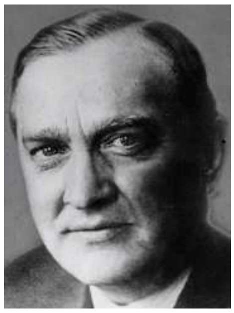
Leonida Tonelli
(1885–1946)



Stefan Banach
(1892–1945)

Elementi di analisi funzionale e metodo diretto del calcolo delle variazioni

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

25-10-2017

Indice

Svolgimento degli esercizi

[201]

Estremi, e cicloide

1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, l'eventuale massimo e l'eventuale minimo del funzionale

$$F[u] = \int_0^1 u^2(x)\, dx$$

nella classe $X = \{\, u \in C^0([0,1]) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 1 \,\}$.

Osservando il funzionale, sembrerebbe che possa assumere valori arbitrariamente grandi, e perciò

$$\sup_{u\in X} F[u] = +\infty. \qquad (1)$$

Per verificare la congettura, osserviamo che la funzione $u_n(x) = x + nx\,(1-x)$ appartiene alla classe X per ogni intero n. Si ha inoltre

$$\begin{aligned} u_n^2(x) &= (x + nx\,(1-x))^2 \\ &\geq 2nx^2\,(1-x). \end{aligned}$$

Posto dunque

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2\,(1-x)\, dx \\ &= \frac{1}{12} > 0, \end{aligned}$$

si trova $F[u_n] \geq 2nI$, e di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} F[u_n] = +\infty,$$

il che implica la (1). Possiamo perciò affermare che il funzionale dato non ammette massimo.

Per concludere l'esercizio, verifichiamo che

$$\inf_{u\in X} F[u] = 0. \qquad (2)$$

Innanzitutto osserviamo che $F[u] \geq 0$ per ogni $u \in X$, dunque 0 è un minorante.

Anzi, ogni funzione $u \in X$ soddisfa, per continuità, $u^2(x) > \frac{1}{2}$ nell'intervallo $(a_u, 1]$ con un a_u opportuno, e perciò

$$F[u] > 0 \text{ per ogni } u \in X. \qquad (3)$$

Per verificare che 0 è il minorante più grande, poniamo $u_n(x) = x^n$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} F[u_n] &= \int_0^1 x^{2n}\, dx \\ &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono funzioni $u_n \in X$ tali che $F[u_n] < \varepsilon$, e perciò nessun numero $\varepsilon > 0$ può qualificarsi come minorante.

Abbiamo così dimostrato la (2). Usando la (3), si conclude che il funzionale dato non ammette minimo nella classe X.

2) Trovare le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(\vartheta) \\ y = y(\vartheta) \end{cases}$$

della cicloide descritta da un punto P fissato su di una circonferenza di raggio R che rotola sotto l'asse x, essendo ϑ l'angolo di rotazione e supponendo

$$(x(0), y(0)) = (0, 0).$$

Suggerimento: indicate con

$$(x_C, -R)$$

le coordinate del centro della circonferenza, l'assenza di strisciamento è espressa dall'uguaglianza $x_C = R\vartheta$.

Per svolgere l'esercizio si può procedere come a pag. Mc46 degli appunti di lezione.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[202]

Non ammette minimo

1) Fissato $R_0 \in (0,1)$, e indicata con Ω la corona circolare $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_0^2 < x^2+y^2 < 1 \}$, si consideri il cosiddetto "funzionale dell'area"

$$J[u] = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u(x,y)|^2}\, dx\, dy$$

nella classe X costituita dalle funzioni $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che $u(x,y) = 0$ se $x^2+y^2 = R_0^2$ e $u(x,y) = 1$ se $x^2+y^2 = 1$. Verificare che se esiste una minimante u_0, non ve ne sono altre.

Suggerimento: le funzioni strettamente convesse $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soddisfano $f(\frac{p_0+p_1}{2}) < \frac{1}{2}\,(f(p_0)+f(p_1))$ per ogni $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ distinti. Se esistesse un'altra minimante u_1, allora, ponendo $f(p) = \sqrt{1+|p|^2}, p_0 = \nabla u_0(x,y)$, e $p_1 = \nabla u_1(x,y)$, e integrando...

Posto $u_2(x) = \frac{1}{2}\,(u_0(x)+u_1(x))$, e procedendo come suggerito, otteniamo

$$J[u_2] < \tfrac{1}{2}\,(J[u_0]+J[u_1]).$$

Ma siccome per ipotesi si ha

$$J[u_0] = J[u_1] = \min_{u\in X} J[u],$$

se ne deduce che

$$J[u_2] < \min_{u\in X} J[u],$$

il che è assurdo perché $u_2 \in X$.

2) Verificare che un'eventuale minimante u_0 è una funzione radiale $u_0(x,y) = v_0(\rho)$, dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Suggerimento: se così non fosse, allora, ruotando u_0...

Se u_0 non è una funzione radiale, allora esiste una rotazione del piano xy intorno all'origine che trasforma u_0 in una funzione u_1 distinta da u_0.

Ma siccome il funzionale J è invariante per rotazioni, si ha $J[u_1] = J[u_0]$, il che è assurdo per l'esercizio precedente.

---

3) Scrivere $J[u_0]$ in coordinate polari, ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange, e risolverla tenendo conto che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sett}\cosh|x|) + C.$$

Posto $u_0(x,y) = v_0(\rho)$, dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, derivando rispetto ad x ed y si trova

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\, v'(\rho), \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\, v'(\rho), \end{cases}$$

da cui si ricava $|\nabla u_0(x,y)|^2 = (v'(\rho))^2$. Perciò, passando a coordinate polari, si ha

$$J[u_0] = 2\pi \int_{R_0}^1 \rho\, \sqrt{1+(v_0'(\rho))^2}\, d\rho.$$

Dunque la funzione v_0 sarà soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\rho}\, \frac{\rho\, v_0'(\rho)}{\sqrt{1+(v_0'(\rho))^2}} = 0. \tag{4}$$

L'equazione (4) ammette l'integrale primo

$$\frac{v_0'(\rho)}{\sqrt{1+(v_0'(\rho))^2}} = \frac{k}{\rho}, \qquad (5)$$

dove $k \in \mathbb{R}$. In particolare, per $k = 0$ si trova v_0 = costante. Se, invece, $k \neq 0$, si ricava

$$\begin{aligned} v_0'(\rho) &= \frac{k/\rho}{\sqrt{1-(k/\rho)^2}} \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(k)}{\sqrt{(\rho/k)^2-1}}. \end{aligned}$$

Integrando quest'ultima relazione si ottiene, infine

$$v_0(\rho) = \int \frac{\operatorname{sgn}(k)\, d\rho}{\sqrt{(\rho/k)^2-1}}.$$

Da qui, effettuando la sostituzione $\rho = kx$, si giunge a

$$\begin{aligned} v_0(\rho) &= \int \frac{|k|\, dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= k \operatorname{sett\,cosh}(\rho/|k|) + C. \qquad (6) \end{aligned}$$

Tali funzioni, unitamente con le costanti, costituiscono l'integrale generale dell'equazione di Eulero.

Cenni alle funzioni iperboliche inverse si possono trovare a pag. Mc64 degli appunti di lezione.

4) Sapendo che $0 \leq \operatorname{sett\,cosh} x < x$ per ogni $x \geq 1$, dimostrare che J non ammette minimo nella classe X.

Se il funzionale J ammettesse minimo nella classe X, allora:

- esisterebbe un'unica minimante u_0 (esercizio 1);
- la minimante u_0 sarebbe una funzione radiale (esercizio 2), e cioè del tipo $u_0(x, y) = v_0(\rho)$;
- la funzione v_0 avrebbe la forma indicata nella (6).

Tuttavia, non esiste alcun valore delle costanti k, C per il quale v_0 assuma i valori assegnati agli estremi.

Infatti l'integrale primo (5) mostra che v_0' non cambia segno, e poiché $v_0(R_0) = 0 < 1 = v_0(1)$, deve aversi $v_0'(\rho) > 0$ per ogni $\rho \in [R_0, 1]$ e $k > 0$.

Più precisamente, sostituendo $\rho = 1$ nella (5) si trova $k \in (0, 1)$. Imponendo $v_0(R_0) = 0$ nella (6) si ricava

$$C = -k \operatorname{sett\,cosh}(R_0/k),$$

quindi v_0 deve avere la forma

$$\frac{v_0(\rho)}{k} = \operatorname{sett\,cosh}(\rho/k) - \operatorname{sett\,cosh}(R_0/k).$$

Ma sostituendo $v_0(1) = 1$ si trova

$$\begin{aligned} 1/k &= \operatorname{sett\,cosh}(1/k) - \operatorname{sett\,cosh}(R_0/k) \\ &\leq \operatorname{sett\,cosh}(1/k), \end{aligned}$$

e questo è impossibile perché $x > \operatorname{sett\,cosh} x$ per ogni $x = 1/k > 1$.

[203]

Successioni massimizzanti

1) Fissata una costante $L \in (0, +\infty)$, trovare una successione massimizzante per la funzione $F(R) = |R|$ (= area di R) avente per dominio l'insieme dei rettangoli $R \subset \mathbb{R}^2$ di perimetro L.

È noto che il quadrato R_0 di lato $L/4$ ha l'area maggiore fra tutti i rettangoli di perimetro L.

Perciò una successione massimizzante per la funzione F è la successione costante data da $R_n = R_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

---

2) Trovare una successione massimizzante per la funzione $F(\Omega) = |\Omega|$ (= area di Ω) avente per dominio l'insieme dei domini piani limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di classe C^1.

La successione dei dischi $\Omega_n = B(0, n)$ centrati nell'origine e di raggio $n \in \mathbb{Z}^+$ ha la proprietà che $F(\Omega_n) = \pi\, n^2 \to +\infty$.

Se ne deduce che $\sup F = +\infty$, e che la successione (Ω_n) è una successione massimizzante.

3) Trovare una successione massimizzante per la funzione $F(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}|$ (= area di $\mathcal{P}$) avente per dominio l'insieme dei poligoni $\mathcal{P}$ inclusi nel disco $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio 1.

Osserviamo innanzitutto che per ogni poligono $\mathcal{P} \subset B(0,1)$ risulta

$$|\mathcal{P}| \leq \pi. \tag{7}$$

Ora indichiamo con $\mathcal{P}_n$, $n \geq 3$, un poligono regolare con n lati centrato nell'origine e di raggio 1.

Verifichiamo che la successione $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 3}$ è una successione massimizzante per la funzione F.

Il poligono $\mathcal{P}_n$ è costituito da n triangoli isosceli aventi due lati di lunghezza unitaria ed il terzo lato di lunghezza ℓ_n data da

$$\ell_n = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}.$$

Inoltre l'apotema del poligono $\mathcal{P}_n$ misura

$$a_n = \cos \frac{\pi}{n},$$

risulta quindi

$$\begin{aligned} F(\mathcal{P}_n) &= n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \\ &= \pi \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cos \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

e di conseguenza $F(\mathcal{P}_n) \to \pi$. Confrontando questo risultato con la (7) si deduce che $\sup F = \pi$ e che la successione $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 3}$ è una successione massimizzante per la funzione F.

4) Trovare una successione minimizzante per il funzionale

$$F[u] = \int_0^{2\pi} u^2(x)\,dx$$

avente per dominio l'insieme $X = \{\, u \in C^1([0, 2\pi]) \mid u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \,\}$.

Osserviamo innanzitutto che per ogni funzione $u \in X$ risulta

$$F[u] \geq 0. \tag{8}$$

Ora indichiamo con $u_n \in X$ la funzione $u_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$, e verifichiamo che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ è una successione minimizzante per il funzionale F.

Essendo $\operatorname{sen}^2 nx \leq 1$, si vede immediatamente che

$$F[u_n] \leq \frac{2\pi}{n},$$

ed è facile verificare, più esattamente, che $F[u_n] = \frac{\pi}{n}$. Dunque

$$F[u_n] \to 0.$$

Confrontando questo risultato con la (8) si deduce che $\inf F = 0$ e che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ è una successione minimizzante per il funzionale F.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[204]

Lo spazio $W^{1,2}((a,b))$

1) Stabilire per quali $\alpha \in [0,+\infty)$ la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $W^{1,2}((0,1))$.

La funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ è derivabile con continuità, dunque anche in senso debole, nell'intervallo $(0,1)$, e la sua derivata è

$$u'(x) = -\alpha\, x^{-\alpha-1}. \tag{9}$$

Per stabilire se $u \in L^2((0,1))$, dobbiamo capire per quali $\alpha \in [0,+\infty)$ il seguente integrale ha un valore finito:

$$\int_0^1 x^{-2\alpha}\, dx.$$

Il suddetto integrale si calcola elementarmente, e si trova:

$$\int_0^1 x^{-2\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 2\alpha \geq 1; \\ \frac{1}{1-2\alpha}, & \text{se } 2\alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $L^2((0,1))$ per ogni $\alpha \in [0,\, 1/2)$, e non vi appartiene se $\alpha \in [1/2,\, +\infty)$.

Per completare l'esercizio dobbiamo stabilire per quali $\alpha \in [0, 1/2)$ la funzione $u'(x) = -\alpha\, x^{-\alpha-1}$ appartiene allo spazio $L^2((0,1))$.

Osserviamo innanzitutto che per $\alpha = 0$ la funzione $x^{-\alpha}$ è la costante 1 ed ha la derivata identicamente nulla, quindi

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dx}\, u^{-\alpha}(x) \right|^2 dx = 0 < +\infty.$$

Ne segue che $x^{-\alpha} \in W^{1,2}((0,1))$ per $\alpha = 0$. Consideriamo adesso il caso $\alpha \in (0,1/2)$. La derivata $u'(x) = -\alpha\, x^{-(\alpha+1)}$ soddisfa la condizione

$$\int_0^1 \alpha^2\, x^{-2\,(\alpha+1)}\, dx < +\infty$$

se e solo se $2\,(\alpha+1) < 1$. Ma poiché $2\,(\alpha+1) > 2$, questa condizione non può essere soddisfatta e pertanto se $\alpha \in (0,+\infty)$ la funzione $x^{-\alpha}$ non appartiene allo spazio $W^{1,2}((0,1))$.

In accordo con questo risultato, si può dimostrare che per ogni funzione $u \in W^{1,2}((0,1))$ esistono e sono finiti i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} u(x), \qquad \lim_{x\to 1^-} u(x).$$

2) Stabilire per quali $\alpha \in [0,+\infty)$ la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $W^{1,2}((1,+\infty))$.

La funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ è derivabile con continuità, dunque anche in senso debole, nell'intervallo $(1,+\infty)$, e la sua derivata è come nella (9).

Per stabilire se $u \in L^2((1,+\infty))$, dobbiamo capire per quali $\alpha \in [0,+\infty)$ il seguente integrale ha un valore finito:

$$\int_1^{+\infty} x^{-2\alpha}\, dx.$$

Il suddetto integrale si calcola elementarmente, e si trova:

$$\int_1^{+\infty} x^{-2\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 2\alpha \le 1; \\ \frac{1}{2\alpha-1}, & \text{se } 2\alpha > 1. \end{cases}$$

Pertanto la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $L^2((1,+\infty))$ per ogni $\alpha \in (1/2,+\infty)$, e non vi appartiene se $\alpha \in [0,\, 1/2]$.

Per completare l'esercizio dobbiamo stabilire per quali $\alpha \in (1/2,+\infty)$ la funzione $u'(x) = -\alpha\, x^{-\alpha-1}$ appartiene allo spazio $L^2((1,+\infty))$, cioè

$$\int_1^{+\infty} \alpha^2\, x^{-2\,(\alpha+1)}\, dx < +\infty$$

Poiché $2\,(\alpha+1) > 3 > 1$, si conclude che $u^{-\alpha} \in W^{1,2}((1,+\infty))$ per ogni $\alpha > 1/2$.

3) (a) Stabilire se la successione $u_n(x) = x^n$ converge in $W^{1,2}((0,1))$.

Le funzioni $u_n(x) = x^n$ sono di classe $C^\infty([0,1])$, dunque appartengono a maggior ragione allo spazio di Sobolev $W^{1,2}((0,1))$.

Se la successione u_n converge in $L^2((0,1))$ ad una funzione u, essa ammette una sottosuccessione che converge puntualmente alla stessa u. Ma siccome il limite

$$\lim_{n\to+\infty} x^n$$

è nullo per ogni x fissato in $(0,1)$, dobbiamo usare la funzione $u(x) \equiv 0$ nella definizione di limite in $L^2((0,1))$. In definitiva, dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{2n}\, dx.$$

L'integrale si calcola elementarmente, e si trova

$$\int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

e perciò $u_n \to 0$ in $L^2((0,1))$.

Per quanto riguarda, invece, la successione delle derivate $u_n'(x) = n\, x^{n-1}$, si ha

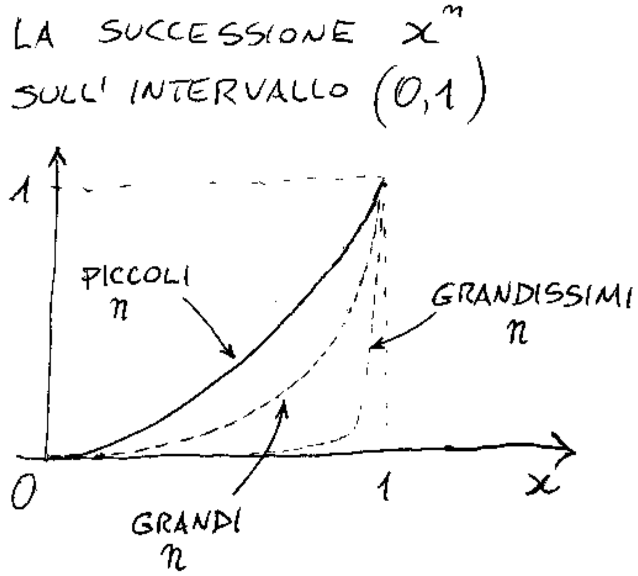
$$\begin{aligned} \int_0^1 n^2\, x^{2\,(n-1)}\, dx &= \frac{n^2}{2\,(n-1)+1} \\ &\to +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che la successione data non converge in $W^{1,2}((0,1))$.

3) (b) Dire se la medesima successione è una successione di Cauchy in $W^{1,2}((0,1))$.

Sapendo che $W^{1,2}((0,1))$ è uno spazio metrico completo, possiamo dire che la successione data è una successione di Cauchy se e solo se converge in $W^{1,2}((0,1))$.

Visto che la successione data non converge, essa non è una successione di Cauchy.



4) (a) Stabilire se la successione $u_n(x) = x^{-n}$ converge in $W^{1,2}((1, +\infty))$.

Dall'esercizio 2 sappiamo che le funzioni $u_n(x) = x^{-n}$ appartengono allo spazio di Sobolev $W^{1,2}((1, +\infty))$ per ogni $n \geq 1$. Siccome il limite
$$\lim_{n\to+\infty} x^{-n}$$
è nullo per ogni x fissato in $(1, +\infty)$, dobbiamo usare la funzione $u(x) \equiv 0$ nella definizione di limite in $L^2((1,+\infty))$. In definitiva, dobbiamo studiare il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} x^{-2n}\, dx. = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$
il quale mostra che $u_n \to 0$ in $L^2((1, +\infty))$. Per quanto riguarda, invece, la successione delle derivate $u_n'(x) = -n\, x^{-(n+1)}$, si ha
$$\int_1^{+\infty} n^2\, x^{-2\,(n+1)}\, dx = \frac{n^2}{2\,(n+1)-1} \to +\infty.$$

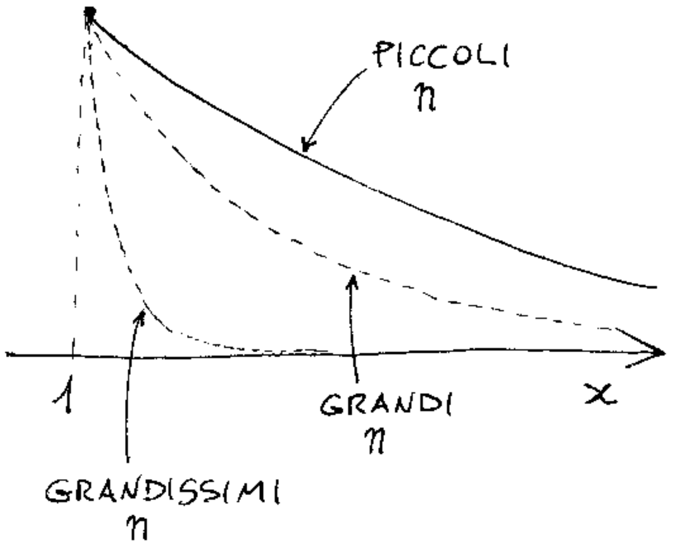
Ne segue che la successione data non converge in $W^{1,2}((1, +\infty))$.

4) (b) Dire se la medesima successione è una successione di Cauchy in $W^{1,2}((1,+\infty))$.

Sapendo che $W^{1,2}((1,+\infty))$ è uno spazio metrico completo, possiamo dire che la successione data è una successione di Cauchy se e solo se converge in $W^{1,2}((1,+\infty))$.

Visto che la successione data non converge, essa non è una successione di Cauchy.

LA SUCCESSIONE $\dfrac{1}{x^n}$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$



SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[205]

Disuguaglianza di Poincaré

Sia R il rettangolo $R = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$, e $u \in C_c^\infty(R)$ una funzione tale che $u(x,y) = 0$ per ogni (x,y) sufficientemente vicino al contorno ∂R.

1) Stabilire per quali $(x,y) \in R$ si ha

$$|u(x,y)| \leq \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt. \tag{10}$$

Suggerimento: usare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Fissato arbitrariamente un punto $(x,y) \in R$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$u(x,y) = \int_c^y \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\, dt,$$

e perciò

$$|u(x,y)| \leq \int_c^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt. \tag{11}$$

Per lo stesso motivo si ha anche

$$-u(x,y) = \int_y^d \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\, dt,$$

quindi

$$|u(x,y)| \leq \int_y^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt. \tag{12}$$

Sommando la (11) e la (12) e dividendo per due si trova

$$|u(x,y)| \leq \frac{1}{2} \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt. \tag{13}$$

Dunque la (10) vale, a maggior ragione, per ogni $(x,y) \in R$.

2) Stabilire per quali $(x,y) \in R$ si ha

$$u^2(x,y) \leq (d-c) \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^2 dt. \tag{14}$$

Suggerimento: applicare alla (10) la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Per poter seguire il suggerimento, scriviamo

$$\int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt = \int_c^d 1 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt$$

ed osserviamo che

$$\begin{aligned} \|1\|^2_{L^2((c,d))} &= \int_c^d dt \\ &= d - c. \end{aligned}$$

Ciò premesso, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz all'integrale nella (13) otteniamo

$$|u(x,y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{d-c} \sqrt{\int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^2 dt}.$$

Elevando al quadrato si trova

$$u^2(x,y) \leq \frac{1}{4}(d-c) \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^2 dt, \tag{15}$$

e quindi la (14) vale, a maggior ragione, per ogni $(x,y) \in R$.

3) Stabilire per quali $(x, y) \in R$ si ha

$$u^2(x,y) \le (d-c) \int_c^d |\nabla u(x,t)|^2 \, dt. \quad (16)$$

Suggerimento: segue banalmente dalla (14).

Osservando che

$$\begin{aligned} |\nabla u(x,t)|^2 &= \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2 \\ &\ge \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2 \end{aligned}$$

dalla (15) segue

$$u^2(x,y) \le \frac{1}{4}\,(d-c) \int_c^d |\nabla u(x,t)|^2 \, dt \quad (17)$$

e perciò la (16) vale, a maggior ragione, per ogni $(x, y) \in R$.

4) Stabilire se esiste una costante C, indipendente dalla funzione u, tale che $\|u\|_2 \le C\,\|\nabla u\|_2$. Suggerimento: integrare la (16) prima in dx e poi in dy.

Integrando ambo i membri della (17) rispetto alla x sull'intervallo (a, b), ed usando le formule di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici, troviamo

$$\int_a^b u^2(x,y)\,dx \le \frac{1}{4}\,(d-c) \int_R |\nabla u(x,t)|^2 \, dx\,dt.$$

Ora osserviamo che il primo membro dipende da y, mentre il secondo è una costante.

Integrando ambo i membri rispetto alla y sull'intervallo (c, d), ed usando ancora le formule di riduzione, troviamo

$$\int_R u^2(x,y)\,dx\,dy \le \frac{1}{4}\,|R| \int_R |\nabla u(x,t)|^2 \, dx\,dt,$$

dove $|R| = (b-a)\,(d-c)$ è l'area del rettangolo R. Si deduce che la costante cercata esiste, e si può prendere

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{|R|}\,.$$

Per altra via si può trovare la costante più piccola per il rettangolo dato R, che è

$$C_R = \frac{|R|}{\pi\,\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}}$$

(v. Courant-Hilbert, vol. I, pag. 301).

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

[206]

Continuità

Consideriamo la successione delle funzioni u_n date da $u_n(x) = x^n/\sqrt{n}$ per $x \in [0,1]$ ed $n = 1, 2, \ldots$ e indichiamo con F il funzionale di Dirichlet

$$F[u] = \int_0^1 (u'(x))^2 \, dx.$$

1) Stabilire se $F[u_n]$ ammette limite (nel senso dei numeri reali).

Essendo $u_n'(x) = \sqrt{n}\, x^{n-1}$, si trova

$$\begin{aligned} F[u_n] &= n \int_0^1 x^{2n-2} \, dx \\ &= \frac{n}{2n-1}, \end{aligned}$$

dunque $\lim\limits_{n \to +\infty} F[u_n] = \frac{1}{2}$.

---

2) Stabilire se u_n converge uniformemente.

Poiché $\max\limits_{x \in [0,1]} |u_n(x)| = 1/\sqrt{n} \to 0$, la successione data converge uniformemente alla funzione identicamente nulla.

3) Stabilire se il funzionale $F\colon C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ è continuo rispetto alla norma di $C^0([0,1])$ (la cosiddetta norma uniforme o del massimo).

La continuità di un funzionale F nello spazio $C^0([0,1])$ sussiste se, ogniqualvolta una successione di funzioni u_n in tale spazio converge uniformemente, indicata con u_0 la funzione limite risulta

$$\lim_{n \to +\infty} F[u_n] = F[u_0]. \tag{18}$$

Perché il funzionale F possa dirsi discontinuo è perciò sufficiente esibire anche un solo controesempio.

Nel presente caso, la successione (u_n) esaminata negli esercizi precedenti costituisce un controesempio alla (18).

Infatti, avendo stabilito che u_n converge uniformemente alla funzione $u_0(x) \equiv 0$, sostituendo nella (18) troviamo al primo membro $\frac{1}{2}$ e al secondo membro 0.

In conclusione, possiamo affermare che il funzionale dato è discontinuo rispetto alla norma di $C^0([0,1])$.

Seguendo il ragionamento svolto a pag. Md42 a proposito del funzionale lunghezza del grafico, si può dimostrare che il funzionale F è semicontinuo inferiormente rispetto alla suddetta norma.

Svolgimento degli esercizi

[207]

Convergenza debole

Consideriamo la successione delle funzioni u_n date da $u_n(x) = 2^n \operatorname{sen} nx$ per $x \in (-\pi, \pi)$ ed $n = 1, 2, \ldots$

1) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2((-\pi,\pi))}.$$

Applicando la definizione, troviamo

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} &= \int_{-\pi}^{\pi} 2^{2n} \operatorname{sen}^2 nx\, dx \\ &= 2^{2n}\,\pi, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2((-\pi,\pi))} = +\infty.$$

---

2) Stabilire se la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k(x)}{\|u_k\|^{3/2}_{L^2((-\pi,\pi))}} \tag{19}$$

converge in $L^2((-\pi,\pi))$ (suggerimento: usare la completezza, oppure la totale convergenza).

Posto

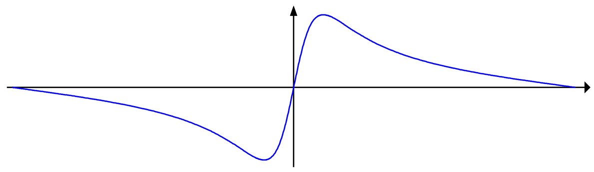
$$\begin{aligned} s_k &= \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \frac{u_k(x)}{\|u_k\|^{3/2}_{L^2((-\pi,\pi))}} \\ &= \frac{1}{2^{k/2}\,\pi^{3/4}}, \end{aligned}$$

si constata che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} s_k$$

è una serie geometrica di ragione $1/\sqrt{2} \in (0,1)$, dunque una serie convergente.

La serie (19) risulta quindi totalmente convergente, e perciò converge uniformemente ad una funzione $v_0 \in C^0([-\pi,\pi])$ il cui grafico si riporta qui appresso:



A maggior ragione, la serie (19) converge a v_0 in $L^2((-\pi,\pi))$.

Allo stesso risultato si perviene usando il criterio di Cauchy: a tal fine, dobbiamo considerare la somma

$$S_{nm}(x) = \sum_{k=n}^{m} \frac{u_k(x)}{\|u_k\|^{3/2}_{L^2((-\pi,\pi))}}$$

e vedere se

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|S_{nm}\|_{L^2((-\pi.\pi))} = 0. \tag{20}$$

Applicando la definizione, e siccome $\operatorname{sen} kx$ è ortogonale a $\operatorname{sen} hx$ quando $k \neq h$, si trova

$$\begin{aligned} \|S_{nm}\|^2_{L^2((-\pi.\pi))} &= \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{\|u_k\|_{L^2((-\pi,\pi))}} \\ &< \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Poiché l'ultima serie è la cosiddetta serie resto di una serie convergente, si verifica la (20).

Per la completezza di $L^2((-\pi,\pi))$, la condizione (20) implica la convergenza della serie (19) in tale spazio funzionale.

3) Indicata con $v_0(x)$ la somma della serie (19), calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\, v_0(x)\, dx.$$

La convergenza in $L^2((-\pi,\pi))$, e, a maggior ragione, la convergenza uniforme in $C^0([-\pi,\pi])$, implicano che si può scambiare la serie con l'integrale e scrivere

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\, v_0(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(u_n|u_k)}{\|u_k\|^{3/2}_{L^2((-\pi,\pi))}} \\ &= 2^{n/2}\, \pi^{1/4}, \end{aligned}$$

in quanto $(u_n|u_k) = \delta^{nk}\, \|u_n\|^2_{L^2((-\pi,\pi))}$, essendo δ^{nk} il delta di Kronecker. Di conseguenza, si trova

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\, v_0(x)\, dx = +\infty. \tag{21}$$

---

4) Stabilire se la successione data converge debolmente in $L^2((-\pi,\pi))$.

Per la definizione di convergenza debole di u_n ad una certa $u_0 \in L^2((-\pi,\pi))$, deve aversi

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\, v(x)\, dx \\ &\qquad = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\, v(x)\, dx \end{aligned}$$

per ogni funzione $v \in L^2((-\pi,\pi))$. In particolare il valore del limite deve essere finito.

Ma poiché nell'esercizio precedente abbiamo trovato una particolare funzione v_0 per la quale vale la (21), possiamo concludere che u_n non converge debolmente.

La conclusione è in accordo col fatto generale che, se una successione di funzioni u_n converge debolmente in un dato spazio di Banach, allora la successione delle loro norme è limitata: vedere ad esempio Brézis, Analisi funzionale, Proposizione III.5 (iii).

Ciò segue, a sua volta, da un fondamentale teorema di analisi funzionale: il teorema di Banach-Steinhaus, detto anche teorema dell'uniforme limitatezza (Brézis, loc. cit., Teorema II.1).