Prova scritta di Analisi Matematica 3 16.06.2025 Sol. 1

1. L'espressione proposta si può immediatamente semplificare:

$$\frac{3(x^4-4y^6)}{x^2+2y^3} = 3\,\frac{(x^2-2y^3)(x^2+2y^3)}{x^2+2y^3} = 3(x^2-2y^3).$$

quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^4-4y^6)}{x^2+2y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3(x^2-2y^3) = 0$$

dato che l'ultima espressione rappresenta una funzione continua in $(0,0)$.

2. Poniamo $g(x,y,z) = x-y+z$ e $h(x,y,z) = x-z-3$ e determiniamo i punti richiesti mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per prima cosa troviamo gli eventuali punti singolari del vincolo, cioè i punti in cui i vettori Dg e Dh sono linearmente indipendenti. Abbiamo $Dg = (1,-1,1)$ e $Dh = (1,0,-1)$, i quali sono linearmente indipendenti. Dunque i punti del vincolo sono tutti regolari e i punti di minimo assoluto devono ricadere tra i punti stazionari vincolati che ora cerchiamo.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \lambda(x-y+z) - \mu(x-z-3)$$

$$L_x = x - \lambda - \mu, \quad L_y = y + \lambda, \quad L_z = z - \lambda + \mu,$$

$$L_\lambda = -(x - y + z), \quad L_\mu = -(x - z - 3).$$

Da cui

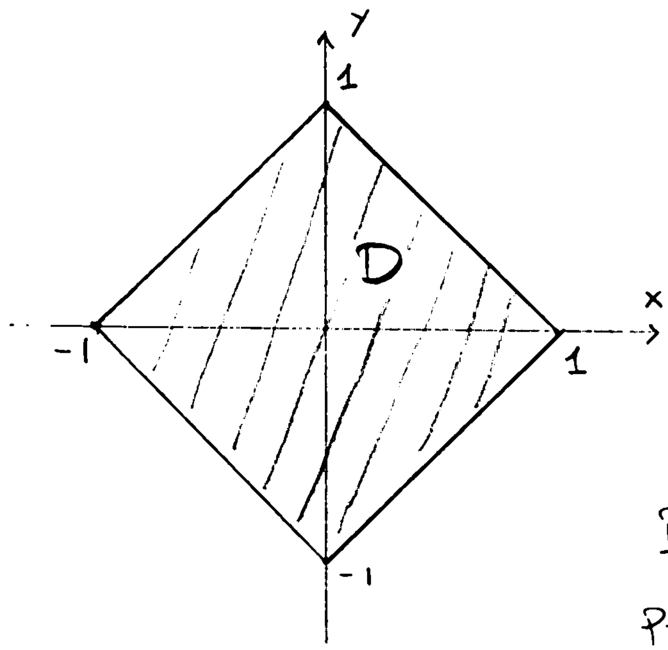
$$DL = 0 \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda \\ z = \lambda - \mu \\ x - y + z = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda \\ z = \lambda - \mu \\ \lambda + \mu + \lambda + \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu - \lambda + \mu - 3 = 0 \end{cases},$$

quindi $3\lambda = 0$ e $2\mu - 3 = 0$, cioè $\lambda = 0$ e $\mu = 3/2$.
Dalle prime tre equazioni ricaviamo subito l'unico punto stazionario vincolato $(3/2, 0, -3/2)$.
Dato che il minimo assoluto esiste (secondo quanto detto dal testo), il punto trovato deve necessariamente essere l'unico punto di minimo assoluto, inoltre il minimo assoluto vale

$$f(3/2, 0, -3/2) = 9/4.$$

Prova scritta di Analisi Matematica 3 16.06.2025 Sol. 3

3. Ponendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \leq y \leq x+1, -x-1 \leq y \leq -x+1\}$,



l'insieme E si scrive come

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$$

che è quindi normale rispetto al piano xy.

Dunque possiamo integrare per segmenti rispetto all'asse z:

$$\iiint_E (x+y)^2 z \, dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^1 (x+y)^2 z \, dz = \iint_D (x+y)^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (x+y)^2 \, dx\,dy.$$

Cambiamo ora le coordinate nel piano xy. Le relazioni che descrivono D si possono scrivere come

$$\begin{cases} -1 \leq y-x \leq 1 \\ -1 \leq y+x \leq 1 \end{cases},$$ le quali suggeriscono la trasformazione

$$\begin{cases} u = y-x \\ v = y+x \end{cases}$$ il cui jacobiano $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

vale -2. Inoltre, ovviamente $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$.

Passando alle nuove variabili nell' integrale doppio, abbiamo

$$dx\,dy = \left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\left(\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\,du\,dv,$$

da cui

$$\iint_D (\overbrace{x+y}^{v})^2\,dx\,dy = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} v^2\,\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\cdot 2 = \frac{2}{3}$$

e infine

$$\iiint_E (x+y)^2 z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}.$$

4.

a) $\varphi_u = (\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ -2\sin u)$

$\varphi_v = (-\sin u\sin v,\ \sin u\cos v,\ 0)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \left(2\sin^2 u\cos v,\ 2\sin^2 u\sin v,\ \sin u\cos u\right)$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sin u\sqrt{4\sin^2 u\cos^2 v + 4\sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u}$$

$$= \sin u\sqrt{4\sin^2 u + \cos^2 u} = \sin u\sqrt{3\sin^2 u + 1}$$

$$> 0 \quad \forall u \in (0,\pi),\ \forall v \in [0,2\pi].$$

Dunque la superficie è regolare.

Inoltre il versore normale è dato da

$$\nu(u,v)=\frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{|\varphi_u\wedge\varphi_v|}=\frac{1}{\sqrt{3\sin^2u+1}}(2\sin u\cos v, 2\sin u\sin v, \cos u).$$

b) L'area di S è espressa dall'integrale

$$\iint_S d\sigma \quad \text{con} \quad d\sigma=|\varphi_u\wedge\varphi_v|\,du\,dv=\sin u\sqrt{3\sin^2u+1}\,du\,dv.$$

Quindi

$$\text{Area}(S)=\iint_S d\sigma=\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\sin u\sqrt{3\sin^2u+1}\,du\,dv=2\pi\int_0^{\pi}\sin u\sqrt{3\sin^2u+1}\,du.$$

Mentre,

$$\iint_S\left(4x^2+4y^2+\frac{1}{4}z^2\right)^{1/2}d\sigma=\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\left(4\sin^2u\cos^2v+4\sin^2u\sin^2v+\cos^2u\right)^{1/2}|\varphi_u\wedge\varphi_v|\,du\,dv$$

$$=\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}(3\sin^2u+1)^{1/2}\sin u\sqrt{3\sin^2u+1}\,du\,dv$$

$$=\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\sin u\,(3\sin^2u+1)\,du\,dv=2\pi\int_0^{\pi}\sin u\,(3\sin^2u+1)\,du$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin u\,(4-3\cos^2u)\,du=2\pi\int_0^{\pi}(3\cos^2u-4)\,d(\cos u)$$

$$= 2\pi\left(\cos^3 u - 9\cos u\right)\Big|_0^{\pi} = 12\pi.$$

5.

a) Abbiamo $dx = dy = dt$ e $dz = 2t\,dt$, da cui

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \left(t^4+1+2t^4-t^2+2(t^3-t+at)t\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(1+(2a-3)t^2+5t^4\right)dt = 1+\frac{2}{3}a.$$

b) La forma ω è definita in tutto $\mathbb{R}^3$, il quale è semplicemente connesso. Dunque ω è esatta se e solo se è chiusa, cioè se valgono le equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2z+1) = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz-z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(y^2z+1) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2-y+ax),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2xyz-z) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2-y+ax),$$

che diventano

$$2yz = 2yz,$$

$$y^2 = y^2+a,$$

$$2xy-1 = 2xy-1.$$

Cioè ω è chiusa, e quindi esatta, se e solo se $a=0$.

Calcoliamo le sue primitive. f è una sua primitiva se, per definizione, è differenziabile e $df=\omega$.

Quest'ultima diventa

$$\begin{cases} f_x = 1+y^2 z \\ f_y = 2xyz - z \\ f_z = xy^2 - y \end{cases}, \quad \begin{cases} f = x + xy^2 z + \varphi(y,z) \\ 2xyz + \varphi_y = 2xyz - z \\ xy^2 + \varphi_z = xy^2 - y \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi_y = -z \\ \varphi_z = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi = -yz + \psi(z) \\ -y + \psi'(z) = -y \end{cases}$$

quindi $\psi(z) = c \in \mathbb{R}$, $\varphi(y,z) = -yz + c$ e la primitive sono date da

$$f(x,y,z) = x + xy^2 z - yz + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$