LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1

DEL 12 GIUGNO 2025

ESERCIZIO 1

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b-d \\ 3c & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a \quad +2c \quad = 0 \\ b \quad -d = 0 \\ 3c \quad = 0 \\ a \quad -c \quad = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo, la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Di conseguenza $\mathrm{rg}(A) = 3$, dato che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

Il sistema è dunque equivalente a

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = s \\ 3c = 0 \end{cases} \qquad d = s$$

da cui $c=0$, $a=-2c=0$ e $b=s$.

Quindi $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

$= L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = L\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti (non sono proporzionali).

Chiediamoci se $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, cioè se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3 = 0$ assurdo, quindi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \notin L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Quindi $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e, poiché $\dim(Im(f)) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(Ker(f)) = 4 - 1 = 3$, concludiamo che essi costituiscono una base di $Im(f)$.

b) $\forall A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix} \in W$

$$f(A+B) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} f(A) + f(B) = \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha'&0\\0&\beta'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha+\alpha'&0\\0&\beta+\beta'\end{pmatrix} \text{ matrice diagonale } \Rightarrow$$

$A + B \in W$

$\forall A \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda A) = \lambda \cdot f(A) = \begin{pmatrix}\lambda\alpha&0\\0&\lambda\beta\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda A \in W$

$A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2c&b-d\\3c&a-c\end{pmatrix}$ è matrice diagonale $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} b-d=0 \\ 3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} c=0 \\ b=d \end{matrix}$ Quindi

$W = \left\{\begin{pmatrix}s&t\\0&t\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{s\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\right\}$

$= L\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$. Una base di W è $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

e)

$$M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} \mathbb{R}_2[x]$$

$$\quad B \qquad\qquad\quad B \qquad\qquad\quad B'$$

Troviamo $M_{BB}(f)$, dove $B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_4$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \beta+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \gamma = -1 \\ \beta = 3 \\ \beta + \delta = -1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=-1,\ \delta=-4}}{=} 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 4v_4$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_3$$

$$f(v_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -v_3$$

Quindi $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $M_{BB'}(g \circ f) = M_{BB'}(g) \cdot M_{BB}(f)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_3 + v_4$.

Allora $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot (1+x) + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot 2x$ dove

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot 2x$$

$$= 8x$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x_1 + k x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = k \\ x_1 + (k+1)x_3 - k x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & k+1 & -k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & k \\ 1 & 0 & k+1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Consideriamo gli orlati di tale minore:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & k+1 & -k \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ -k & k+1 & -k \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -k & -k \end{pmatrix}$$

1ª colonna → 1ª − 2ª colonna

$= 0$

$$\det\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & k+1 & -k \end{pmatrix} = k \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ k+1 & -k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$= k(k - 3k - 3) \quad - k$$

$$= k(-2k-3) + k$$

$$= k(-2k-2)$$

Quindi $rg(A) = 3 \iff k \neq 0$ e $k \neq -1$

Controlliamo cosa accade ad $A|B$ per $k=0$ oppure $k=-1$. A tal proposito sarà sufficiente orlare con B il minore di ordine 2 appena considerato.

CASO $k=0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$rg(A|B) = 3$

CASO $k=-1$

due colonne uguali

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow rg(A|B) = 2$$

CONCLUSIONE

- Per $k \neq 0$ e $k \neq -1$ $rg(A) = 3 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni

- Per $k=0$ $rg(A)=2$ e $rg(A|B)=3 \Rightarrow$ sistema incompatibile

- Per $k=-1$ $rg(A) = 2 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Troviamo l'insieme delle soluzioni.

- CASO $k \neq 0, -1$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} k x_2 + x_3 = 1-s \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = k-2s \\ (k+1)x_3 - k x_4 = -s \end{cases} \qquad x_1 = s$$

Si tratta, per costruzione, di un sistema di Cramer:

$$x_2 = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} 1-s & 1 & 0 \\ k-2s & -1 & 3 \\ -s & k+1 & -k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2k(k+1)} \left(k - ks - 3s - 3(1-s)(k+1) + k(k-2s)\right)$$

$$= \frac{1}{-2k(k+1)} \left(k - \cancel{ks} - \cancel{3s} - 3k - 3 + \cancel{3ks} + \cancel{3s} + k^2 - 2ks\right)$$

$$= \frac{k^2-2k-3}{-2k(k+1)} = \frac{(k-3)(k+1)}{-2k(k+1)} = -\frac{k-3}{2k}$$

$$x_3 = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} k & 1-s & 0 \\ 1 & k-2s & 3 \\ 0 & -s & -k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2k(k+1)} \left(-k^2(k-2s) + 3ks + k - ks \right)$$

$$= \frac{1}{-2k(k+1)} k\left(-k(k-2s) + 2s + 1 \right)$$

$$= \frac{k(k-2s) - 2s - 1}{2(k+1)}$$

$$x_4 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{k}\left((k+1)x_3 + s\right) = \frac{1}{k}\left((k+1)\frac{k(k-2s)-2s-1}{2(k+1)} + s\right)$$

dalla terza equazione

$$= \frac{1}{2k}\left(k(k-2s) - \cancel{2s} - 1 + \cancel{2s}\right)$$

$$= \frac{k(k-2s)-1}{2k}$$

Pertanto l'insieme S delle soluzioni è

$$S = \left\{ \left(s, \frac{3-k}{2k}, \frac{k(k-2s)-2s-1}{2(k+1)}, \frac{k(k-2s)-1}{2k}\right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

- CASO $k = -1$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_3 = 1 - s + t \\ -x_3 + 3x_4 = -1 - 2s - t \end{cases} \qquad x_1 = s, \quad x_2 = t$$

Pertanto $x_3 = 1 - s + t$ e

$$x_4 = \frac{1}{3}\left(-1 - 2s - t + 1 - s + t\right) = -s$$

Allora l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(s, t, 1-s+t, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3

a) Si noti che $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Dato che tali matrici sono anche linearmente indipendenti, $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$ è una base di V.

Troviamo $M_{BB}(f)$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4v_1 + v_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 + 2v_3$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = v_2 + 4v_3$$

Quindi

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda) - 2\right) - 2(4-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)\left(\cancel{4} - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - \cancel{2} - \cancel{2}\right)$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda)$$

$$= \lambda(4-\lambda)(\lambda-5)$$

Ci sono dunque 3 autovalori reali e distinti: 0, 4, 5, tutti con molteplicità algebrica 1.

b) Poiché ci sono $3 = \dim(V)$ autovalori reali e distinti, concludiamo che f è diagonalizzabile.

Troviamo una base di ciascun autospazio.

• $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(0) \iff f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4a+2b & a+b+c \\ a+b+c & 2b+4c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$

rango $= 2$

$\iff \begin{cases} a + b = -t \\ b = -2t \end{cases} \iff c = t,\ b = -2t,\ a = t$

$c = t$

Quindi $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} t & -2t \\ -2t & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(4) \iff f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{pmatrix} 4a+2b & a+b+c \\ a+b+c & 2b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4b & 4c \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 4a+2b = 4a \\ a+b+c = 4b \\ 2b+4c = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = 0 \\ a-3b+c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a-3b = -t \end{cases} \quad c=t$$

$\iff c=t,\ b=0,\ a=-t$

Quindi $V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(5) \iff f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{pmatrix} 4a+2b & a+b+c \\ a+b+c & 2b+4c \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4a+2b = 5a \\ a+b+c = 5b \\ 2b+4c = 5c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a+2b = 0 \\ a-4b+c = 0 \\ 2b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rango} = 2$$

$c=t$

$$\iff \begin{cases} a-4b = -t \\ 2b = t \end{cases} \iff c=t,\ b=\frac{t}{2},\ a=t$$

Quindi $V(5) = \left\{ \begin{pmatrix} t & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Una base di V formata da autovettori di f è allora

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$