Problema 1.

Dato un insieme X per ogni $A \in P(X)$ definiamo la funzione caratteristica $\chi_A : X \to \{0,1\}$ di A come $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A\,. \end{cases}$

Dimostrare che la funzione $\varphi : P(X) \to 2^X = \{f : X \to \{0,1\} \colon f \text{ funzione}\}$ definita da $\varphi(A) = \chi_A$, dove χ_A è la funzione caratteristica di A, è iniettiva e suriettiva.

Problema 2.

Usando il principio di induzione mostrare che un insieme X con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Problema 3.

Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Sia $a \in A$ tale che per ogni $x \in A$ il sottoinsieme $\{a, x\}$ ha estremo superiore. Si dimostri che a è confrontabile con ogni elemento massimale b di A.

Problema 4.

Siano a, b due interi. Dal Teorema della Divisione Euclidea segue che

$$a = bq + r \quad q \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq r < |b|$$

Dimostrare che $(a, b) = (b, r)$.

Problema 5.

Si definisca la relazione R su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come segue

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \quad \text{ o } \quad a^2 + b^2 < c^2 + d^2.$$

Mostrare che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, R)$ è un insieme parzialmente ordinato.

Problema 6.

Sia $a \in \mathbb{N}$ un numero naturale e si consideri il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv_3 a \\ ax \equiv_3 a \end{cases}$$

Determinare per quali valori di a il sistema ammette soluzioni.