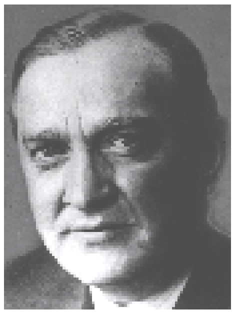
Leonida Tonelli
(1885–1946)



Stefan Banach
(1892–1945)

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI E QUESTIONI CONNESSE

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari

29-5-2025

Indice generale

Motivazioni

I punti deboli dei metodi classici

I metodi classici, basati sull'equazione di Eulero, presentano due punti deboli (cf. pag. Mc39):

1) non è detto che le soluzioni dell'equazione di Eulero siano minimanti per il funzionale associato;

2) non è detto che le soluzioni dell'equazione di Eulero associata ad un dato funzionale si riescano a trovare!

Vediamo una strategia per superare il punto debole n. 1.

La convessità del funzionale

La più semplice condizione sufficiente che garantisce che un'estremale di un funzionale dato sia anche una minimante è probabilmente la convessità del funzionale stesso: vedere a pag. Mc44.

La convessità del funzionale sussiste nel caso particolare del problema della brachistocrona descritto a pag. Mc52.

In generale, tuttavia, il funzionale tempo di transito (4) a pag. Mc7 non è convesso.

Perciò l'esistenza di una soluzione del problema della brachistocrona si dimostra, in generale, con altri metodi.

Semplici funzionali convessi

Sono convessi, ad esempio, i seguenti funzionali: il funzionale di Dirichlet

$$F[u] = \int_a^b (u'(x))^2\,dx; \tag{1}$$

il funzionale lunghezza del grafico

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx \tag{2}$$

ed il funzionale

$$F_p[u] = \int_a^b |u'(x)|^p\,dx$$

per $p > 1$. Per la verità quest'ultimo è convesso anche per $p = 1$, ma in tal caso la lagrangiana $f(t) = |t|$ non è derivabile per $t = 0$.

Non è convesso il funzionale del problema di Newton del corpo di minima resistenza (pag. Mc11).

Altre condizioni sufficienti

Sono note altre condizioni che assicurano che una soluzione dell'equazione di Eulero sia una minimante del funzionale associato: vedere, ad esempio, [9] e [19].

Cenni storici sulla ricerca di condizioni sufficienti si possono trovare in [24]: a pag. 688 e alle pagg. 869–874.

DIFFICOLTÀ DELL'EQUAZIONE DI EULERO

Il secondo punto debole citato alla pagina precedente riguarda la difficoltà di risolvere l'equazione di Eulero di certi funzionali.

Ciò e particolarmente vero in dimensione $N \geq 2$, quando l'equazione di Eulero è un'equazione alle derivate parziali.

Ad esempio, l'equazione di Eulero del funzionale di Dirichlet

$$F[u] = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{3}$$

è l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$, le cui soluzioni sono difficili da trovare quando Ω è un generico dominio N-dimensionale, $N \geq 2$.

Un altro esempio è il cosiddetto funzionale dell'area, dato da

$$J[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x,y)|^2} \, dx \, dy, \tag{4}$$

la cui equazione di Eulero è

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x,y)|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x,y)|^2}} = 0,$$

dove u_x e u_y denotano, rispettivamente, le derivate parziali di u rispetto ad x ed y.

Tale equazione esprime il fatto che la curvatura media del grafico di u è identicamente nulla.

NON ESISTENZA DEL MINIMO

Si badi che, anche quando un dato funzionale ha un significato notevole, come il funzionale J nella (4), ed il dominio Ω è particolarmente semplice, come la corona circolare

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_0^2 < x^2 + y^2 < 1 \},$$

il minimo può benissimo non esistere: è questo il caso, ad esempio, se la funzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$ è soggetta alle semplici condizioni al contorno

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x^2 + y^2 = R_0^2, \\ 1, & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

In tal caso la non esistenza del minimo del funzionale J si può dimostrare procedendo come negli esercizi della serie [202].

In sintesi, l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale J non possiede soluzioni soddisfacenti le suddette condizioni al contorno.

Con lo stesso procedimento si può dimostrare che, se Ω è il disco puntato

$$\Omega = B_1(0,0) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

e la funzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$ è soggetta alle condizioni al contorno

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x^2 + y^2 = 0, \\ 1, & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

il funzionale F nella (3) non ammette minimo. Si noti però che il disco puntato non è un dominio regolare.

Le successioni minimizzanti

IL TEMA DI QUESTA DISPENSA

In questa dispensa, fra i vari metodi sviluppati per dimostrare l'esistenza del minimo dei funzionali, ci concentriamo sul cosiddetto "metodo diretto".

Motivo di questa scelta è che l'argomento costituisce occasione per studiare i primi rudimenti dell'analisi funzionale.

In particolare, utilizzeremo spazi vettoriali di dimensione infinita (gli spazi funzionali) e scopriremo notevoli differenze rispetto allo spazio euclideo.

Una di esse è che i sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio funzionale possono benissimo non essere compatti (v. pag. Md42) e ciò si ripercuote sull'esistenza del minimo dei funzionali.

SUCCESSIONI MINIMIZZANTI

Il concetto alla base del metodo diretto è quello di "successione minimizzante". Consideriamo una funzione $F\colon X \to \mathbb{R}$ avente per dominio un insieme qualunque X, e a valori reali.

DEFINIZIONE. Una qualunque successione di elementi $u_n \in X$ si dice "successione minimizzante" se

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = \inf F, \tag{5}$$

e "successione massimizzante" se

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = \sup F.$$

OSSERVAZIONE

Per sgombrare il campo da possibili equivoci, conviene fare subito la seguente fondamentale osservazione.

Se sappiamo che una data funzione F ammette minimo, e conosciamo una minimante u_0, possiamo immediatamente scrivere una successione minimizzante ponendo

$$u_n = u_0 \text{ per ogni } n > 0. \tag{6}$$

ESEMPI

Se X è l'insieme delle figure piane limitate e dal contorno regolare a tratti e di lunghezza 2π, la successione

$$u_n = \text{cerchio di raggio } 1$$

è una successione massimizzante per la funzione $F[u] =$ area della figura u.

Similmente, se $X = \{\, u \in C^1([a,b]) \mid u(a) = u_a,\ u(b) = u_b \,\}$ ed F è il funzionale di Dirichlet (1), la successione

$$u_n(x) = \frac{u_b - u_a}{b - a}\,(x - a) + u_a$$

è una successione minimizzante.

ESISTENZA DI UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE

L'importanza delle successioni minimizzanti è rilevante nel caso in cui non si conosca il minimo di un funzionale e se ne voglia stabilire l'esistenza.

Possiamo, infatti, dimostrare che una successione minimizzante esiste in ogni caso.

Sia $F\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione avente per dominio un insieme qualunque X, e a valori reali.

Dimostriamo che esiste una successione minimizzante. Esaminiamo per primo il caso più significativo:

$$\inf F > -\infty.$$

Per ogni intero $n > 0$, il numero

$$\frac{1}{n} + \inf F$$

che è più grande di $\inf F$, non è un minorante di F perché $\inf F$ è il minorante più grande.

Non essere un minorante significa che esiste almeno un elemento $u_n \in X$ tale che

$$F[u_n] < \frac{1}{n} + \inf F.$$

Tale disuguaglianza, unitamente al fatto che $F[u_n] \geq \inf F$ per ogni n, implica la (5).

Nel caso in cui $\inf F = -\infty$, l'esistenza di una successione minimizzante segue dal fatto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste almeno un $u_n \in X$ tale che $F[u_n] < -n$.

IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE

La definizione di successione minimizzante richiede l'esistenza del limite della successione numerica $(F[u_n])$, e non riguarda l'eventuale limite della successione u_n.

In altri termini, l'eventuale topologia del dominio X non interviene.

ESEMPI

Per fare un semplice esempio, si indichi con X l'insieme degli studenti del corso, e con $F[u]$ l'età dello studente $u \in X$.

Indicato con u_0 lo studente più giovane, una successione minimizzante si può definire come nella (6), a prescindere da quale sia la topologia dell'insieme X degli studenti...

Semplici esempi numerici mostrano che le successioni minimizzanti possono benissimo non avere limite: si pensi alla successione

$$x_n = (-1)^n \pi, \tag{7}$$

che è una successione minimizzante per la funzione $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$, o alla successione

$$x_n = (-1)^n n, \tag{8}$$

che è una successione minimizzante per la funzione $F(x) = e^{-x^2}$. Entrambe le successioni non hanno limite.

USO DELLE SUCCESSIONI MINIMIZZANTI

Per dimostrare l'esistenza del minimo di un funzionale con il metodo diretto del calcolo delle variazioni si considera innanzitutto, sul piano puramente concettuale, una successione minimizzante u_n, la cui esistenza è garantita in generale.

Dopodiché si cerca di dimostrare che, al di là di quanto asserisce la definizione, la successione (u_n) converge essa stessa, o almeno possiede una sottosuccessione (u_{n_k}) convergente rispetto ad un'opportuna topologia del dominio X.

L'aspettativa, tutta da dimostrare, è che il limite u_0 della sottosuccessione (u_{n_k}) sia una minimante del funzionale F.

Ad esempio, la successione (x_n) nella (7) possiede la sottosuccessione $x_{2n} = \pi$, che evidentemente converge ad $x_0 = \pi$, punto di minimo della funzione $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Invece, la successione (x_n) nella (8) non possiede alcuna sottosuccessione convergente, e la funzione $F(x) = e^{-x^2}$ non ammette minimo sull'insieme $X = \mathbb{R}$.

METODO, O METODI ?

Talvolta si parla di "metodo diretto", al singolare, come nelle dispense del prof. Freddi.

Altre volte si parla di "metodi diretti", al plurale, come nei celebri trattati di Dacorogna [13] e di Giusti [21].

A mio parere chi usa il singolare lo fa perché il ruolo della successione minimizzante, nella dimostrazione di esistenza del minimo, è sempre quello accennato nel paragrafo precedente.

Chi, invece, usa il plurale, sta pensando che per costruire una successione minimizzante particolare a partire da un dato funzionale si può procedere in diversi modi.

Ciò è vero anche in analisi numerica, quando un singolo termine $u_{\overline{n}}$, con $\overline{n}$ sufficientemente grande, di un'opportuna successione minimizzante viene usato come approssimazione della minimante u_0.

In tal caso, i metodi per costruire $u_{\overline{n}}$ sono piuttosto diversi sia dal punto di vista del costo computazionale che dell'accuratezza ottenuta.

RIFRAZIONI MULTIPLE

Per illustrare il concetto di successione minimizzante, sviluppiamo un esempio ispirato al metodo utilizzato da Johann Bernoulli per risolvere il problema della brachistocrona.

In sintesi, Bernoulli pensa lo spazio suddiviso in infiniti strati orizzontali di spessore infinitesimo e diverso indice di rifrazione, e determina il percorso di un raggio di luce da O a B:

Si nunc concipiamus medium non uniformiter densum, sed velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum... [17, pag. 41].

In questa sede, fissato il punto $B = (b, u_b)$ con $u_b < 0 < b$, suddividiamo lo spazio in strati orizzontali di spessore finito $h_n = |u_b|/n$.

Si può dimostrare che esiste una ed una sola funzione $u_n \colon [0, b] \to [u_b, 0]$ continua, convessa, lineare a tratti, strettamente decrescente, che soddisfa la legge di Snell della rifrazione nel senso seguente.

1. Indichiamo con $x_{nk} \in [0, b]$, per $k = 0, \ldots, n$, l'unico punto tale che $u_n(x_{nk}) = -kh$. In particolare, risulta $x_{n0} = 0$ e $x_{nn} = b$.

2. Per ogni $k = 1, \ldots, n$, la funzione $u_n(x)$ ristretta all'intervallo $I_k = [x_{n,k-1}, x_{nk}]$ ha equazione

$$u_n(x) = m_{nk}\,(x - x_{nk}) - k\,h_n.$$

3. I coefficienti angolari $m_{nk} < 0$ sono tali che, indicato con $i_{nk} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} m_{nk}$ l'angolo con la verticale, per ogni $k = 1, \ldots, n-1$ risulta

$$\frac{\operatorname{sen} i_{nk}}{\operatorname{sen} i_{n,\,k+1}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}.$$

Quando n tende a $+\infty$ la funzione u_n converge decrescendo, e localmente uniformemente ad una funzione u_0 il cui grafico, se $u_b/b < -2/\pi$, è l'unica cicloide avente una cuspide in O e passante per B.

In tal caso, procedendo come in [22], si può dimostrare che, indicato con F il funzionale tempo di transito

$$F[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2g\,|u(x)|}}\,dx,$$

risulta $F[u_n] \to F[u_0] = \min F$, e perciò la successione (u_n) è una successione minimizzante per tale funzionale.

Si badi che la costruzione di una successione minimizzante in un caso come il presente, ove si conosce il minimo del funzionale, ha valore puramente didattico ed illustrativo: vedere l'osservazione a pag. Md7.

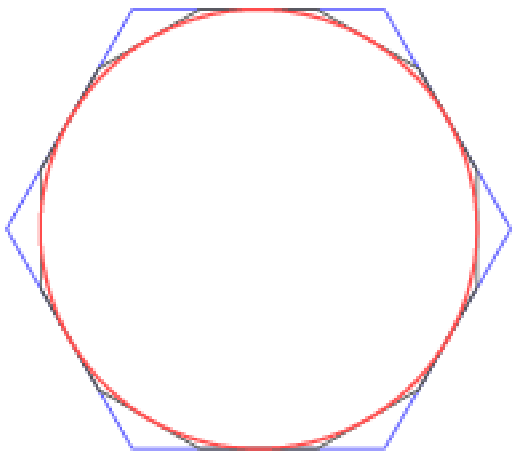
UN ESEMPIO GEOMETRICO

Indichiamo con $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ il disco di raggio unitario centrato nell'origine, e con X l'insieme dei poligoni $\Omega \supset B_1$.

Verifichiamo che la funzione $F\colon X \to \mathbb{R}$ data da $F(\Omega) = |\Omega|$ (area del poligono Ω) non ammette minimo, e risulta

$$\inf_{\Omega \in X} F(\Omega) = \pi. \tag{9}$$

Verifichiamo inoltre che una successione minimizzante (Ω_n) si ottiene ponendo, per $n \geq 3$, Ω_n = ennagono di apotema unitario, centrato nell'origine.



Per la dimostrazione osserviamo innanzitutto che, siccome $\Omega \supset B_1$ per ogni $\Omega \in X$, si ha $F(\Omega) \geq |B_1| = \pi$, dunque π è un minorante.

Per escludere l'esistenza di minoranti più grandi di π ci serviamo della successione Ω_n: si ha, infatti,

$$\lim_{n \to +\infty} F(\Omega_n) = \lim_{n \to +\infty} n \operatorname{tg} \tfrac{\pi}{n} = \pi$$

e perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esistono poligoni $\Omega_n \in X$ tali che

$$F(\Omega_n) < \pi + \varepsilon,$$

dunque $\pi + \varepsilon$ non è un maggiorante.

Questo ragionamento dimostra allo stesso tempo che vale la (9), e che la successione considerata è una successione minimizzante.

In generale, trovare esplicitamente una successione minimizzante può servire per dimostrare che un dato minorante è l'estremo inferiore.

Gli albori del metodo diretto

RIFERIMENTO BIBLIOGRAFICO

L'espressione "The dawn of the direct methods" è il titolo del paragrafo 1.2 della dispensa [31] di Augusto Ponce in cui si accenna ad opere di Hilbert.

IL PROBLEMA DI DIRICHLET

Uno dei più classici problemi della fisica matematica è il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega; \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Esso consiste nel trovare una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, armonica nell'aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, che coincide sul contorno di Ω con una funzione data φ.

Si dimostra che se Ω è un dominio ($=$ aperto connesso) limitato e regolare, e se φ è continua, allora tale problema possiede una e una sola soluzione [20, Theorem 2.14].

IL METODO VARIAZIONALE

Fra i vari metodi sviluppati per dimostrare l'esistenza di una soluzione, esaminiamo il metodo variazionale.

Si tratta di verificare che il funzionale di Dirichlet (3) ammette minimo in un'opportuna classe di funzioni: poniamo ingenuamente $X = \{\, u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \,\}$.

Se il funzionale F ammette una minimante u_0, allora essa soddisfa l'equazione di Eulero $\Delta u = 0$ in Ω.

GLI ALBORI DEL METODO DIRETTO

Sia (u_n) una successione minimizzante per il funzionale di Dirichlet $F[u] = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$, che è inferiormente limitato. Si ha, dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} = I \geq 0 \tag{11}$$

dove

$$I^2 = \inf_{u \in X} F[u].$$

Per l'identità del parallelogramma (v. pag. Md26) possiamo scrivere

$$\left\| \frac{\nabla u_n + \nabla u_k}{2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\nabla u_n - \nabla u_k}{2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Si ha inoltre $\frac{u_n+u_k}{2} \in X$ (la classe X è convessa), e perciò

$$I^2 \leq \left\| \frac{\nabla u_n + \nabla u_k}{2} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ne segue che

$$I^2 + \left\| \frac{\nabla u_n - \nabla u_k}{2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Passando al limite per $n, k \to +\infty$, e ricordando la (11) si trova

$$\lim_{n,k\to+\infty} \left\| \frac{\nabla u_n - \nabla u_k}{2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Dunque la successione (∇u_n) è di Cauchy in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (v. pag. Md30) e quindi converge ad una certa funzione $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, ma non sappiamo se u_n converge in $C^2(\overline{\Omega})$.

LO SPAZIO $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Per poter recuperare il ragionamento appena interrotto si suole introdurre lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

DEFINIZIONE. Lo spazio $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ è il sottoinsieme di $L^2(\Omega)$ costituito dalle funzioni u le cui derivate parziali prime, intese nel senso delle distribuzioni, sono rappresentate da funzioni di $L^2(\Omega)$.

In $W^{1,2}(\Omega)$ si definisce il prodotto scalare $(u_1|u_2)_{W^{1,2}(\Omega)}$ ponendo

$$(u_1|u_2)_{W^{1,2}(\Omega)} = (u_1|u_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u_1|\nabla u_2)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Dal teorema di Fischer-Riesz segue che $W^{1,2}(\Omega)$ è completo, dunque è uno spazio di Hilbert (v. pag. Md35).

LO SPAZIO $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$

Per esprimere la condizione al contorno $u = \varphi$ del problema di Dirichlet si introduce lo spazio di Hilbert $W^{1,2}_0(\Omega)$:

DEFINIZIONE. Lo spazio $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$ è costituito da $C^\infty_c(\Omega)$, più tutte le funzioni di $W^{1,2}(\Omega)$ che si possono approssimare bene quanto si vuole, nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$, con funzioni di $C^\infty_c(\Omega)$.

Si suole dire che $W^{1,2}_0(\Omega)$ è il completamento (= la chiusura) di $C^\infty_c(\Omega)$ nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$.

Gli elementi di $W^{1,2}_0(\Omega)$ rappresentano le funzioni di $W^{1,2}(\Omega)$ "nulle sul contorno di Ω."

LE FUNZIONI AMMISSIBILI

Si definisce lo spazio X delle funzioni ammissibili ponendo $X = \{\, u \in W^{1,2}(\Omega) \mid u - \varphi \in W^{1,2}_0 \,\}$.

Ciò presuppone che la funzione φ sia definita in tutto Ω, non solo sul contorno, ed appartenga a $W^{1,2}(\Omega)$.

Per costruzione, lo spazio X è convesso e anche chiuso nella topologia di $W^{1,2}(\Omega)$.

LA DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

Si dimostra che, se Ω è limitato, esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni funzione $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ risulta

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Tale disuguaglianza implica che se la successione dei gradienti ∇u_n di funzioni $u_n \in X$ è di Cauchy in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora la successione (u_n) è di Cauchy in $L^2(\Omega)$. Si ha infatti

$$u_n - u_k \;=\; u_n - \varphi - (u_k - \varphi)$$

quindi $u_n - u_k \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Ma allora, per la disuguaglianza di Poincaré, risulta

$$\|u_n - u_k\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u_n - \nabla u_k\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

da cui segue l'asserto.

Quindi, procedendo come a pagina Md13, possiamo concludere che qualunque successione minimizzante per il funzionale di Dirichlet nello spazio X (definito come sopra) ammette limite in X.

Continuità del funzionale

Si verifica facilmente che il funzionale di Dirichlet è continuo rispetto alla norma di $W^{1,2}(\Omega)$.

Infatti, se $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$, allora ricordando che

$$\begin{aligned}&\Big| \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \Big| \\ &\leq \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\end{aligned}$$

si deduce che

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{\mathbb{R}} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)},$$

e cioè

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = F[u_0], \tag{12}$$

come volevasi dimostrare.

Esistenza del minimo

Dimostriamo che il funzionale di Dirichlet ammette minimo nella classe X definita a pag. Md14.

Prendiamo (sul piano teorico) una successione minimizzante (u_n).

Essendo fondamentale, la successione minimizzante converge ad una certa funzione $u_0 \in X$ nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$.

Poiché il funzionale F è continuo rispetto alla norma di $W^{1,2}(\Omega)$, vale la (12).

Ma la successione minimizzante, per definizione, è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = \inf_{u\in X} F[u].$$

Confrontando quest'ultima uguaglianza con la (12), per l'unicità del limite si deduce che

$$F[u_0] = \inf_{u\in X} F[u],$$

dunque la funzione u_0 (non meglio precisata) è una minimante.

Armonicità debole

Con il metodo variazionale si dimostra che il funzionale di Dirichlet ammette una minimante u_0 nella classe X data a pag. Md14.

È facile dimostrare che u_0 soddisfa in senso debole l'equazione $\Delta u = 0$, cioè risulta

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi \, dx = 0 \text{ per ogni } \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Infatti $u_0 + t\varphi \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $F[u_0] \leq F[u_0 + t\varphi]$. Sapendo che $F[u] = (\nabla u|\nabla u)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}$, la disuguaglianza diventa $0 \leq$

$$2t\,(\nabla u_0|\nabla\varphi)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} + t^2\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Per l'arbitrarietà di t si deduce $(\nabla u_0|\nabla\varphi)_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} = 0$, che è la tesi.

Lemma di Weyl-Caccioppoli

Quanto alla regolarità della minimante u_0, in base al suddetto metodo sappiamo solo che $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$.

Si può dimostrare che u_0 è regolare in Ω, ed è una funzione armonica, usando il lemma di Weyl-Caccioppoli: vedere ad esempio [7, pagg. 4-5], [29, Theorem 2.3.1], [31, Theorem 1.9] e [32, Lemma 9.8].

Infine, per verificare che la minimante u_0 è continua nella chiusura $\overline{\Omega}$, e coincide con φ sul contorno, si usano opportune funzioni ausiliarie, dette barriere.

Avvertenza

La soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ del problema (10) non sempre si può trovare con il metodo variazionale: può infatti avvenire che $u \notin W^{1,2}(\Omega)$ perché $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$.

Un esempio in tal senso, attribuito a Jacques Hadamard, si trova in [11, pag. 10], in [29, pag. 6] ed in [32, pag. 201].

Proprietà della media

Verifichiamo che se una funzione $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ è armonica in senso debole in un aperto Ω, allora ha la proprietà della media.

Più esattamente, verifichiamo che u_0 può essere modificata su di un insieme di misura nulla e cambiata così in una funzione avente la proprietà della media.

Prendiamo spunto dall'articolo [7] di R. Caccioppoli. Fissato $x_0 \in \Omega$, poniamo

$$R_0 = \sup_{B(x_0,R)\subset\Omega} R \leq +\infty.$$

Per ogni $R \in (0, R_0)$ possiamo prendere come funzione test $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ la funzione $\varphi(x) = \psi(|x - x_0|)$, dove

$$\psi(r) = \begin{cases} (R^2 - r^2)^2, & r \in [0, R); \\ 0, & r \geq R. \end{cases}$$

Si ha, ovviamente, $\psi'(r) = -4r\,(R^2 - r^2)$ per $r \in (0, R)$. Quindi, passando a coordinate polari, per il teorema di Fubini si può scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi\, dx \\ &= -\int_0^R r\,(R^2 - r^2)\, I(r)\, dr \end{aligned} \tag{13}$$

dove la funzione

$$I(r) = \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u_0}{\partial r}(x)\, d\Sigma$$

è ben definita per quasi ogni r in virtù dello stesso teorema di Fubini.

L'uguaglianza (13) vale per ogni $R \in (0, R_0)$ perché il teorema di Fubini vale per ogni R. Conviene scriverla nella forma

$$R^2 \int_0^R r\, I(r)\, dr = \int_0^R r^3\, I(r)\, dr.$$

Così si vede che per quasi ogni R si possono derivare ambo i membri, ottenendo

$$2R \int_0^R r\, I(r)\, dr + R^3\, I(R) = R^3\, I(R)$$

dunque

$$\int_0^R r\, I(r)\, dr = 0 \text{ per quasi ogni } R$$

e di conseguenza $I(r) = 0$ per quasi ogni $r \in (0, R_0)$. Il ruolo della funzione φ termina a questo punto.

Ora cambiamo u_0 su di un insieme di misura N-dimensionale nulla affinché $u_0(R\omega)$ sia assolutamente continua rispetto ad R per quasi ogni $\omega \in \partial B(x_0, 1)$.

Con il cambiamento di variabile $x = r\omega$ possiamo scrivere

$$I(r) = r^{N-1} \int_{\partial B(x_0,1)} \frac{\partial u_0}{\partial r}(r\omega)\, d\omega$$

e perciò l'integrale al secondo membro è nullo per quasi ogni r.

La derivata $\partial u_0/\partial r$ appartiene a $L^2(B(x_0,R) \setminus B(x_0,\varepsilon_0))$ per ogni $\varepsilon_0 \in (0,R)$ in quanto $\nabla u_0 \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$: vedere in proposito [5, Proposizione IX.6] (cambiamento di variabile).

Perciò possiamo applicare il teorema di Fubini e scrivere

$$\int_{\partial B(x_0,1)} \left(\int_{\varepsilon_0}^{R} \frac{\partial u_0}{\partial r}(r\omega)\, dr \right) d\omega = \int_{\varepsilon_0}^{R} \left(\int_{\partial B(x_0,1)} \frac{\partial u_0}{\partial r}(r\omega)\, d\omega \right) dr = 0.$$

D'altro canto, essendo $u_0(r\omega)$ assolutamente continua rispetto ad r, risulta

$$\int_{\varepsilon_0}^{R} \frac{\partial u_0}{\partial r}(r\omega)\, dr = u_0(R\omega) - u_0(\varepsilon_0\, \omega)$$

e perciò possiamo concludere che

$$\int_{\partial B(x_0,1)} u_0(R\omega)\, d\omega = \int_{\partial B(x_0,1)} u_0(\varepsilon_0\, \omega)\, d\omega.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni R, si deduce che l'integrale

$$\int_{\partial B(x_0,1)} u_0(R\omega)\, d\omega = \frac{1}{R^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,R)} u_0(x)\, d\Sigma \quad (14)$$

è costante rispetto ad R: questa è una delle formulazioni della proprietà della media che volevamo dimostrare.

Da essa discende immediatamente un'altra formulazione: essendo $u_0 \in L^2(\Omega)$, per il teorema di Fubini si ha, per ogni $R \in (0,R_0)$

$$\int_{B(x_0,R)} u_0(x)\, dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x_0,r)} u_0(x)\, d\Sigma \right) dr.$$

Ma allora, posto

$$C = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u_0(x)\, d\Sigma,$$

si trova

$$\frac{1}{R^N} \int_{B(x_0,R)} u_0(x)\, dx = \frac{1}{R^N} \int_0^R C\, r^{N-1}\, dr = \frac{C}{N},$$

Dunque la media integrale di u_0 su due palle qualunque concentriche è la stessa: questa è un'altra formulazione della proprietà della media.

D'altra parte, per il teorema di differenziazione di Lebesgue, la funzione u_0 coincide per quasi ogni x_0 con il limite

$$\lim_{R \to 0^+} \frac{1}{|B(x_0,R)|} \int_{B(x_0,R)} u_0(x)\, dx,$$

che è un limite banale perché è il limite di una costante.

Essendo l'integrale al secondo membro una funzione continua del punto x_0, ne segue che, modificando ancora una volta la funzione u_0 su di un insieme di misura nulla, si può fare sì che risulti

$$u_0(x_0) = \lim_{R \to 0^+} \frac{1}{|B(x_0,R)|} \int_{B(x_0,R)} u_0(x)\, dx$$

per ogni x_0, e u_0 sia continua.

Teorema della proiezione

Il procedimento usato a pag. Md15 per dimostrare l'esistenza del minimo del funzionale di Dirichlet si può riformulare in astratto come segue (v. [5, Teorema V.2] e [23]).

Sia H uno spazio di Hilbert, ed $X \subset H$ un suo sottoinsieme (non vuoto) convesso e chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\| \ \|_H$ (v. pag. Md14).

Per ogni $h \in H$ esiste uno e un solo $u_0 \in X$ tale che

$$\|u_0 - h\|_H = \min_{u \in X} \|u - h\|_H. \tag{15}$$

Inoltre l'elemento u_0 soddisfa la "disuguaglianza variazionale"

$$((u_1 - u_0) \mid (u_0 - h)) \geq 0 \quad \forall u_1 \in X. \tag{16}$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione minimizzante (u_n) per la funzione $F \colon X \to \mathbb{R}$ data da

$$F[u] = \|u - h\|_H^2.$$

Si ha, dunque

$$\lim_{n \to +\infty} F[u_n] = I^2 \tag{17}$$

dove I è dato da

$$I = \inf_{u \in X} \|u - h\|_H.$$

Per l'identità del parallelogramma, applicata a $u_n - h$ e $u_k - h$, si ha

$$\left\| \frac{u_n + u_k}{2} - h \right\|_H^2 + \left\| \frac{u_n - u_k}{2} \right\|_H^2 = \frac{1}{2} F[u_n] + \frac{1}{2} F[u_k].$$

Inoltre, essendo X convesso, risulta $\frac{u_n + u_k}{2} \in X$ e perciò

$$I^2 \leq \left\| \tfrac{u_n + u_k}{2} - h \right\|_H^2.$$

Ne segue che

$$\left\| \tfrac{u_n - u_k}{2} \right\|_H^2 \leq \frac{1}{2} F[u_n] + \frac{1}{2} F[u_k] - I^2.$$

Passando al limite per $n, k \to +\infty$, e ricordando la (17) si trova

$$\lim_{n,k \to +\infty} \|u_n - u_k\|_H^2 = 0.$$

Dunque la successione (u_n) è di Cauchy in H e quindi converge ad una certa funzione $u_0 \in H$. Essendo X chiuso per ipotesi, e $u_n \in X$ per ogni n, si conclude che $u_0 \in X$.

Infine, essendo la funzione F continua, si ha $\lim_{n \to +\infty} F[u_n] = F[u_0]$. Confrontando quest'ultima uguaglianza con la (17) si giunge alla (15).

Per verificare la (16) si usa il metodo ideato da Lagrange per ricavare l'omonima equazione: fissato $u_1 \in X$, l'elemento

$$u_t = (1 - t)\, u_0 + t\, u_1, \qquad t \in [0, 1]$$

appartiene ancora ad X per convessità. Dunque la funzione $\varphi(t) = F[u_t] = (u_t - h \mid u_t - h)$, $t \in [0, 1]$, ha un minimo in $t = 0$. Siccome

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|u_t\|_H^2 - 2\,(u_t|h) + \|h\|_H^2; \\
\|u_t\|_H^2 &= (1-t)^2\, \|u_0\|_H^2 \\
&\quad + 2t\,(1-t)\,(u_0|u_1) + t^2\, \|u_1\|_H^2; \\
(u_t|h) &= (1-t)\,(u_0|h) + t\,(u_1|h),
\end{aligned}$$

si trova $\varphi'(0^+) = 2\,(u_0 - u_1 \mid u_1 - h)$. La condizione $\varphi'(0^+) \geq 0$ implica la (16). Se per assurdo u_1 è un altro punto di minimo di $F[u]$, vale la disuguaglianza

$$((u_0 - u_1) \mid (u_1 - h)) \geq 0,$$

la quale, sommata con la (16), implica $\|u_0 - u_1\|_H^2 = 0$, dunque $u_1 = u_0$.

IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

Sappiamo che le applicazioni lineari $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hanno la forma $L(x,y,x) = ax + by + cz$ e perciò si possono esprimere come prodotto scalare

$$L(x,y,z) = (x,y,z)\cdot(a,b,c).$$

L'enunciato si estende agli spazi di Hilbert di dimensione infinita, a condizione che l'applicazione L oltre ad essere lineare sia anche continua (il che non è detto in dimensione infinita).

Sia $L\colon H \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare e continua avente per dominio uno spazio di Hilbert H. Allora esiste uno ed un solo $v_0 \in H$ tale che

$$L(u) = (u|v_0) \text{ per ogni } u \in H. \tag{18}$$

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio vettoriale (nucleo di L)

$$X = \ker L = \{\, u \in H \mid L(u) = 0 \,\} \subset H.$$

Il sottospazio vettoriale X è, a maggior ragione, convesso, ed è chiuso per la continuità di L.

Se $X = H$, cioè se risulta $L(u) = 0$ per ogni $u \in H$, allora la (18) vale banalmente con $v = 0$.

Se, invece, esiste un $h \in H \setminus X$, allora per il teorema della proiezione esiste anche un $u_0 \in X$ che soddisfa la disuguaglianza variazionale (16).

Osserviamo che per ogni $u \in X$ l'elemento $u_1 = u_0 \pm u$ appartiene ancora ad X per linearità.

Sostituendo allora $u_1 = u_0 \pm u$ nella (16) otteniamo

$$\pm(u \mid (u_0 - h)) \geq 0,$$

e perciò

$$(u \mid (u_0 - h)) = 0$$

per ogni $u \in X$. Abbiamo così individuato un elemento

$$v = u_0 - h$$

ortogonale a ciascun $u \in X$. Si noti che $v \notin X$ perché $h \notin X$ mentre $u_0 \in X$. Dunque $L(v) \neq 0$ e, in particolare, $v \neq 0$. Si ha, ovviamente

$$L(v) = (v \mid \tfrac{L(v)}{\|v\|_H^2}\, v).$$

Verifichiamo allora la (18) con

$$v_0 = \tfrac{L(v)}{\|v\|_H^2}\, v.$$

Preso arbitrariamente $u \in H$, valutiamo la differenza

$$\begin{aligned}(u|v_0) - L(u) &= \tfrac{L(v)}{\|v\|_H^2}\,(u|v) - \tfrac{L(u)}{\|v\|_H^2}\,(v|v) \\ &= \frac{((L(v)\,u - L(u)\,v) \mid v)}{\|v\|_H^2}.\end{aligned}$$

Indicato con w il vettore

$$w = L(v)\,u - L(u)\,v,$$

per linearità si trova

$$\begin{aligned} L(w) &= L(v)\,L(u) - L(u)\,L(v) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dunque $w \in X$. Ricordando che v è ortogonale a tutti gli elementi di X, si conclude che $(u|v_0) - L(u) = 0$, il che equivale alla (18).

Applicazione

Una tipica applicazione del teorema di rappresentazione di Riesz si ha nella risoluzione di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione di Poisson

$$\Delta u = y(x)$$

in un dominio limitato e regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con la condizione $u = 0$ sul contorno $\partial\Omega$.

Se la funzione data $y(x)$ appartiene a $L^2(\Omega)$, allora possiamo definire l'applicazione lineare e continua $L\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$L(v) = -\int_\Omega v(x)\, y(x)\, dx.$$

Si dimostra, inoltre, che la forma bilineare e simmetrica data da

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

è definita positiva: basta usare la disuguaglianza di Poincaré. Inoltre, posto

$$\|u\|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

si ottiene una norma equivalente a quella di $W^{1,2}(\Omega)$ nel senso che esiste una costante $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\varepsilon_0 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|u\|_0 \le \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ma allora l'applicazione L di cui sopra è continua anche rispetto alla topologia indotta da quest'ultima norma.

Perciò, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una ed una sola funzione $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che risulti

$$\int_\Omega \nabla u_0(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = -\int_\Omega v(x)\, y(x)\, dx$$

per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Tale uguaglianza, a sua volta, implica maggiore regolarità per u_0 rispetto alle funzioni di $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Ad esempio, se Ω è di classe C^∞ e $y \in C^\infty(\overline{\Omega})$, si dimostra che anche $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e risulta $u = 0$ su $\partial\Omega$ ([5], Teorema IX.25 e Osservazione 25).

Ma allora si può integrare per parti e ottenere

$$\int_\Omega (y(x) - \Delta u_0(x))\, v(x)\, dx = 0$$

per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e quindi, a maggior ragione, per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, deduciamo che

$$\Delta u_0 = y(x).$$

Si è dunque dimostrata l'esistenza di una soluzione del problema iniziale, o, come si è soliti dire, si è "trovata" una soluzione.

Teorema di Lax-Milgram

Un'estensione di questo metodo ad equazioni differenziali più generali dell'equazione di Poisson si fonda sul teorema di Lax-Milgram: v. [5, Corollario V.8].

STUDIO DI $H^1((a,b))$

Consideriamo un intervallo limitato (a,b).

Se una funzione $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile quasi ovunque, e la derivata u' appartiene a $L^2((a,b))$, non è detto che $u \in H^1((a,b))$.

Un semplice controesempio è dato da $u(x) = \operatorname{sgn} x$ con $a < 0 < b$.

In tal caso si ha $u'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$, ma la derivata distribuzionale di u è 2δ, dunque non è una distribuzione regolare.

Se però partiamo da una $v \in L^2((a,b))$ e poniamo

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt$$

possiamo verificare che $u \in H^1((a,b))$ e v è la derivata debole di u. A tal fine dobbiamo verificare che

$$\int_a^b u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (19)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Prendiamo una successione di funzioni $v_n \in C_c^\infty((a,b))$ convergenti a v in $L^2((a,b))$ e poniamo

$$u_n(x) = \int_a^x v_n(t)\,dt.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale si trova che $u_n \to u$ uniformemente. D'altro canto, integrando per parti, per ogni n si trova che

$$\int_a^b u_n(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v_n(x)\,\varphi(x)\,dx$$

da cui per $n \to +\infty$ la (19) segue.

Inoltre, tutte le funzioni di $H^1((a,b))$ si possono ottenere nella maniera appena descritta, a meno di una costante additiva.

Più precisamente, consideriamo una $u \in H^1((a,b))$ e indichiamo con u', come è consuetudine, la derivata debole di u. Poniamo

$$U(x) = \int_a^x u'(t)\,dt.$$

Per quanto appena visto, si ha $U \in H^1((a,b))$ e u' è la derivata debole (anche) di U. Perciò, posto $w(x) = u(x) - U(x)$, risulta

$$\int_a^b w(x)\,\varphi'(x)\,dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Ma allora, per il lemma di Du Bois-Reymond (pag. Md37), esiste una costante C tale che $w(x) = C$ quasi ovunque, e quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= U(x) + C \\ &= \int_a^x u'(t)\,dt + C \end{aligned} \qquad (20)$$

per quasi ogni $x \in (a,b)$. Ne segue che u è continua in (a,b) e

$$\lim_{x\to a^+} u(x) = C,$$

$$\lim_{x\to b^-} u(x) = u(a) + \int_a^b u'(t)\,dt,$$

dunque u è uniformemente continua.

È interessante il fatto che in $H^1((a,b))$ valgano la formula di integrazione per parti (19), ed il teorema fondamentale del calcolo integrale nella forma (20).

Cenni alle serie di Fourier in L^2

MOTIVAZIONI

Vediamo un classico modello matematico [36, pagg. 1–5] del fenomeno della conduzione del calore, ad un triplice scopo:

1. Introdurre una delle principali equazioni differenziali alle derivate parziali della fisica matematica.

2. Spiegare l'origine delle serie di Fourier, contrastando la tesi che attribuisce lo sviluppo della nostra disciplina esclusivamente alla volontà di generalizzare ed organizzare le conoscenze precedenti.

3. Richiamare i prerequisiti per comprendere la soluzione del problema isoperimetrico data da Adolf Hurwitz nel 1902.

IL CORPO CONDUTTORE

Studiamo il fenomeno della conduzione del calore attraverso un filo sottile, rettilineo (oppure una sbarra) isotropo, omogeneo, e di sezione costante S.

Ci interessiamo soltanto della conduzione del calore nella direzione dell'asse del filo (asse x) trascurando la conduzione nelle direzioni trasversali, come pure le eventuali dispersioni di calore.

Ammettiamo che la temperatura dei punti del filo sia una funzione $u(x,t)$ che dipende solo dall'ascissa x e dal tempo.

CAPACITÀ TERMICA

Il rapporto tra la quantità di calore dQ fornita ad un dato corpo ed il corrispondente aumento du della sua temperatura viene definito "capacità termica" C del corpo:

$$C = \frac{dQ}{du}. \tag{21}$$

CALORE SPECIFICO

La capacità termica dell'unità di massa si chiama "calore specifico". Se dunque M è la massa del corpo, il calore specifico c è

$$c = \frac{C}{M}. \tag{22}$$

Ragioniamo sul cosiddetto "elemento" di filo tra il punto di ascissa x e quello di ascissa $x + dx$, il cui volume è $dV = S\,dx$

Indicata con μ la densità materiale, l'elemento di massa è $dM = \mu\,dV$ e, per la (22), la capacità termica dell'elemento di filo è

$$\begin{aligned} C &= c\,dM \\ &= c\mu S\,dx. \end{aligned} \tag{23}$$

LEGGE DI FOURIER

La quantità di calore dQ_1 che, nell'intervallo di tempo dt, attraversa la sezione del filo di ascissa x da sinistra verso destra è data da

$$\frac{dQ_1}{dt} = -kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{24}$$

cioè è direttamente proporzionale alla sezione S ed a $-\partial u/\partial x$.

La costante di proporzionalità k si dice "conducibilità termica" e dipende dal materiale di cui è composto il filo.

Analogamente, la quantità di calore dQ_2 che, nell'intervallo di tempo dt, attraversa la sezione del filo di ascissa $x+dx$ da destra verso sinistra è data da

$$\frac{dQ_2}{dt} = kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,\,t). \tag{25}$$

EQUAZIONE DEL CALORE

Sommando la (24) e la (25) si trova la quantità di calore $dQ = dQ_1 + dQ_2$ che giunge all'elemento di filo nell'intervallo di tempo dt:

$$\frac{dQ}{dt} = kS\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,\,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big).$$

Per la (21), il primo membro si può anche scrivere $C\,\partial u/\partial t$. Dividendo ambo i membri per dx, e tenendo conto della (23), si ottiene

$$c\mu\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{26}$$

La (26) è detta equazione del calore in una dimensione spaziale.

Analogamente, la conduzione del calore in un corpo tridimensionale $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si può modellizzare tramite l'equazione

$$c\mu\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\Delta u,$$

essendo Δ l'operatore di Laplace. Poiché i teoremi di esistenza, e le proprietà qualitative delle soluzioni non dipendono dal valore numerico delle costanti $c, \mu, k > 0$, si suole concentrarsi sull'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

NOTA BENE

Le considerazioni testé svolte non sono la dimostrazione di alcunché, e non possono esserlo in quanto mettono in relazione un'equazione con un fenomeno naturale (la conduzione del calore), il quale per ciò stesso non è assoggettabile alle dimostrazioni nel senso matematico del termine.

ORIGINI DELLE SERIE DI FOURIER

J.-B. J. Fourier, nel trattato "Théorie analytique de la chaleur" (1822) studia la conduzione del calore in corpi di forme diverse, incluso l'anello.

Consideriamo un filo disposto come la circonferenza di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos\alpha, \\ y = \operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

La temperatura del punto del filo individuato dall'angolo α è data, all'istante t, da una funzione $u(\alpha, t)$ soddisfacente l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \tag{27}$$

dove, per semplicità, abbiamo posto uguali ad 1 le costanti fisiche.

Si vede per sostituzione (o per separazione delle variabili) che le funzioni $e^{-k^2 t}\cos k\alpha$ per $k = 0, 1, 2,$ ... e le funzioni $e^{-k^2 t}\operatorname{sen} k\alpha$, per $k = 1, 2, 3, \ldots$ sono soluzioni della (27).

Fourier ritiene che l'integrale generale della (27) sia

$$u(\alpha, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^2 t}(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha)$$

dove i coefficienti a_k e b_k si devono ricavare dalla temperatura iniziale $u(\alpha, 0)$ tramite l'uguaglianza

$$u(\alpha, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha).$$

L'ANALISI ARMONICA

La necessità di giustificare le affermazioni di Fourier ha stimolato profondi studi, che confluiscono in una branca della matematica chiamata analisi armonica.

L'EVOLUZIONE DELLA MATEMATICA

La storia delle serie di Fourier mostra qualche analogia con la storia delle distribuzioni, e con il problema isoperimetrico:

Alcune teorie matematiche sono scaturite da idee importanti, messe a posto sul piano del rigore in un momento successivo rispetto al loro concepimento.

Sono i testi di matematica che, col senno di poi, possono partire da subito con la definizione giusta.

SERIE DI FOURIER IN L^2

Nello spazio $L^2((-\pi,\pi))$ vale un teorema di convergenza della serie di Fourier particolarmente semplice ed elegante:

Data una qualunque funzione $u \in L^2((-\pi,\pi))$, i coefficienti di Fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\operatorname{sen} kx\,dx$$

sono ben definiti, e la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\,\cos kx + b_k\,\operatorname{sen} kx) \qquad (28)$$

converge nel senso di L^2 alla funzione generatrice $u(x)$. Ciò significa che, indicata con $S_n(x)$ la somma ridotta

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,\cos kx + b_k\,\operatorname{sen} kx)$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n - u\|_2 = 0,$$

essendo $\|\;\|_2$ la norma di $L^2((-\pi,\pi))$. Vale inoltre l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\,\|u\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2), \qquad (29)$$

che estende il teorema di Pitagora dal piano (bidimensionale) allo spazio vettoriale-topologico infinito-dimensionale $L^2((-\pi,\pi))$.

IDENTITÀ DI PARSEVAL

Consideriamo due funzioni $u, v \in L^2((-\pi,\pi))$. Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier di u, e c_k, d_k quelli di v. Vale allora l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,v(x)\,dx = \frac{a_0\,c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\,c_k + b_k\,d_k). \qquad (30)$$

Osserviamo innanzitutto che, ponendo $v = u$, si riottiene la (29).

Viceversa, è possibile ricavare la (30) applicando la (29) alle funzioni $u+v$ e $u-v$. Si ha, infatti

$$\frac{1}{\pi}\,\|u \pm v\|_2^2 = \frac{(a_0 \pm c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big((a_k \pm c_k)^2 + (b_k \pm d_k)^2\Big).$$

Poiché le serie convergono, si possono sottrarre l'una dall'altra termine a termine.

Sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, e svolgendo i quadrati, si ottiene la (30).

OSSERVAZIONE 1. Il procedimento appena seguito consente di dimostrare l'uguaglianza

$$(u|v) = \tfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

detta "identità di polarizzazione", che vale in un qualunque spazio prehilbertiano (v. [33, Proposizione 1.2.2]).

OSSERVAZIONE 2. Con un procedimento analogo (sommando invece di sottrarre) si ottiene l'identità del parallelogramma

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right).$$

OSSERVAZIONE 3. In un qualunque spazio normato E, condizione necessaria e sufficiente affinché esista un prodotto scalare $(u|v)$ tale che

$$(u|u) = \|u\|^2 \text{ per ogni } u \in E$$

è che valga l'identità del parallelogramma (teorema di Fréchet-von Neumann-Jordan: [37, capitolo I, 5, Theorem 1]).

OSSERVAZIONE 4. L'identità di Parseval (30) mostra che l'operatore $F\colon L^2((-\pi,\pi)) \to \ell^2$ che ad ogni $u \in L^2((-\pi,\pi))$ associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier, con piccole modifiche diventa un'isometria.

LO SPAZIO ℓ^2

Si denota con ℓ^2 lo spazio di Hilbert costituito dalle successioni numeriche (c_k) tali che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty.$$

La norma in ℓ^2 di una tale successione è la radice quadrata della suddetta serie.

Il prodotto scalare tra due successioni $a = (a_k)$ e $b = (b_k)$ in ℓ^2 si definisce come segue:

$$(a|b) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, b_k.$$

SEPARABILITÀ

Sappiamo che ogni numero reale a si può esprimere come il limite di un'opportuna successione di numeri razionali p_i (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).

Ma allora la funzione $u(x) = a\cos kx$, qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, è il limite in $L^2((-\pi,\pi))$ delle funzioni $t_i(x) = p_i \cos kx$ per $i \to +\infty$. Infatti applicando la definizione si trova

$$\|u - t_i\|_{L^2((-\pi,\pi))} = \sqrt{\pi}\,|a - p_i| \to 0.$$

Similmente si vede che, qualunque siano $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}^+$, la funzione $b \operatorname{sen} kx$ è il limite in L^2, per $i \to +\infty$, di opportune funzioni aventi la forma $q_i \operatorname{sen} kx$ con $q_i \in \mathbb{Q}$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la somma ridotta $S_n(x)$ della serie di Fourier di una generica funzione $u \in L^2((-\pi,\pi))$.

Le considerazioni svolte sopra implicano che S_n è il limite in L^2, per $i \to +\infty$, di un'opportuna successione di funzioni $(t_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ aventi la forma

$$t_{ni}(x) = \frac{p_{0i}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (p_{ki}\cos kx + q_{ki}\operatorname{sen} kx),$$

con p_{ki} e q_{ki} razionali tali che

$$\lim_{i\to+\infty} p_{ki} = a_k, \qquad \lim_{i\to+\infty} q_{ki} = b_k.$$

Vogliamo verificare che la funzione u si può esprimere come il limite in L^2 di un'opportuna successione di polinomi trigonometrici a coefficienti razionali.

Per il teorema di convergenza della serie di Fourier in L^2, per ogni $j \in \mathbb{Z}^+$ esiste un'opportuna somma ridotta S_{n_j} tale che

$$\|u - S_{n_j}\| < \frac{1}{2j}.$$

Per quanto appena visto, esiste anche un polinomio trigonometrico $t_{n_j\,i_j}$ a coefficienti razionali tale che

$$\|S_{n_j} - t_{n_j\,i_j}\| < \frac{1}{2j}.$$

Dunque per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\|u - t_{n_j\,i_j}\| < \frac{1}{j}$$

e perciò $t_{n_j\,i_j} \to u$ per $j \to +\infty$. In conclusione l'insieme dei polinomi trigonometrici a coefficienti razionali è denso in $L^2((-\pi,\pi))$.

Si noti che l'insieme dei polinomi trigonometrici a coefficienti razionali è numerabile, dunque $L^2((-\pi,\pi))$ ha un sottoinsieme numerabile denso.

DEFINIZIONE. Uno spazio di Hilbert, e, più in generale, uno spazio di Banach si dice separabile se ha almeno un sottoinsieme numerabile denso.

La definizione è significativa per gli spazi di Hilbert di dimensione infinita. Infatti qualunque spazio di Hilbert (sul campo dei numeri reali) di dimensione finita N è isomorfo a $\mathbb{R}^N$, e il sottoinsieme numerabile $\mathbb{Q}^N$ è denso in $\mathbb{R}^N$.

BASE HILBERTIANA

L'utilità della separabilità di uno spazio di Hilbert sta nel fatto che essa implica l'esistenza di una base hilbertiana numerabile [5, Teorema V.10].

La dimostrazione si basa su di un procedimento simile al processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

A sua volta l'esistenza di una tale base fa sì che lo spazio di Hilbert considerato, pur potendo avere dimensione infinita, possieda proprietà simili a quelle del consueto spazio euclideo.

DEFINIZIONE. Una base hilbertiana numerabile in uno spazio di Hilbert H è una successione ortonormale di elementi $e^{(k)} \in H$ tali che ogni elemento $u \in H$ si può rappresentare come

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \, e^{(k)}, \tag{31}$$

dove i coefficienti c_k sono dati da $c_k = (u|e^{(k)})$, essendo $(\ |\ )$ il prodotto scalare di H.

ESEMPIO. La tipica base hilbertiana dello spazio $H = L^2((-\pi, \pi))$ è costituita dalla funzione costante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e dalle funzioni

$$\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}}$$

dove i denominatori servono affinché tali funzioni abbiano norma uguale ad 1. In questo caso la serie (31) si riduce alla consueta serie di Fourier (28).

TEOREMA DI ISOMORFISMO

Dati due spazi di Hilbert separabili H_1 e H_2, di dimensione infinita, e indicate con $(e_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(e_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ due loro basi hilbertiane, si può definire un isomorfismo $L\colon H_1 \to H_2$ come segue.

Presa $u \in H_1$, la si può sviluppare (sul piano teorico) in serie di Fourier (31) ponendo $e^{(k)} = e_1^{(k)}$. Per la disuguaglianza di Bessel, la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2$$

è convergente. Ne segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \, e_2^{(k)}$$

soddisfa il criterio di Cauchy nello spazio H_2, e quindi, per la completezza di H_2, essa converge ad una funzione che indicheremo con v. L'applicazione

$$L\colon H_1 \to H_2$$
$$u \mapsto v$$

è lineare e conserva il prodotto scalare, dunque fornisce l'isomorfismo cercato.

Di conseguenza, tutti gli spazi di Hilbert di dimensione infinita, separabili, sono isomorfi a $L^2((-\pi, \pi))$. Si confronti questo risultato con l'osservazione 2 di pag. Md26.

LO SPAZIO $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$

DEFINIZIONE. Si indica con $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ lo spazio delle funzioni misurabili $p \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ aventi per dominio l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e a valori in $\mathbb{R}^k$, $N, k \geq 1$, tali che

$$\int_\Omega p_i^2(x)\, dx < +\infty \text{ per } i = 1, \ldots, k,$$

essendo $p_1(x)$, ..., $p_k(x)$ le componenti di $p(x)$.

Chiaramente $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ si riduce a $L^2(\Omega)$ quando $k = 1$.

Lo spazio $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(p|q) = \sum_{i=1}^k \int_\Omega p_i(x)\, q_i(x)\, dx.$$

MOTIVAZIONE

Il funzionale di Dirichlet (3), che è uno dei funzionali più importanti del calcolo delle variazioni, si può vedere come il quadrato della norma della funzione ∇u in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

La teoria dell'esistenza del minimo del funzionale di Dirichlet, e di altri funzionali simili, si svolge bene nello spazio $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o meglio ancora nello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ introdotto a pag. Md14.

Cenni agli spazi di Sobolev

LE ORIGINI

Gli spazi di Sobolev sono intitolati al matematico sovietico Sergej Sobolev, che negli anni Trenta si accorse che la sommabilità del gradiente di una funzione u, cioè il fatto che

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx < +\infty,$$

implica la sommabilità di u con un esponente $q > p$. Il risultato è espresso rigorosamente dal cosiddetto "lemma di Sobolev".

La dimostrazione è stata migliorata e generalizzata da E. Gagliardo, L. Nirenberg e C. B. Morrey, portando ai moderni "teoremi di immersione".

Emilio Gagliardo, venuto a mancare diversi anni fa, aveva insegnato anche all'università di Cagliari.

Louis Nirenberg è stato uno dei più grandi matematici dell'era moderna.

Charles Morrey è l'autore del fondamentale trattato "Multiple integrals in the calculus of variations" [29].

L'IMPOSTAZIONE MODERNA

Il principale riferimento sugli spazi di Sobolev apparve nella sua prima edizione nel 1975 [1] e successivamente nel 2002 [2].

Si noti che il secondo volume del Courant-Hilbert [12], pubblicato nel 1962, non tratta gli spazi di Sobolev ma si limita ad un caso particolare del teorema di immersione.

Oggi gli spazi di Sobolev fanno parte dei normali programmi di insegnamento delle università: vedere ad esempio il libro di Brézis [5], che ha avuto un'amplissima diffusione.

Qualche evento peculiare nella storia degli spazi di Sobolev

1906	Beppo Levi [27] per minimizzare l'integrale di Dirichlet, utilizza la proprietà oggi chiamata assoluta continuità lungo quasi ogni retta (pagg. 303 e 354), nonché la quadrato-sommabilità del gradiente (indicato con Δu): oggi sappiamo che le due proprietà caratterizzano lo spazio funzionale indicato con H^1, ovvero con $W^{1,2}$
1910	F. Riesz [35] inventa gli spazi L^p con $p \neq 2$, definisce la convergenza debole, e dimostra il teorema di compattezza debole in L^p (considera funzioni di una sola variabile)
1930	Franz Rellich [34] dimostra il teorema detto "di Rellich" che sarà poi esteso da Kondrachov ai valori di $p \neq 2$
1931	A. N. Kolmogorov [25] dimostra il criterio di compattezza in L^p detto "di Riesz-Fréchet-Kolmogorov"
1936	Clarkson [10] definisce gli spazi uniformemente convessi, e dimostra le due disuguaglianze che portano il suo nome al fine di estendere il teorema fondamentale del calcolo integrale alle funzioni il cui codominio è uno spazio funzionale
1938	- Sergej L'vovic Sobolev dimostra i teoremi di immersione, e utilizza i mollificatori detti oggi "di Friedrichs" - David P. Milman dimostra che gli spazi uniformemente convessi sono riflessivi
1940	Calkin [8] e Morrey [28], usando le medie locali, dimostrano che le funzioni di Sobolev sono assolutamente continue lungo quasi ogni retta
1944	Kurt Otto Friedrichs costruisce i mollificatori [18, pag. 138]
1945	Kondrachov dimostra il teorema di compattezza detto "di Rellich-Kondrachov" estendendo il teorema di Rellich ai valori di $p \neq 2$
1952	F. Riesz e B. Sz.-Nagy pubblicano "Léçons d'Analyse Fonctionnelle"
1954	Jacques Deny e Jacques-Louis Lions pubblicano un lavoro dal titolo *"Les espaces du type de Beppo Levi"*
1955	Viene a mancare Franz Rellich (nel 1957 viene pubblicato un necrologio scritto in tedesco da R. Courant)
1958	Emilio Gagliardo pubblica la sua dimostrazione dei teoremi di immersione, che oggi è diventata standard
1964	Yosida pubblica "Functional Analysis"
1966	Morrey pubblica "Multiple Integrals in the Calculus of Variations"
1967	Nečas pubblica "Les Méthodes Directes en Théorie des équations Elliptiques"
1971	Viene a mancare Vladimir Iosifovich Kondrachov (nel 1972 viene pubblicato un necrologio scritto da L. D. Kudryavtsev, P. I. Lizorkin, S. M. Nikol'skii, e da S. Sobolev che ne era stato il relatore di tesi)
1975	Robert Adams pubblica "Sobolev Spaces"
1983	Haïm Brézis pubblica "Analyse Fonctionnelle"

Vedi anche: J. Naumann, *Remarks on the prehistory of Sobolev spaces*

DEFINIZIONE DI $W^{1,p}$ $(p < +\infty)$

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ed un esponente $p \in [1, +\infty)$, si definisce lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come il sottoinsieme di $L^p(\Omega)$ costituito dalle funzioni u le cui N derivate distribuzionali prime sono rappresentate da altrettante funzioni di $L^p(\Omega)$.

In tal caso le derivate distribuzionali si dicono derivate deboli (weak derivatives) e si denotano con l'usuale simbolo di derivazione:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}.$$

Esse sono caratterizzate dal fatto che, qualunque sia la funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, e per ogni $i = 1, \ldots, N$, risulta

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{32}$$

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale normato e completo, la cui norma è data da

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{33}$$

Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$, in particolare, è uno spazio di Hilbert: vedere a pagina Md14.

SPAZI $W^{1,\infty}$

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ si definisce lo spazio di Sobolev $W^{1,\infty}(\Omega)$ come il sottoinsieme di $L^\infty(\Omega)$ costituito dalle funzioni u le cui N derivate distribuzionali prime sono rappresentate da altrettante funzioni di $L^\infty(\Omega)$.

Anche in questo caso le derivate distribuzionali si dicono derivate deboli, si denotano con l'usuale simbolo di derivazione, e sono caratterizzate dalla (32).

Lo spazio $W^{1,\infty}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale normato e completo, la cui norma è data da

$$\|u\|_{W^\infty(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{34}$$

oppure, equivalentemente, da

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ldots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}.$$

Completezza

Sapendo che $L^p(\Omega)$ è completo, dimostriamo la completezza dello spazio $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$.

Consideriamo una qualunque successione (u_n) di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega)$, cioè tale che

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|u_n - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Dobbiamo verificare che u_n converge in $W^{1,p}(\Omega)$.

Viste le espressioni (33) e (34) delle norme di $W^{1,p}(\Omega)$, la successione (u_n) risulta di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

Essendo $L^p(\Omega)$ completo, esiste una funzione $u \in L^p(\Omega)$ tale che

$$u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u. \tag{35}$$

Per un motivo analogo, esistono N funzioni $v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$ tali che

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \xrightarrow{L^p(\Omega)} v_i, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Resta da verificare che la funzione u appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$, e che le funzioni v_i sono le sue derivate deboli.

Poiché per ipotesi $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, per ogni n possiamo scrivere

$$\int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{36}$$

Verifichiamo di poter passare al limite sotto il segno di integrale. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_\Omega |u_n(x) - u(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| dx \le \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)}$$

dove q è l'esponente coniugato di p. Per la (35) il secondo membro tende a zero, e perciò

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Similmente si verifica che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_\Omega v_i(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Quindi, passando al limite nella (36), si trova

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_\Omega v_i(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

dunque le funzioni v_i sono le derivate deboli di u, e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, come volevasi dimostrare.

Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$

Si denota con $C_c^\infty(\Omega)$ il sottoinsieme di $C^\infty(\Omega)$ costituito dalle funzioni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(\Omega)$ e identicamente nulle al di fuori di un sottoinsieme compatto di Ω.

L'indice c nel simbolo $C_c^\infty(\Omega)$ viene dall'iniziale della parola "compatto" (compact, in inglese).

Esempio: la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = (1-x^2)^+$ è nulla al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$.

Tuttavia, tale funzione non appartiene allo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ perché non è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$: infatti non è derivabile nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

Una tipica funzione appartenente a $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è la seguente, detta "funzione a campana" (*bump function*):

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } x \in (-1,1); \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

La suddetta funzione serve per approssimare funzioni più familiari, usando la cosiddetta tecnica dei "mollificatori", attribuita a Kurt Otto Friedrichs (1901–1982).

Ce ne serviamo subito per estendere due lemmi fondamentali. Poi vedremo la definizione dello spazio $W_0^{1,p}$ per $p \in [1, +\infty)$.

L'origine del nome di "mollificatori" è spiegata in [30, pag. 31].

Il lemma fondamentale

Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, già visto a pag. Mc40, si può estendere alle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$.

Se una funzione $u \in L^p(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty]$, ha la proprietà che

$$\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $u(x) = 0$ quasi ovunque.

Dimostrazione: per ogni compatto $K \subset \Omega$, la funzione $v(x) = \operatorname{sgn}(u(x))\,\chi_K(x)$ appartiene a $L^q(\Omega)$ essendo q l'esponente coniugato di p.

Nel caso particolare $p > 1$, si ha $q \in [1, +\infty)$ e la regolarizzata v_n della funzione v appartiene definitivamente a $C_c^\infty(\Omega)$, e converge a v in $L^q(\Omega)$.

Posto $\varphi = v_n$, si può passare al limite sotto il segno di integrale (per la disuguaglianza di Hölder) e trovare che

$$\int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx = \int_K |u(x)|\,dx = 0,$$

da cui l'asserto. Nel caso $p = 1$ si può giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale con un apposito ragionamento.

Più in generale, il risultato vale per $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: vedere [5, corollario IV.24].

Lemma di Du Bois-Reymond

Il lemma di Du Bois-Reymond, già visto nell'esercizio 4 della serie [106], si può estendere alle funzioni $u \in L^2((a,b))$.

Sia (a,b) un intervallo limitato. Se una funzione $u \in L^2((a,b))$ ha la proprietà che

$$\int_a^b u(x)\,\frac{\partial \eta}{\partial x}(x)\,dx = 0$$

per ogni $\eta \in C_c^\infty((a,b))$, allora, posto

$$\overline{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,dx,$$

si ha $u(x) = \overline{u}$ quasi ovunque.

Dimostrazione: la funzione $v(x) = u(x) - \overline{u}$ appartiene a $L^2((a,b))$ e perciò si può approssimare nella norma di $L^2((a,b))$ con funzioni $\varphi_n \in C_c^\infty((a,b))$.

Avendo v integrale nullo, possiamo passare dalle φ_n ad opportune $\tilde{\varphi}_n$ aventi l'integrale nullo.

Per vederlo, osserviamo innanzitutto che siccome $\varphi_n \to v$ in $L^2((a,b))$, l'integrale di φ_n, che indicheremo con I_n, tende all'integrale di v: dunque

$$I_n \to 0.$$

Prendiamo allora la classica funzione a campana ψ, normalizzata in modo tale che il suo integrale valga 1 e si abbia $\operatorname{supp}\psi \subset (a,b)$. Posto

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x) - I_n\,\psi(x),$$

si ha $\tilde{\varphi}_n \in C_c^\infty((a,b))$ e l'integrale di $\tilde{\varphi}_n$ è nullo.

Perciò la funzione

$$\eta_n(x) = \int_a^x \tilde{\varphi}_n(t)\,dt$$

appartiene a $C_c^\infty((a,b))$ per ogni n, e possiamo scrivere, per ipotesi,

$$\int_a^b u(x)\,\frac{\partial \eta_n}{\partial x}\,dx = \int_a^b u(x)\,\tilde{\varphi}_n(x)\,dx = 0.$$

Inoltre, poiché $\tilde{\varphi}_n \to v$ in $L^2((a,b))$, possiamo passare al limite e ottenere che

$$\int_a^b u(x)\,v(x) = 0.$$

Pertanto

$$0 \le \int_a^b (u(x)-\overline{u})^2\,dx =$$

$$= \int_a^b (u(x)-\overline{u})\,v(x)\,dx = 0$$

da cui la tesi. Il risultato si può estendere alle funzioni $u \in L^1((a,b))$: vedere [6, lemma 1.8].

GLI SPAZI $W_0^{1,p}$ $(p < +\infty)$

Per esprimere la tipica condizione al contorno, detta "condizione di Dirichlet":

$$u(x) = \varphi(x) \text{ per } x \in \partial\Omega$$

dove φ è una funzione data, e Ω è il dominio del problema, nel moderno calcolo delle variazioni si utilizza lo spazio $W_0^{1,p}$ appresso definito.

DEFINIZIONE. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ed un esponente $p \in [1, +\infty)$, si indica con $W_0^{1,p}(\Omega)$ il completamento dello spazio $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma di $W^{1,p}(\Omega)$.

In parole povere si considerano tutte le funzioni $u \in C_c^\infty(\Omega)$, le quali appartengono banalmente a $W^{1,p}(\Omega)$, e si prendono anche quelle altre funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ che si possono approssimare bene quanto si vuole, nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$, con funzioni di $C_c^\infty(\Omega)$.

COSA RAPPRESENTA $W_0^{1,p}$

Se $\partial\Omega \neq \emptyset$, e cioè se $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ rappresenta il sottoinsieme di $W^{1,p}(\Omega)$ costituito dalle funzioni "che si annullano su $\partial\Omega$".

Si può dimostrare che $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, cioè ogni funzione di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si può approssimare bene quanto si vuole, nella norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, con un'opportuna funzione di $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dunque

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

COME SI ESPRIME LA CONDIZIONE DI DIRICHLET

Si assegna una funzione $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, dunque non una funzione definita soltanto lungo il contorno $\partial\Omega$, e si richiede che le funzioni ammissibili $u \in W^{1,p}(\Omega)$ soddisfino la condizione

$$u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

MOTIVAZIONE

È noto che due funzioni di $L^p(\Omega)$ si considerano equivalenti se differiscono su di un insieme di misura nulla. Lo stesso vale negli spazi di Sobolev.

Si badi che la frontiera $\partial\Omega$ di un dominio regolare e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^N$.

Esempio semplice: la frontiera della sfera $\Omega = B(0, r)$ centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ nel consueto spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ è la superficie sferica $\partial\Omega$ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ed ha misura tridimensionale (cioè volume) uguale a zero. La sfera Ω, come sappiamo, ha volume $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Dunque i valori di una data funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si possono modificare a piacere in tutti i punti della frontiera $\partial\Omega$ di un aperto limitato e regolare Ω e la funzione u, come elemento di $W^{1,p}(\Omega)$, non cambia.

UN ESEMPIO PATOLOGICO

Con l'occasione vediamo un esempio di aperto Ω del piano $\mathbb{R}^2$, non regolare, la cui frontiera $\partial\Omega$ non ha area nulla come ci si potrebbe aspettare.

Essendo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali numerabile, come pure il prodotto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, consideriamo (sul piano teorico) una successione $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ di tutti i punti del piano $\mathbb{R}^2$ a coordinate razionali.

Indicato con $B((x_n, y_n), \frac{1}{2^n})$ il disco centrato nel punto (x_n, y_n) e di raggio $\frac{1}{2^n}$, definiamo

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B((x_n, y_n), \tfrac{1}{2^n}).$$

Per la numerabile additività della misura di Lebesgue, e non sapendo se i dischi $B((x_n, y_n), \frac{1}{2^n})$ sono a due a due disgiunti, scriviamo

$$\begin{aligned} |\Omega| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \pi \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^2 \\ &= \tfrac{4}{3}\,\pi. \end{aligned} \tag{37}$$

Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ogni punto del piano si può approssimare bene quanto si vuole con punti a coordinate razionali, dunque con punti di Ω.

Ne segue che tutti i punti del piano esclusi quelli di Ω sono punti di frontiera:

$$\partial\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega,$$

e pertanto $\mathbb{R}^2 = \Omega \cup \partial\Omega$, da cui, per la (37), si ricava $|\partial\Omega| = +\infty$.

UN PARAGONE CON I NUMERI REALI

Si badi che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che siamo abituati a trattare con una certa confidenza, si può definire come il completamento dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali rispetto alla norma

$$|x| = \text{valore assoluto di } x.$$

In pratica, quando andiamo a scrivere un numero, il più delle volte scriviamo un razionale.

Similmente, anche se discutiamo di spazi di Sobolev, quando scriviamo esplicitamente una funzione scriviamo di solito una funzione regolare.

PER APPROFONDIRE

Per approfondire lo studio dei teoremi di immersione e delle altre proprietà degli spazi di Sobolev si possono consultare i testi [1, 2, 5, 16].

Per gli spazi di Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, con indice s non intero, si veda [14].

Il teorema fondamentale

PREMESSA

L'esistenza del minimo del funzionale di Dirichlet si può dimostrare come a pag. Md15. Lo stesso procedimento si può applicare anche ad altri funzionali, come ad esempio

$$F[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega y(x)\,u(x)\,dx$$

con $y(x)$ funzione data in $L^2(\Omega)$. La limitatezza inferiore di F discende dal fatto che il secondo integrale è lineare in u, mentre il primo è quadratico. L'equazione di Eulero è l'equazione di Poisson

$$\Delta u(x) = y(x).$$

Il metodo si basa sull'identità del parallelogramma, e sfrutta le seguenti due proprietà:

1. Il fatto che le successioni minimizzanti convergono in $W^{1,2}$;
2. La continuità del funzionale in $W^{1,2}$.

GENERALIZZAZIONE

Si attribuisce a L. Tonelli il merito di aver trasformato l'idea di cui sopra in un metodo generale, che, a titolo puramente indicativo, è applicabile al funzionale

$$I[u] = \int_0^1 j(u'(x))\,dx + \int_0^1 y(x)\,u(x)\,dx$$

dove y è una funzione data in $L^2((0,1))$, e la funzione $j \in C^1(\mathbb{R})$ è convessa e tale che

$$\alpha\,t^2 \le j(t) \le \beta\,t^2, \quad |j'(t)| \le \gamma\,|t|$$

con tre costanti opportune $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

In sintesi, si sostituiscono le proprietà 1 e 2 con la compattezza debole e con la semicontinuità inferiore, di cui accenniamo nei prossimi paragrafi.

COMPATTEZZA DEBOLE

Il teorema di compattezza debole permette di recuperare, negli spazi vettoriali di dimensione infinita, un analogo del teorema di Bolzano-Weierstrass.

Il teorema vale negli spazi di Banach (normati e completi) che godano di una particolare proprietà: la riflessività [5, teoremi III.27 e III.28]. Enunciato:

Ogni successione limitata possiede almeno una sottosuccessione debolmente convergente.

In particolare, il teorema vale in L^p con $p \in (0, +\infty)$: [32, teorema 5.14]. Un altro caso particolare notevole è quello degli spazi di Hilbert: vedere [3, pag. 292] e [33, teorema 1.7.1].

In uno spazio di Hilbert H, la convergenza debole può essere definita come segue.

Una successione di elementi $u_n \in H$ dice "debolmente convergente" ad $u_0 \in H$ se per ogni $v \in H$ risulta

$$(u_n \mid v) \xrightarrow{\mathbb{R}} (u_0 \mid v)$$

ovvero $((u_n - u_0) \mid v) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$, dove il simbolo $(\ \mid\ )$ denota il prodotto scalare di H. In tal caso si scrive: $u_n \rightharpoonup u_0$.

ESEMPIO 1

Verifichiamo che, nello spazio di Sobolev $W^{1,2}((0,2\pi))$, esistono successioni limitate e prive di sottosuccessioni convergenti. Poniamo

$$u_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \tag{38}$$

cosicché risulta $u_n'(x) = \cos nx$ e di conseguenza

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{W^{1,2}((0,2\pi))} &= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}\,dx \\ &+ \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx \\ &= \frac{\pi}{n^2} + \pi, \end{aligned}$$

dunque la successione è limitata. Tuttavia, per $n \neq k$ si ha

$$\begin{aligned} &\|u_n - u_k\|^2_{W^{1,2}((0,2\pi))} = \\ &\int_0^{2\pi} \frac{(\operatorname{sen} nx - \operatorname{sen} kx)^2}{n^2}\,dx \\ &+ \int_0^{2\pi} (\cos nx - \cos kx)^2\,dx \geq 2\pi. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare, si conclude che la successione (38), benché limitata, è priva di sottosuccessioni convergenti.

Dunque il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale nello spazio di Sobolev $W^{1,2}((0,2\pi))$.

Si può dimostrare che il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale in nessuno spazio vettoriale normato di dimensione infinita (teorema di Riesz: [5, Teorema VI.5]).

ESEMPIO 2

Verifichiamo che la successione delle funzioni u_n nella (38), che è limitata in $W^{1,2}((0,2\pi))$, ha una sottosuccessione debolmente convergente, come previsto dal teorema di compattezza debole. Anzi, verifichiamo che

$$u_n \rightharpoonup 0. \tag{39}$$

Presa arbitrariamente $v \in W^{1,2}((0,2\pi))$ si ha

$$\begin{aligned} (u_n|v) &= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, v(x)\,dx \\ &+ \int_0^{2\pi} (\cos nx)\, v'(x)\,dx. \end{aligned} \tag{40}$$

Il valore assoluto del primo integrale si maggiora immediatamente con

$$\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |v(x)|\,dx$$

dunque tende a zero.

Anche il secondo integrale nella (40) tende a zero: ciò segue dal lemma di Riemann-Lebesgue, o anche dall'uguaglianza di Parseval (29) applicata alla funzione v'.

Si conclude che vale la (39), come volevasi dimostrare.

COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI

Un sottoinsieme S di uno spazio metrico X è compatto se e solo se ogni successione (s_n) di elementi di S ha almeno una sottosuccessione (s_{n_k}) convergente ad un elemento di S nella metrica dello spazio X (vedere, ad esempio, [5, pag. 77]).

ESEMPIO 3

Una successione limitata nello spazio di Sobolev $W^{1,2}((0,1))$, priva di sottosuccessioni convergenti, si può definire ponendo

$$u_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

Risulta infatti

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2_{W^{1,2}((0,1))} &= \int_0^1 (u_n(x))^2\,dx \\ &+ \int_0^1 (u_n'(x))^2\,dx.\end{aligned}$$

Il primo integrale si può maggiorare come segue:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (u_n(x))^2\,dx &= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n}\,dx \\ &= \frac{1}{n\,(2n+1)} < 1,\end{aligned}$$

mentre per l'altro si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 (u_n'(x))^2\,dx &= \int_0^1 n\,x^{2n-2}\,dx \\ &= \frac{n}{2n-1} \leq 1.\end{aligned}$$

In conclusione, risulta

$$\|u_n\|^2_{W^{1,2}((0,1))} < 2,$$

dunque la successione (41) è limitata. Supponiamo per assurdo che una sottosuccessione (u_{n_k}) converga in $W^{1,2}((0,1))$ ad una certa funzione u_0. Poiché, per definizione,

$$\begin{aligned}\|u_{n_k} - u_0\|^2_{W^{1,2}((0,1))} &= \|u_{n_k} - u_0\|^2_{L^2((0,1))} \\ &+ \|u_{n_k}' - u_0'\|^2_{L^2((0,1))}\end{aligned}$$

vorrà dire che $u_{n_k} \to u_0$ in $L^2((0,1))$.

Ma poiché la successione (41) converge uniformemente a zero, dovrà necessariamente aversi $u_0(x) = 0$ per ogni $x \in (0,1)$.

D'altro canto, il fatto che

$$\int_0^1 (u_{n_k}'(x))^2\,dx = \frac{n_k}{2n_k - 1} \to \frac{1}{2},$$

implica che u_{n_k}' non tende a $u_0' = 0$ in $L^2((0,1))$. Dunque la successione (41), benché limitata, è priva di sottosuccessioni convergenti in $W^{1,2}((0,1))$.

ESEMPIO 4

Verifichiamo che la successione delle funzioni u_n nella (41), che è limitata in $W^{1,2}((0,1))$, ha una sottosuccessione debolmente convergente, come previsto dal teorema di compattezza debole. Anzi, verifichiamo che

$$u_n \rightharpoonup 0. \tag{42}$$

Presa arbitrariamente $v \in W^{1,2}((0,1))$, dobbiamo valutare il prodotto scalare

$$\begin{aligned}(u_n|v) &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{n}}\,v(x)\,dx \\ &+ \int_0^1 \sqrt{n}\,x^{n-1}\,v'(x)\,dx.\end{aligned} \tag{43}$$

Il primo integrale si può maggiorare usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{n}}\,v(x)\,dx\right|^2 &\leq \frac{\|v\|^2_{L^2((0,1))}}{n\,(2n+1)} \\ &\to 0,\end{aligned}$$

Per dimostrare che anche il secondo integrale nella (43) tende a zero, ragioniamo come segue.

Siccome $v' \in L^2((0,1))$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $a \in (0,1)$ tale che

$$\int_a^1 (v'(x))^2\,dx < \varepsilon. \tag{44}$$

Questa proprietà discende dalla cosiddetta "assoluta continuità" dell'integrale di Lebesgue. Scriviamo allora

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx &= \int_0^a u_n'(x)\,v'(x)\,dx \\ &+ \int_a^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx\end{aligned}$$

e stimiamo i due integrali al secondo membro usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Si ha

$$\left|\int_0^a u_n'(x)\,v'(x)\,dx\right|^2 \leq \|v'\|^2_{L^2((0,1))} \int_0^a n\,x^{2n-2}\,dx$$

e si trova subito che

$$\int_0^a n\,x^{2n-2}\,dx = \frac{n}{2n-1}\,a^{2n-1}.$$

Sfruttando il fatto che $a \in (0,1)$, si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a u_n'(x)\,v'(x)\,dx = 0,$$

e perciò risulta

$$\left|\int_0^a u_n'(x)\,v'(x)\,dx\right| < \varepsilon \tag{45}$$

per ogni n sufficientemente grande.

Ancora per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\left|\int_a^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx\right|^2 \leq \|u_n'\|^2_{L^2((0,1))} \int_a^1 (v'(x))^2\,dx,$$

e da qui, siccome $\|u_n'\|^2_{L^2((0,1))} \leq 1$, e ricordando la (44), si ottiene

$$\left|\int_a^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx\right| < \sqrt{\varepsilon}\,.$$

Combinando quest'ultima disuguaglianza con la (45), si conclude che

$$\left|\int_0^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx\right| < \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$$

per ogni n sufficientemente grande. Per l'arbitrarietà di ε si ha dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n'(x)\,v'(x)\,dx = 0,$$

e la (42) è verificata.

APPLICAZIONE

Vediamo, a titolo di esempio, come applicare il teorema di compattezza debole al funzionale $I[u]$ di pag. Md41.

Grazie alla condizione $j(t) \le \beta\, t^2$, il funzionale I è ben definito (l'integrale converge) per ogni $u \in W^{1,2}((0,1))$.

Prendiamo come classe delle funzioni ammissibili la classe $X = \{\, u \in W^{1,2}(\Omega) \mid u(0) = u_a,\ u(1) = u_b \,\}$, e indichiamo con (u_n) una successione minimizzante.

Grazie alla condizione (detta di "coercività") $j(t) \ge \alpha\, t^2$, $\alpha > 0$, la successione (u_n) è limitata in $W_0^{1,2}((0,1))$. Infatti la suddetta condizione implica che

$$\int_0^1 j(u_n'(x))\, dx \ge \alpha\, \|u_n'\|^2_{L^2((0,1))}$$

mentre per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\int_0^1 y(x)\, u_n(x)\, dx \ge -\, \|y\|_{L^2((0,1))}\, \|u_n\|_{L^2((0,1))},$$

e pertanto

$$I[u_n] \ \ge\ \alpha\, \|u_n'\|^2_{L^2((0,1))} - \|y\|_{L^2((0,1))}\, \|u_n\|_{L^2((0,1))}. \qquad (46)$$

D'altro canto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per l'immersione di $L^2((0,1))$ in $L^1((0,1))$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\|u_n'\|^2_{L^2((0,1))} \ge \varepsilon_0\, (\|u_n\|^2_{L^2((0,1))} - 2\, u_a^2).$$

Si ha, quindi

$$I[u_n] \ \ge\ \alpha\, \varepsilon_0\, (\|u_n\|^2_{L^2((0,1))} - 2\, u_a^2) - \|y\|_{L^2((0,1))}\, \|u_n\|_{L^2((0,1))}.$$

Ma siccome $I[u_n] \to \inf I$, tale disuguaglianza mostra che le norme $\|u_n\|_{L^2((0,1))}$ sono limitate. Sapendo questo, la (46) mostra che anche le norme $\|u_n'\|_{L^2((0,1))}$ sono limitate, e perciò lo sono le norme $\|u_n\|_{W^{1,2}((0,1))}$.

Ricorrono quindi le condizioni per invocare il teorema di compattezza debole (pag. Md41) nello spazio di Hilbert $H = W^{1,2}((0,1))$.

Di conseguenza possiamo affermare che esistono una sottosuccessione (u_{n_k}) ed una funzione $u_0 \in W^{1,2}((0,1))$ tali che

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0.$$

Più precisamente, si può dimostrare che la funzione limite u_0 appartiene alla classe X delle funzioni ammissibili.

La convergenza debole sostituisce la proprietà della successione (u_n') di essere una successione di Cauchy, proprietà che sussiste quando (u_n) è una successione minimizzante del funzionale di Dirichlet (proprietà 1, pag. Md41).

DISCONTINUITÀ DEBOLE DEL FUNZIONALE DI DIRICHLET

Poniamo, per semplicità, $(a, b) = (0, 2\pi)$ e verifichiamo che il funzionale di Dirichlet (1) è debolmente discontinuo in $W^{1,2}((0, 2\pi))$.

A tal fine scegliamo opportunamente una successione di funzioni $u_n \in W^{1,2}((0, 2\pi))$ che soddisfi la (39) e tuttavia

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] \neq 0.$$

Il tipico esempio, in questo caso, è dato dalle funzioni u_n definite nella (38), per le quali sappiamo che vale la (39).

Risulta inoltre $u_n'(x) = \cos nx$, e di conseguenza

$$F[u_n] = \pi \not\to 0.$$

Dunque il funzionale di Dirichlet è discontinuo rispetto alla convergenza debole di $W^{1,2}((0, 2\pi))$.

Siccome il funzionale considerato è (fortemente) continuo in $W^{1,2}((0, 2\pi))$, questo esempio mostra anche che la continuità non implica la debole continuità.

Un esempio analogo, nello spazio di Sobolev $W^{1,2}((0, 1))$, si ottiene con le funzioni (41).

SEMICONTINUITÀ INFERIORE

Il funzionale di Dirichlet, e di conseguenza il funzionale più generale I di pag. Md41, è discontinuo rispetto alla convergenza debole.

Non sussiste, dunque, la proprietà 2 di pag. Md41. Si può, tuttavia, proseguire utilizzando il concetto di semicontinuità inferiore.

Si attribuisce a Leonida Tonelli il merito di aver portato l'attenzione sulla semicontinuità inferiore, già utilizzata da René Baire (1874-1932) in [4] per altri scopi:

si dice che un funzionale $F\colon H \to \mathbb{R}$, avente per dominio uno spazio di Hilbert H, è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente se

per ogni successione debolmente convergente di elementi $u_n \in H$, indicato con u_0 l'elemento limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$F[u_n] \geq F[u_0] - \varepsilon,$$

ovvero, in altri termini,

$$\liminf_{n\to+\infty} F[u_n] \geq F[u_0].$$

Notizie storiche interessanti si possono trovare in [15].

ESEMPIO 5

Verifichiamo che il funzionale I di pag. Md41 è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente.

Infatti, presa ad arbitrio una successione (u_n) in $W^{1,2}((0,1))$ convergente debolmente ad una funzione u_0, per la convessità di j si ha

$$\begin{aligned} j(u_n'(x)) &\geq j(u_0'(x)) \\ &\quad + j'(u_0'(x))\left(u_n'(x) - u_0'(x)\right). \end{aligned}$$

Grazie alla condizione $|j'(t)| \leq \gamma\,|t|$, la funzione composta $j(u_0'(x))$ appartiene ad $L^2((0,1))$, e quindi la convergenza debole di u_n ad u_0 implica che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 j'(u_0'(x))\left(u_n'(x)-u_0'(x)\right) dx = 0.$$

Analogamente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 y(x)\left(u_n'(x) - u_0'(x)\right) dx = 0.$$

Perciò, integrando la disuguaglianza iniziale, si deduce che

$$\liminf_{n\to+\infty} I[u_n] \geq I[u_0].$$

Ciò mostra che il funzionale $I[u]$ è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente. Tale proprietà sostituisce la 2 di pag. Md41.

Il procedimento testé illustrato si applica anche al caso $\alpha = \beta = 1$ e mostra che, a maggior ragione, il funzionale di Dirichlet (1) è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente.

ESEMPIO 6

Il funzionale lunghezza del grafico, definito nella (2) e indicato non $J[u]$, si minimizza facilmente nella classe X delle funzioni $u \in C^1([0,b])$ tali che $u(0) = 0$ e $u(b) = u_b$ (Esercizi [105]).

Tuttavia, per il suo significato geometrico, esso si presta ad illustrare la semicontinuità (v. [3, pag. 162])

Mostriamo innanzitutto che $J[u]$ è discontinuo rispetto alla convergenza uniforme.

Poniamo, per semplicità, $b = 2\pi$ e consideriamo le funzioni u_n definite nella (38), che convergono uniformemente alla funzione identicamente nulla u_0. Posto

$$\begin{aligned} L_n &= J[u_n] \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 nx}\, dx, \end{aligned}$$

con il cambiamento di variabile $t = nx$ si verifica che $L_n = L_1$ per ogni $n \geq 1$.

Essendo $\cos^2 x$ non negativa e non identicamente nulla, si vede anche che

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \\ &> 2\pi = J[u_0], \end{aligned}$$

dunque $J[u_n] \to L_1 > J[u_0]$ e perciò J è discontinuo rispetto alla convergenza uniforme.

Per curiosità, con i metodi dell'analisi numerica si trova $L_1 = 7.64\ldots$

Ora dimostriamo che il funzionale J nella (2) è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme [26, pag. 286].

Consideriamo una successione arbitraria di funzioni $u_n \in C^1([a,b])$ che convergono uniformemente ad una funzione u_0.

Preso $\varepsilon > 0$, esiste k_ε tale che la funzione lineare a tratti v_{0,k_ε} definita da

$$v_{0,\,k_\varepsilon}(x) = \tfrac{u_0(x_i)-u_0(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\,(x-x_i) + u_0(x_i)$$

per $x \in [x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1, \ldots, k_\varepsilon$, essendo $x_i = a + (b-a)\, i/k_\varepsilon$ per $i = 0, \ldots, k_\varepsilon$, soddisfa

$$J[v_{0,\,k_\varepsilon}] \geq J[u_0] - \varepsilon. \qquad (47)$$

Questo perché $J[v_{0,\,k_\varepsilon}]$ è una somma di Cauchy-Riemann di $J[u_0]$. Posto

$$v_{n,\,k_\varepsilon}(x) = \tfrac{u_n(x_i)-u_n(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\,(x-x_i) + u_n(x_i)$$

per $x \in [x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1, \ldots, k_\varepsilon$, si ha

$$J[u_n] \geq J[v_{n,\,k_\varepsilon}]$$

in quanto ciascun segmento è più corto dell'arco avente gli stessi estremi. Ma poiché si verifica direttamente che

$$\lim_{n\to+\infty} J[v_{n,\,k_\varepsilon}] = J[v_{0,\,k_\varepsilon}],$$

tenendo conto anche della (47) possiamo scrivere

$$\liminf_{n\to+\infty} J[u_n] \geq J[u_0] - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha dunque

$$\liminf_{n\to+\infty} J[u_n] \geq J[u_0]$$

il che dimostra la semicontinuità inferiore del funzionale lunghezza del grafico.

Conclusioni

Torniamo a considerare una successione minimizzante (u_n) per il funzionale I di pag. Md41 nella classe X definita a pag. Md45.

Per il teorema di compattezza debole, esistono una sottosuccessione (u_{n_k}) ed una funzione $u_0 \in X$ tali che (v. pag. Md45)

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0. \tag{48}$$

Abbiamo visto, a pag. Md47, che il funzionale I è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente, dunque la (48) implica

$$\liminf_{k\to+\infty} I[u_{n_k}] = I[u_0].$$

D'altro canto, essendo (u_n) una successione minimizzante, si ha a maggior ragione

$$\lim_{k\to+\infty} I[u_{n_k}] = \inf_{u\in X} I[u]$$

e perciò

$$I[u_0] = \inf_{u\in X} I[u]$$

quindi u_0 è una minimante.

Teorema fondamentale

Il ragionamento appena svolto sta alla base del seguente teorema:

una qualunque funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente

$$F\colon X \to \mathbb{R}$$

avente per dominio uno spazio topologico sequenzialmente compatto X ammette minimo.

Dimostrazione. Sia (u_n) una successione minimizzante, e cioè tale che

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = \inf_{u\in X} F[u]. \tag{49}$$

Essendo X sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) convergente ad un certo elemento $u_0 \in X$.

Essendo F semicontinua inferiormente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$F[u_{n_k}] \geq F[u_0] - \varepsilon$$

Osserviamo che, per la (49), si ha a maggior ragione

$$\lim_{k\to+\infty} F[u_{n_k}] = \inf_{u\in X} F[u]$$

e perciò possiamo scrivere

$$\inf_{u\in X} F[u] \geq F[u_0] - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue che $\inf_{u\in X} F[u] \geq F[u_0]$, ma per la definizione di estremo inferiore risulta ovviamente

$$\inf_{u\in X} F[u] \leq F[u_0].$$

Si conclude che vale l'uguaglianza, e perciò F ammette minimo, come volevasi dimostrare.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[2] R. A. Adams, J.J.F. Fournier, Sobolev spaces, 2nd edition. Academic Press, 2003.

[3] L. Amerio, Analisi matematica, vol. 3, parte seconda. UTET, 1982. Vedasi in particolare il capitolo 2: Calcolo delle variazioni nell'indirizzo di Tonelli.

[4] R. Baire *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles.* C.R. Acad. Sci. Paris **125** (1897), 691–694.

[5] H. Brézis, Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori, 1986.

[6] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, One-dimensional variational Problems. An introduction. Clarendon Press, 1998.

[7] R. Caccioppoli, *Sui teoremi d'esistenza di Riemann.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **7** (1938), 177–187.

[8] J. W. Calkin, *Functions of several variables and absolute continuity. I.* Duke Math. J. **6** (1940), 170–186.

[9] L. Cesari, Optimization - theory and applications. Springer, 1983.

[10] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces.* Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[11] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience, 1958.

[12] R. Courant, D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. II. Interscience, 1962 (rist. Wiley, 1989).

[13] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations. Springer, 1989.

[14] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces.* Bull. Sci. Math. **136** (2012), 521–573.

[15] P. Dugac, *Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire.* Archive for History of Exact Sciences **15** (1976), 297–383.

[16] L. C. Evans, R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. CRC Press, 1992.

[17] P. Freguglia, M. Giaquinta, The early period of the calculus of variations. Birkhäuser, 2016.

[18] K. O. Friedrichs, *The identity of weak and strong extensions of differential operators*. Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[19] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of variations. Springer, 1996.

[20] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition. Springer-Verlag, 1998.

[21] E. Giusti, Metodi diretti nel calcolo delle variazioni. Unione Matematica Italiana, 1994.

[22] A. Greco, *Minimization of non-coercive integrals by means of convex rearrangement.* Adv. Calc. Var. **5** (2012), 231–249.

[23] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press, 1980. Ristampa: Classics in Applied Mathematics **31**, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 2000.

[24] M. Kline, Storia del pensiero matematico. Einaudi.

[25] A. Kolmogorov, *Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel (Sulla compattezza degli insiemi di funzioni rispetto alla convergenza in media).* Nachrichten Göttingen **1931** (1931), 60–63.

[26] H. L. Lebesgue. *Intégrale, longueur, aire.* Annali di Mat. (3) **7** (1902), 231–359.

[27] B. Levi, *Sul principio di Dirichlet.* Palermo Rend. **22** (1906), 293-360.

[28] C. B. Morrey, *Functions of several variables and absolute continuity. II.* Duke math. J. **6** (1940), 187–215.

[29] C. B. Morrey, Multiple integrals in the calculus of variations. Springer, 1966.

[30] J. Naumann, *Remarks on the prehistory of Sobolev spaces.* Articolo online.

[31] A. C. Ponce, Topics on calculus of variations. Dispensa del corso tenuto all'ICTP di Trieste (2006).

[32] C. Pucci, Istituzioni di analisi superiore. Unione Matematica Italiana, 2013.

[33] G. A. Pozzi, Appunti per il corso di analisi funzionale. Dispensa (2007).

[34] F. Rellich, *Ein Satz über mittlere Konvergenz (Un teorema sulla convergenza in media).* Nachrichten Göttingen **1930** (1930), 30–35.

[35] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*. Math. Ann. **69** (1910), 449-497.

[36] D. V. Widder, The heat equation. Academic Press, 1975.

[37] K. Yosida, Functional analysis. Springer-Verlag, 1980.

I capitoli "Gli albori del metodo diretto" e "Il teorema fondamentale" attingono alla dispensa "Introduzione alla minimizzazione in spazi di Banach di dimensione infinita" scritta dal prof. L. Boccardo (Sapienza, Roma) in occasione delle sue due visite all'università di Cagliari (2014 e 2015).