Cagliari, 01/07/2025

Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Studio di funzione (13 punti)

Sia data la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x + k}{x^2 - 7x + 10}$$

Dove k è una costante.

a. Ricavare *k* perché la funzione abbia un estremo relativo (i.e. massimo o minimo) nel punto di ascissa 3. (3 punti)
b. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare dettagliatamente la funzione fermandosi al calcolo della derivata seconda (compreso). (10 punti)

2) Calcolo integrale: (12 punti)

Si faccia riferimento alla funzione di cui al punto precedente e con *k = 10*.

a. Ricavare la funzione: (5 punti)

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

b. Qual è il dominio della funzione ottenuta? (1 punto)
c. Sia *a* una variabile intera maggiore di 6. Ricavare per tentativi il valore di *a* per il quale l'integrale definito tra 6 e *a* valga 2.50. (4 punti)
d. Tracciare per punti il grafico di *F(x)*. (2 punti)

3) Statistica: Tasso di omicidi nelle capitali europee (5 punti)

Si vuole effettuare una statistica sul tasso di omicidi nelle grandi capitali europee (con una popolazione uguale o superiore al milione di abitanti).

Si consideri la seguente tabella che lega la popolazione di tre grandi città (in milioni di abitanti) al numero di omicidi registrati in un anno:

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	36	39	23

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra la popolazione ed il numero di omicidi registrati. (3 punti)

b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

1) STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{x + k}{x^2 - 7x + 10}$$

a)

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 7x + 10) - (x + k)(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 10)^2} = \frac{-x^2 - 2kx + 7k + 10}{(x^2 - 7x + 10)^2}$$

Perché la funzione abbia un estremo relativo nel punto di ascissa 3, la derivata prima dovrà annullarsi per x = 3.

$$f'(3) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-3^2 - 6k + 7k + 10}{(3^2 - 21 + 10)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad k + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = -1}$$

b)

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{x - 1}{(x - 2)(x - 5)}$$

Dominio:

$$\boldsymbol{D = \forall x \in R - \{2; 5\}} \quad oppure \quad \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Intersezione asse x (y = 0):

$$\frac{x - 1}{x^2 - 7x + 10} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad A(1;\ 0)$$

Intersezione asse y (x = 0):

$$y = \frac{-1}{10} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad B\left(0;\ -\frac{1}{10}\right)$$

Studio del segno:

$$f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{x^2-7x+10} > 0$$

$N(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x-1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$

$D(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x^2-7x+10 > 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-5) > 0 \quad \rightarrow \quad x < 2 \ \cup x > 5$

$$\boldsymbol{f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 1 < x < 2 \ \cup \ x > 5}$$

Limiti:

- **Comportamento agli estremi:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

- **Asintoti verticali:**

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)} = \frac{2-1}{(2^- - 2)(2-5)} = \frac{1}{0^- \cdot (-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)} = \frac{2-1}{(2^+ - 2)(2-5)} = \frac{1}{0^+ \cdot (-3)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)} = \frac{5-1}{(5-2)(5^- - 5)} = \frac{4}{3 \cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)} = \frac{5-1}{(5-2)(5^+ - 5)} = \frac{4}{3 \cdot 0^+} = +\infty$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-7x+10)^2} = -\frac{x^2-2x-3}{(x^2-7x+10)^2} = -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2-7x+10)^2}$$

- **Estremi relativi:**

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{M\left(-1; -\frac{1}{9}\right)} \\ \boldsymbol{N(3; -1)} \end{cases}$$

- **Studio del segno:**

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2-7x+10)^2} > 0$$

$N'(x) > 0 \;\rightarrow\; (x+1)(x-3) > 0 \;\rightarrow\; x < -1 \cup x > 3$

$D'(x) > 0 \;\rightarrow\; -(x^2-7x+10)^2 > 0 \;\rightarrow\; \nexists x \in R$

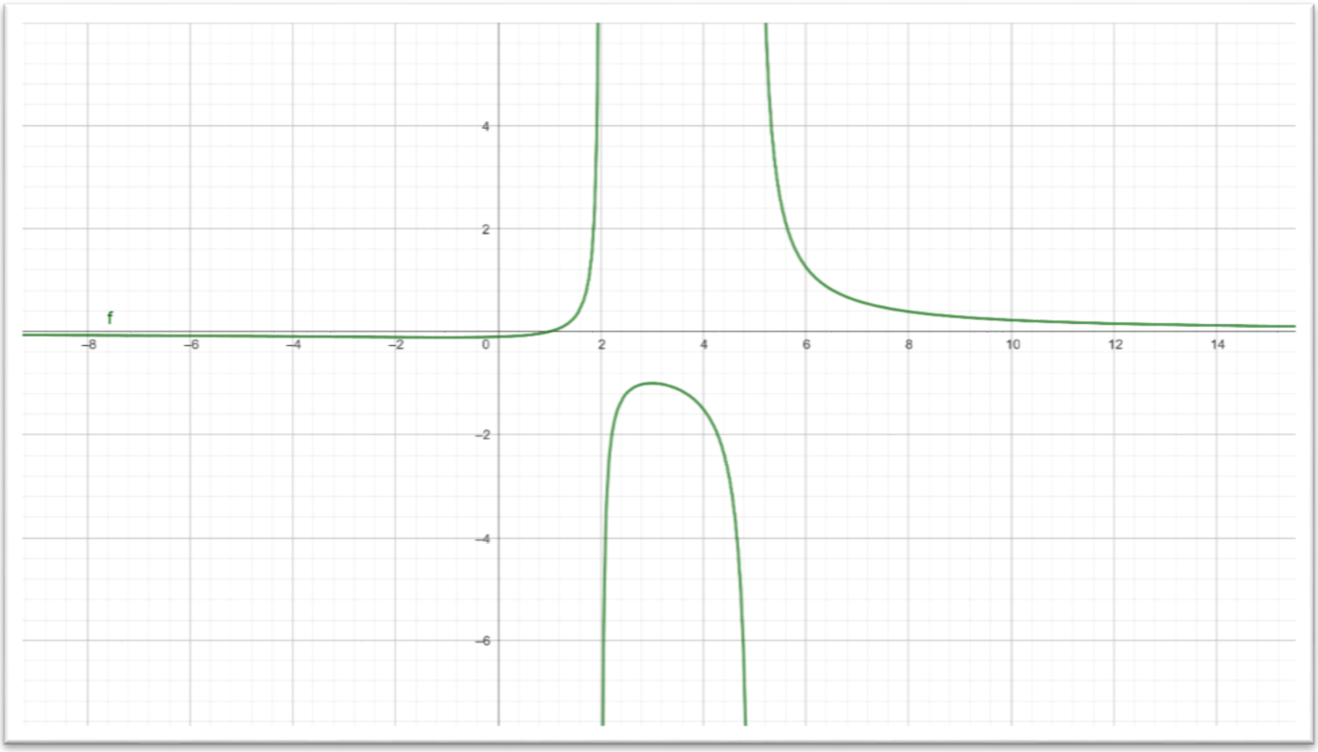
$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \quad \rightarrow -1 < x < 3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{M\left(-1; -\frac{1}{9}\right)} \;\; \boldsymbol{MINIMO} \\ \boldsymbol{N(3; -1)} \;\; \boldsymbol{MASSIMO} \end{cases}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{(2x-2)(x^2-7x+10)^{\cancel{2}} - (x^2+2x+3)\cdot 2\cdot \cancel{(x^2-7x+10)}\cdot(2x-7)}{(x^2-7x+10)^{4\rightarrow 3}}$$

$$= 2\,\frac{x^3-3x^2-9x+31}{(x^2-7x+10)^3}$$



2) INTEGRALE

a)

$$F(x) = \int \frac{x+10}{x^2-7x+10}\,dx$$

Procediamo con la scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x+k}{x^2-7x+10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x-5A-2B}{(x-2)(x-5)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -5A-2B=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=5 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-5} - \frac{4}{x-2}$$

$$F(x) = \int \left(\frac{5}{x-5} - \frac{4}{x-2}\right) dx = \int \frac{5}{x-5}\,dx - \int \frac{4}{x-2}\,dx$$

$$\boldsymbol{F(x) = 5\ln|x-5| - 4\ln|x-2| + c}$$

$$\boldsymbol{F(x) = \ln\left[\frac{|x-5|^5}{(x-2)^4}\right] + c}$$

N.B.: L'argomento del logaritmo dev'essere sempre strettamente positivo, per cui si mette il valore assoluto. Laddove ci sia un esponente pari, l'argomento sarà sempre positivo, perciò non è necessario mettere il valore assoluto e sono sufficienti le parentesi tonde. Ad ogni modo, si tratta di una convenzione formale ed il mancato utilizzo dei valori assoluti in luogo delle parentesi non viene in questa sede considerato come errore.

b)

Perché la funzione abbia senso, l'argomento dei logaritmi devono essere entrambi strettamente positivi:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-5>0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x>5}$$

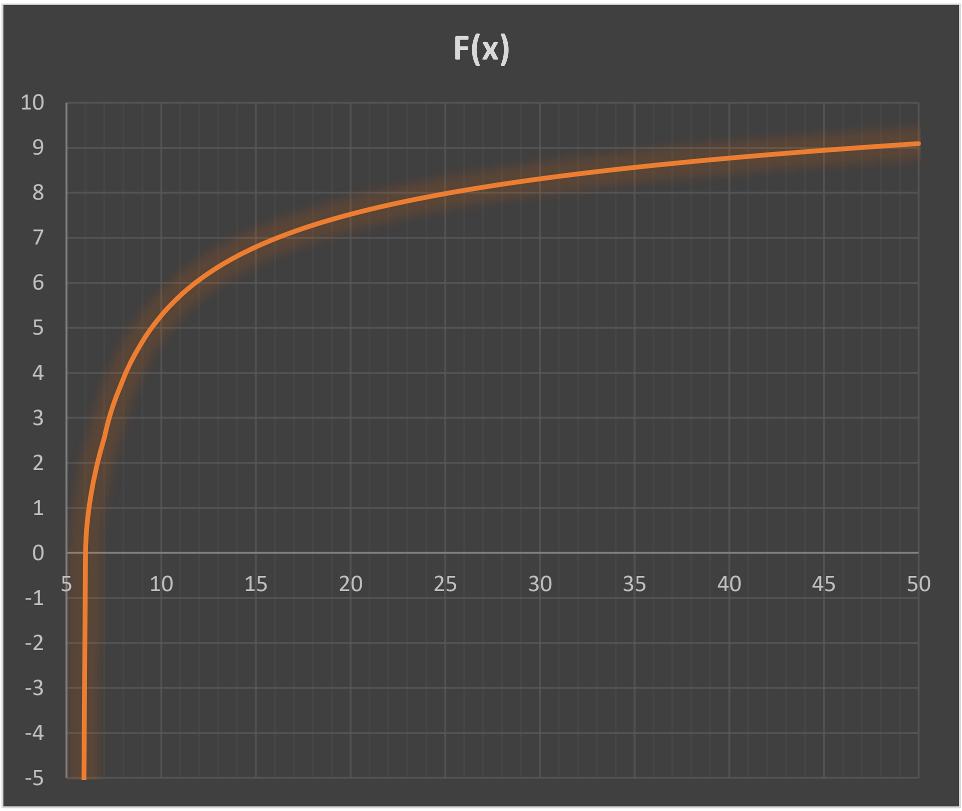
c)

$$\int_6^a f(x)\,dx = [F(x)]_6^a = 5\ln|a-5| - 4\ln|a-2| + 4\ln 4 - 5\ln 1 = \ln\left[\frac{|a-5|^5}{(a-2)^4}\right] + \ln 256$$

Andando per tentativi (da 7 in su), si ottiene un valore pari a *2.5* per *a ≈ 7* (v. tabella del punto d).

d)

x	F(x)
5	-∞
6	0.00
7	2.57
8	3.87
9	4.69
10	5.27
11	5.72
12	6.06
13	6.35
14	6.59
15	6.80
16	6.98
17	7.14
18	7.28
19	7.41
20	7.52
21	7.63
22	7.73
23	7.82
24	7.90
25	7.98
26	8.06
27	8.12
28	8.19
29	8.25
30	8.31
31	8.37
32	8.42
33	8.47
34	8.52
35	8.57
36	8.61
37	8.65
38	8.69
39	8.73
40	8.77
41	8.81
42	8.84
43	8.88
44	8.91
45	8.94
46	8.98
47	9.01
48	9.04
49	9.07
50	9.09



3) STATISTICA

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	36	39	23

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Dati	Media	Varianza campionaria	Dev. Std campionaria
Popolazione (mln ab.)	4.24	4.76	2.18
Omicidi	32.67	72.33	8.50

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} = 10.86$$

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.585$$

La correlazione è quindi di natura moderata e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = 2.282\ x + 22.98}$$