

Università di Cagliari  
Corso di Laurea in Matematica  
**Prova scritta di Geometria 1**  
10 luglio 2025

**Esercizio 1**

Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definita da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & z \\ z & x + y \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il sottoinsieme

$$W = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \text{tr}(f(\mathbf{v})) = 1\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ , e in caso affermativo si trovi una base di  $W$ .

b) Trovare una base di  $\text{Im}(f)$ .

c) Dato  $W' = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ , stabilire se la somma  $\text{Im}(f) + W'$  è diretta. In caso affermativo, trovare l'unica decomposizione del generico vettore di  $\text{Im}(f) \oplus W'$  come somma di un vettore di  $\text{Im}(f)$  e di un vettore di  $W'$ ; in caso negativo, trovare un vettore di  $\text{Im}(f) + W'$  che ammette due decomposizioni distinte (ed esibire tali decomposizioni distinte) come somma di un vettore di  $\text{Im}(f)$  e di un vettore di  $W'$ .

d) Date le applicazioni lineari  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  e  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  tali che

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

stabilire se le tre applicazioni  $f, g, h$  sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 2**

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ kx_2 + kx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - (1+k)x_3 = k \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

**Esercizio 3**

Sia  $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2, e sia  $f$  l'endomorfismo di  $V$  definito da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ka + b \\ ka + b & b \end{pmatrix}$$

dove  $k$  è un parametro reale.

Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  trovare gli autovalori e una base degli autospazi di  $f$  e stabilire. Inoltre stabilire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$   $f$  è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di  $V$  formata da autovettori di  $f$ .