

Università di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1
12 giugno 2024

Esercizio 1

Sia $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b - d \\ 3c & a - c \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare una base di $\ker(f)$ e di $\text{Im}(f)$
- b) Stabilire se

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : f(A) \text{ è una matrice diagonale}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. In caso affermativo trovare una base di W .

- c) Data l'applicazione lineare $g: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $B' = \{1 + x, x^2, 2x\}$ è

$$M_{B'B}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $(g \circ f) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 & = k \\ x_1 + (k+1)x_3 - kx_4 & = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

Esercizio 3

Sia $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2, e sia $f: V \rightarrow V$ l'endomorfismo definito da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 2b & a + b + c \\ a + b + c & 2b + 4c \end{pmatrix}$$

- a) Determinare gli autovalori di f
- b) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f .