Appendice
Serie e trasformata di Fourier

1 - Segnali periodici: sviluppo in serie di Fourier

Un segnale è periodico nel tempo quando si ripete ogni T secondi:

$$x(t) = x(t + iT) \tag{1.1}$$

L'indice i = 1, 2, 3 ... rappresenta la replica del segnale elementare, che si succede identica nel tempo ogni periodo di durata T. Si veda, come esempio, il segnale reale $x(t)$ in Fig.1.1.

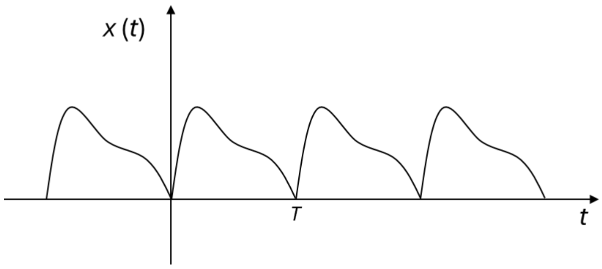

Fig.1.1 - *Segnale periodico*

Se T è il periodo, espresso in secondi [s], $f_0 = 1/T$ è la frequenza fondamentale, in hertz [Hz], e $\omega_0 = 2\pi f_0$ è la pulsazione fondamentale, che si esprime in radianti per secondo [rad/s].
Per i segnali periodici la rappresentazione più usata nel dominio della frequenza è costituita dalla scomposizione in serie di Fourier, mediante componenti armoniche a frequenze kf_0, multiple della frequenza fondamentale f_0:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X}_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \tag{1.2}$$

I coefficienti $\boldsymbol{X}_k$ dello sviluppo in serie di Fourier possono essere determinati moltiplicando membro a membro l'Eq.1.2 per la funzione $e^{-j2\pi k' f_0 t}$ e mediando nel periodo T. Al secondo membro risulteranno pertanto termini del tipo $e^{j2\pi(k-k')f_0 t}$. Se k' è diverso da k, la media di una funzione sinusoidale in un tempo multiplo intero del suo periodo T è sempre nulla. Se, invece, $k' = k$, si otterrà un risultato diverso da zero.
Tenuto conto di questi fatti si ha:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\, cos(\, 2\pi k f_0 t) dt - j\frac{1}{T}\int_T x(t)\, sin(\, 2\pi k f_0 t) dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

I coefficienti $\boldsymbol{X}_k$ dello sviluppo in serie di Fourier risultano quindi quantità complesse e possono essere espressi in coordinate cartesiane o polari:

$$\boldsymbol{X}_k = Re[\boldsymbol{X}_k] + j\, Im[\boldsymbol{X}_k] = |\boldsymbol{X}_k| \cdot e^{j\phi_k} \tag{1.4}$$

L'insieme di tali coefficienti, rappresentati in funzione delle frequenze discrete kf_0 o più semplicemente in funzione dell'ordine k della generica armonica, è lo spettro a righe del segnale periodico $x(t)$. Si veda in Fig.1.2, come esempio, la rappresentazione della parte reale e della parte immaginaria dei coefficienti $\boldsymbol{X}_k$ dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale.

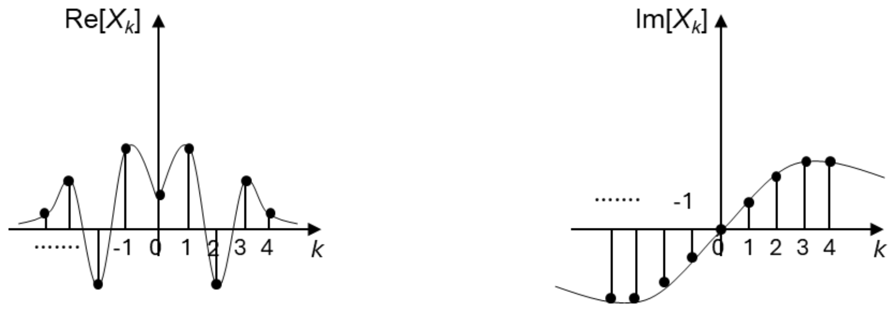

Fig.1.2 - C*oefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (parte reale e parte immaginaria).*

Per un segnale reale, lo spettro di parte reale $Re[\boldsymbol{X}_k]$ è una funzione pari della frequenza, mentre lo spettro di parte immaginaria $Im[\boldsymbol{X}_k]$ è una funzione dispari.
Allo stesso modo, lo spettro del modulo $|\boldsymbol{X}_k|$ presenta una simmetria pari, mentre quello della fase φ_k ha simmetria dispari.
Tali condizioni di simmetria si possono anche esprimere brevemente, introducendo la forma coniugata, indicata con l'asterisco (*), del numero complesso $\boldsymbol{X}_k$:

$$\boldsymbol{X}_{-k} = \boldsymbol{X}_k^* \tag{1.5}$$

Tenendo conto delle caratteristiche di simmetria dello spettro bilatero, si ottengono sviluppi con funzioni trigonometriche che contengono solo indici k positivi:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|\boldsymbol{X}_k|\, cos(\,2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{1.6}$$

e:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k\, cos(2\pi k f_0 t) + B_k\, sin(2\pi k f_0 t)] \tag{1.7}$$

dove

$$\begin{aligned} A_k &= 2\,Re[\,\boldsymbol{X}_k] = \frac{2}{T}\int_T x(t)\, cos(\,2\pi k f_0 t) dt \\ B_k &= -2\,Im[\,\boldsymbol{X}_k] = \frac{2}{T}\int_T x(t)\, sin(\,2\pi k f_0 t) dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

2 - Segnali aperiodici: trasformata di Fourier

Per i segnali aperiodici perde significato lo sviluppo in serie di Fourier, mancando il principale presupposto: la periodicità.
Tali segnali sono caratterizzati in frequenza tramite lo spettro $X(f)$, che può essere ricavato, sotto opportune condizioni di integrabilità, tramite la trasformata di Fourier $F[x(t)]$:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{2.1}$$

Mediante l'antitrasformata $F^{-1}[X(f)]$ si ricostruisce viceversa il segnale nel tempo $s(t)$:

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \qquad (2.2)$$

Poiché la trasformata di Fourier è una funzione continua nel dominio della frequenza, esiste un'infinità di componenti armoniche di ampiezza infinitesima $|X(f)|df$ e fase $\angle X(f)$, come illustrato a titolo di esempio in Fig.2.1.

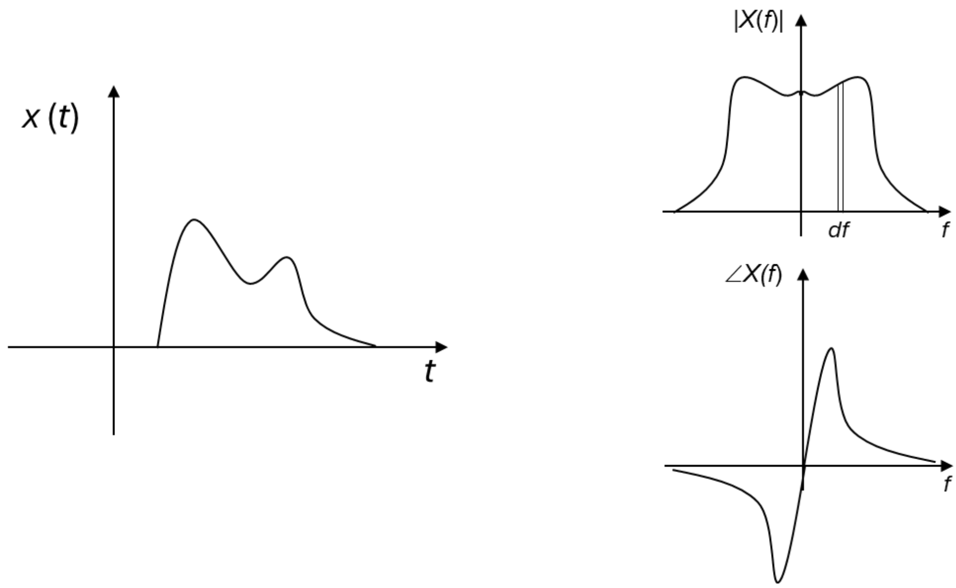

Fig.2.1 - *Segnale aperiodico e suo spettro.*

Proprietà della trasformata di Fourier

a) Linearità
La trasformata di Fourier della combinazione lineare di due segnali è uguale alla combinazione lineare delle trasformate di Fourier dei due segnali:

$$F[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\ ] = a_1 F[x_1(t)] + a_2 F[x_2(t)] = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f) \qquad (2.1)$$

b) Simmetria
La trasformata di Fourier di un segnale reale gode di simmetria complessa coniugata:

$$X(-f) = X^*(f) \qquad (2.2)$$

La parte reale e il modulo sono pari, cioè simmetrici rispetto all'origine, mentre la parte immaginaria e la fase sono dispari, cioè antisimmetriche rispetto all'origine.
Si hanno i seguenti casi particolari:
- se il segnale $x(t)$ è a valori reali e pari, allora la trasformata $X(f)$ è a valori reali e pari;
- se il segnale $x(t)$ è a valori reali e dispari, allora la trasformata $X(f)$ è a valori immaginari puri e dispari.

c) Traslazione nella frequenza e modulazione
Traslare uno spettro *in frequenza* di una quantità f_0 fa perdere le caratteristiche di simmetria rispetto all'origine, con la conseguenza che il segnale nel tempo non è più reale. Infatti, posto $\beta = f - f_0$, si ha:

$$F^{-1}[X(f-f_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f-f_0)e^{j2\pi ft}df = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)e^{j2\pi(\beta+f_0)t}d\beta = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.3)$$

D’altra parte, traslando lo spettro originario della stessa quantità $\pm f_0$ sia a destra che a sinistra dell’origine, il segnale corrispondente (a causa della ripristinata simmetria in frequenza) risulta reale. Si ottiene infatti:

$$F^{-1}[X(f-f_0)+X(f+f_0)] = x(t)e^{j2\pi f_0 t} + x(t)e^{-j2\pi f_0 t} = \\ = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad (2.4)$$

Questa operazione corrisponde quindi ad una ***modulazione***, ossia a moltiplicare il segnale originario $x(t)$ nel tempo per un’oscillazione cosinusoidale di frequenza f_0.

d) Traslazione nel tempo

Traslare un segnale *nel tempo* di una quantità t_0 (ritardo) comporta una variazione della fase dello spettro. Infatti, posto $\tau = t - t_0$, si ha:

$$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f(\tau+t_0)}d\tau = X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (2.5)$$

e) Derivazione nel tempo

La trasformata di Fourier di un segnale derivato nel tempo è uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$F\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right] = j2\pi f F[x(t)] = j2\pi f X(f) \quad (2.6)$$

f) Dualità

Se la trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ è pari a $X(f)$, vale la seguente relazione duale:

$$F[X(-t)] = x(f) \quad (2.7)$$

Trasformate di Fourier di alcune funzioni elementari

a) Segnale rettangolare

Applicando la definizione di trasformata di Fourier al segnale rettangolare di Fig.2.2, con ampiezza A e durata T (area Q=AT), si ottiene la funzione seno cardinale (*sinc*), che si annulla per tutti i valori di frequenza pari a multipli interi di 1/T, tranne nell’origine, dove ha valore unitario (Fig.2.3):

$$x(t) = A \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = AT \cdot sinc(fT) \quad (2.8)$$

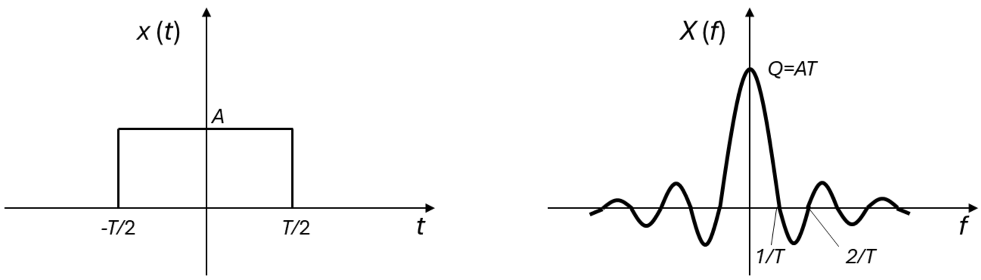

Fig.2.2 - *Segnale rettangolare e suo spettro (funzione seno cardinale).*

b) Impulso matematico
Lo spettro di un impulso matematico temporale di area unitaria (Q=1) si ottiene portando al limite (T$\rightarrow$0) la durata dell'impulso rettangolare, mantenendone costante l'area (pertanto con ampiezza $A\rightarrow\infty$).
Portando al limite per T$\rightarrow$0 gli andamenti di Fig.2.2, si vede che lo spettro si riduce a una costante per tutte le frequenze, con valore pari all'area unitaria (Q=1).
Lo spettro dell'impulso matematico ha quindi un'estensione infinitamente ampia:

$$F[\delta(t)] = 1 = \text{costante } \forall \ f \tag{2.9}$$

In modo duale, la trasformata di Fourier di una costante è un impulso matematico.

3 - Trasformata di Fourier di segnali periodici

Si è mostrato che per un segnale periodico esiste lo sviluppo in serie di Fourier (1.2), nel quale ciascun termine della serie è una costante X_k moltiplicata per un esponenziale.
Considerando che:
a) la trasformata di Fourier di una costante X_k è un impulso matematico:

$$F[X_k] = X_k\delta(f) \tag{3.1}$$

b) la presenza di un esponenziale si traduce in una traslazione in frequenza:

$$F\left[X_k e^{j2\pi k f_1 t}\right] = X_k\delta(f - kf_1) \tag{3.2}$$

si conclude che anche per i segnali periodici esiste la trasformata di Fourier, seppure in senso limite:

$$F[x(t)] = F\left[\textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_1 t}\right] = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\delta(f - kf_1) \tag{3.3}$$

Questa conclusione è interessante, in quanto consente di utilizzare le trasformate di Fourier, oltre che per i segnali aperiodici, anche per quelli periodici, consentendo di unificare il metodo di trattamento dei segnali nel dominio della frequenza, laddove ciò appaia conveniente.
A titolo di esempio, la trasformata di Fourier di un segnale sinusoidale di ampiezza A e frequenza f_0 (periodo T_0 =1/f_0), è costituita da due impulsi di pari area (A/2) alle frequenze ± f_0, come mostrato in Fig.3.1.

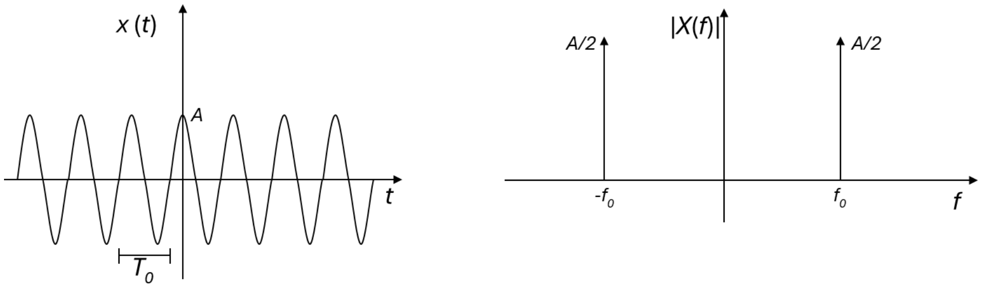

Fig.3.1 – *Segnale sinusoidale e suo spettro (modulo).*

Se si considera invece infine il treno di impulsi matematici $c(t)$, con periodo T_c e area unitaria, la sua trasformata di Fourier è rappresentata ancora da un treno di impulsi, distanziati tra loro di intervalli pari a $f_c = 1/T_c$, come rappresentato in Fig.3.2.

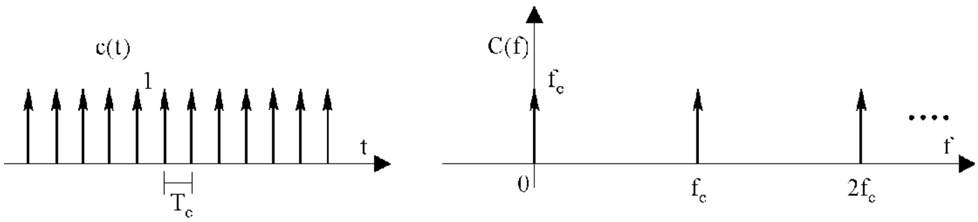

Fig.3.2 - *Sequenza di impulsi matematici e relativa trasformata di Fourier.*

4 - Trasformata e antitrasformata di Fourier del prodotto di due funzioni

Il prodotto (o integrale) di convoluzione tra due funzioni è l'integrale del prodotto della prima funzione per la seconda funzione rovesciata e traslata:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) d\tau \qquad (4.1)$$

Come caso particolare, eseguire la convoluzione di una funzione $x(t)$ con una funzione impulsiva $\delta(t - t_0)$ centrata in $t = t_0$ equivale a traslare di t_0 la funzione x:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \qquad (4.2)$$

L'antitrasformata di Fourier del prodotto di due funzioni nel dominio della frequenza è pari alla convoluzione tra i rispettivi segnali nel dominio del tempo:

$$F^{-1}[X_1(f) \cdot X_2(f)\ ] = F^{-1}[X_1(f)] * \ F^{-1}[X_2(f)] = x_1(t) * \ x_2(t) \qquad (4.3)$$

La trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni nel dominio del tempo è pari alla convoluzione tra i rispettivi spettri:

$$F[x_1(t) \cdot x_2(t)\ ] = F[x_1(t)] * \ F[x_2(t)] = X_1(f) * \ X_2(f) \qquad (4.4)$$