LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1 DEL 10 LUGLIO 2025

ESERCIZIO 1

a) $W = \{ v \in \mathbb{R}^3 : tr(f(v)) = 1 \}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Infatti $0 = (0,0,0) \notin W$ in quanto

$$tr(f(0,0,0)) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq 1$$

b) $$Im(f) = L(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$$
$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= L\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v'_2}\Bigg)$$

Una base di $Im(f)$ è $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

c) La somma $Im(f) + W'$ <u>NON</u> è diretta.

Infatti $W' = L\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{w'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{w'_2}\Bigg)$ e $w'_2 = v'_1 + v'_2$

da cui $\underset{\underset{0}{\#}}{w'_2} \in Im(f) \cap W'$

Notiamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in W'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W'}$$

d) Consideriamo $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $M_2(\mathbb{R})$

Allora

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando l'isomorfismo tra $L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ e $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, f, g, h linearmente indipendenti $\iff M_{BB'}(f), M_{BB'}(g), M_{BB'}(h)$ linearmente indipendenti.

E infatti, dati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha M_{BB'}(f) + \beta M_{BB'}(g) + \gamma M_{BB'}(h) = \mathbf{0}$ si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\gamma & \gamma \\ 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0 \Rightarrow f, g, h$ lin. indipendenti.

Esercizio 2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ kx_2 + kx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - (1+k)x_3 = k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & -1-k & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1-k & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Consideriamo gli orlati di questo minore.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -1 + 2 - k = 1 - k$$

Ne deduciamo che quando $k \neq 1$ $rg(A) = 3 = rg(A|B)$ e dunque il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Per $k = 1$ esaminiamo l'altro minore orlato in A:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + (-1-1) = 0$$

Quindi per $k=1$ $rg(A)=2$.

Controlliamo il minore orlato in $A|B$ che si ottiene aggiungendo B:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(due colonne uguali)}$$

Allora per $k=1$ $rg(A) = 2 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Ora troviamo l'insieme delle soluzioni.

<u>CASO $k \neq 1$</u>

Il sistema è equivalente a
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 + s \\ kx_2 + x_4 = -ks \\ x_1 + x_2 = k + (1+k)s \end{cases}$$

$$x_3 = s$$

Per costruzione è un sistema di Cramer (con matrice dei coefficienti proprio il minore di ordine 3 che abbiamo considerato per dedurre che $rg(A) = rg(A|B) = 3$).

Allora

$$x_1 = \frac{1}{1-k} \det \begin{pmatrix} 1+s & 2 & 1 \\ -ks & k & 1 \\ k+(1+k)s & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-k}\left(-ks + 2k + 2(1+k)s - k^2 - k(1-k)s - 1 - s\right)$$

$$= \frac{1}{1-k}\left(-\cancel{ks} + 2k + \underline{2s} + 2\cancel{ks} - k^2 - \cancel{ks} + k^2 s - 1 - \underline{s}\right)$$

$$= \frac{s - 1 + 2k - k^2 + k^2 s}{1-k}$$

dalla 3^a equazione

$$x_2 = k + s + ks - x_1 = k + s + ks + \frac{s - 1 + 2k - k^2 + k^2 s}{1-k}$$

$$= \frac{k + s + \cancel{ks} - k^2 - \cancel{ks} - \cancel{k^2 s} + s - 1 + 2k - k^2 + \cancel{k^2 s}}{1-k}$$

$$= \frac{2s - 1 + 3k - 2k^2}{1-k}$$

III RIGA $\to$ III $-$ I

$$x_4 = \frac{1}{1-k} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+s \\ 0 & k & -ks \\ 1 & 1 & k+(1+k)s \end{pmatrix} = \frac{1}{1-k} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+s \\ 0 & k & -ks \\ 0 & 1 & 1-k-ks \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-k} \det\begin{pmatrix} 2 & 1+s \\ 1 & 1-k-ks \end{pmatrix} = \frac{2-2k-2ks-1-s}{1-k}$$

$$= \frac{1-2k-2ks-s}{1-k}$$

Pertanto $S = \left\{ \left(\frac{s-1+2k-k^2+k^2s}{1-k}, \frac{2s-1+3k-2k^2}{1-k}, s, \frac{1-2k-2ks-s}{1-k} \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$

CASO $k=1$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 - 2s + t \\ x_4 = -s - t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_3 = t \end{array}$$

da cui $x_4 = -s-t$ e $x_1 = 1-2s+t+s+t =$
$= 1-s+2t$

Allora

$$S = \{(1-s+2t, s, t, -s-t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 3

Una base di V è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad v_1 \qquad\quad v_2 \qquad\quad v_3$

Troviamo $M_{BB}(f)$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} = v_1 + kv_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = v_2 + v_3$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

Vi sono dunque due autovalori: 0, con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2.

Vediamo gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(0) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & ka+b \\ ka+b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ ka+b & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$$

da cui $a=b=0 \ \forall k \in \mathbb{R}$

Allora $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L(v_3)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(1) \iff \begin{pmatrix} a & ka+b \\ ka+b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ ka+b = b \\ b = c \end{cases} \iff \begin{cases} ka & = 0 \\ b-c & = 0 \end{cases}$$

Si noti che la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ del sistema lineare omogeneo ha rango 1 se $k=0$ e ha rango 2 se $k \neq 0$.

Nel primo caso ($k=0$) abbiamo che $a=s$, $c=t$ ($s,t \in \mathbb{R}$) e $b=c=t$ e quindi

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ t & t \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= L(v_1, v_2+v_3)$$

Concludiamo, che per $k=0$ $m_a(1) = m_g(1)$ e quindi (dato che anche $m_a(0) = m_g(0)$)

f è diagonalizzabile.

Nel secondo caso ($k \neq 0$) il sistema ha come soluzioni $a = 0$, $c = s$ ($s \in \mathbb{R}$) e $b = s$. Quindi per $k \neq 0$ $V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}(v_2 + v_3)$

In tal caso $m_g(1) < m_a(1)$ e quindi f NON è diagonalizzabile.

<u>Riassumendo</u>

- Per $k \neq 0$ f non è diagonalizzabile
- Per $k = 0$ f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori di f è

$$\{ v_3, \; v_1, \; v_2 + v_3 \}$$