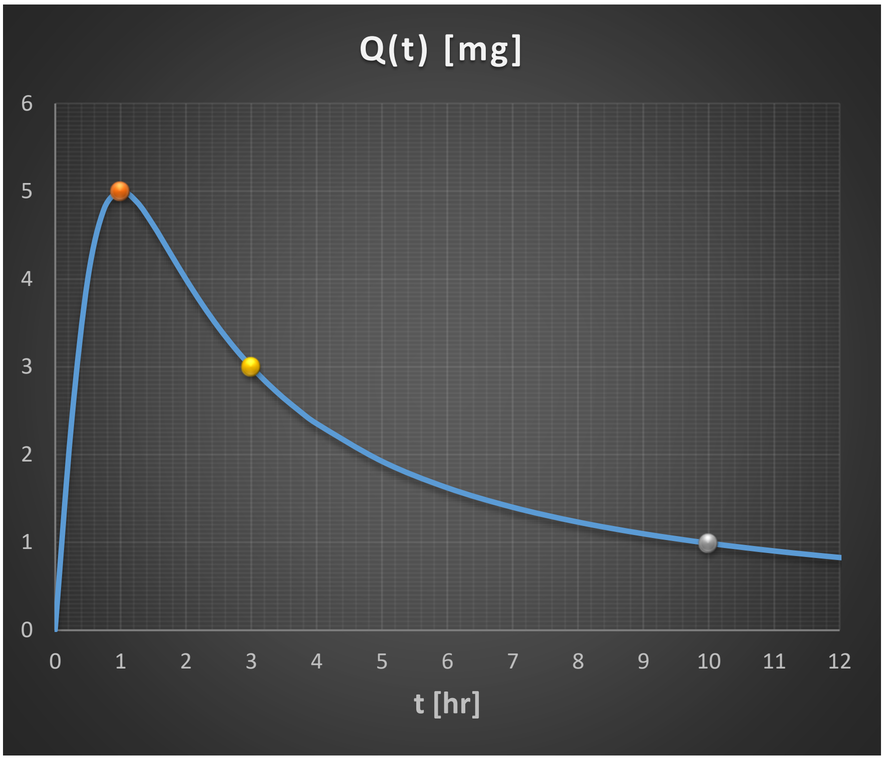
$Q''(t) > 0$

$$\begin{cases} 20\,t > 0 \\ t^2 - 3 > 0 \\ (t^2+1)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < -\sqrt{3} \,\cup\, t > \sqrt{3} \\ \forall t \in R \end{cases} \rightarrow -\sqrt{3} < t < 0 \,\cup\, t > \sqrt{3} \;\rightarrow\; \boldsymbol{t > \sqrt{3}}$$

d)

$$\boldsymbol{Q(t) = 10\,\frac{t}{t^2+1}} \qquad \boldsymbol{con\ t \geq 0} \qquad Q_S = 1\,mg$$

| t [hr] | Q(t) [mg] |
|---|---|
| 0 | 0.00 |
| 0.25 | 2.35 |
| 0.5 | 4.00 |
| 0.75 | 4.80 |
| 1 | 5.00 |
| 1.25 | 4.88 |
| 1.5 | 4.62 |
| 1.732 | 4.33 |
| 1.75 | 4.31 |
| 2 | 4.00 |
| 2.25 | 3.71 |
| 2.5 | 3.45 |
| 2.75 | 3.21 |
| 3 | 3.00 |
| 3.25 | 2.81 |
| 3.5 | 2.64 |
| 3.75 | 2.49 |
| 4 | 2.35 |
| 5 | 1.92 |
| 6 | 1.62 |
| 7 | 1.40 |
| 8 | 1.23 |
| 9 | 1.10 |
| 10 | 0.99 |
| 11 | 0.90 |
| 12 | 0.83 |




$$Q_S = 1\,mg \quad \rightarrow \quad t_S \approx 10\,hr$$

## 3) INTEGRALE

$$v(t) = kt^2 e^{t^3-1}$$

a)

Per calcolare il numero di cellule formetesi fino ad un certo momento $t_x$, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e $t_x$ :

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t)\, dt$$

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t) dt = k \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3-1}\ dt = k \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3} \cdot e^{-1}\, dt$$

$$N(t) = \frac{k}{e} \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3}\ dt = \frac{k}{e} \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^{t_x} 3\, t^2\, e^{t^3}\ dt = \frac{k}{3e}\left[e^{t^3} + c\right]_0^{t_x} = \frac{k}{3e}\left[e^{t_x^3} - 1\right]$$

Tenendo conto infine delle condizioni iniziali:

$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + \frac{k}{3e}\left(e^{t_x^3} - 1\right)}$$

b) DATI: $N_0 = 1$ $N_1 = 60$

$$N(t_x = 1) = N_1 = 60 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{k}{3e}(e-1) = 60$$

$$k = 59\frac{3e}{e-1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 280}$$

## 4) STATISTICA

| Tipologia | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **Numero di pezzi** | 1000 | 1500 | 2000 | 5000 | 10000 |
| **Puzzle venduti** | 3020 | 2481 | 1794 | 514 | 191 |

a)

Avendo un numero di unità (puzzle venduti) pari a 8 000, NON si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario, bensì a quelli classici. Inoltre, come suggerito nel testo, ad ogni tipologia corrisponde un diverso numero di puzzle, perciò la media per la tipologia di puzzle dovrà essere calcolata come media ponderata piuttosto che aritmetica.

| | Media | Varianza | Dev Std |
|---|---|---|---|
| **Tipologia (pezzi)** | 1 851 | 15 437 633 | 3 929 |
| **Puzzle venduti** | 1 600 | 1 198 975 | 1 095 |

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione (con N = 5):

$$\sigma_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = -3\,378\,100$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -0.762$$

La correlazione è quindi di natura forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.21\,x + 2\,191}$$