Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Estremi, e cicloide

Esercizi

1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, l'eventuale massimo e l'eventuale minimo del funzionale
$$F[u] = \int_0^1 u^2(x)\,dx$$
nella classe $X = \{\, u \in C^0([0,1]) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 1 \,\}$.

(continua a fianco)

2) Trovare le equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = x(\vartheta) \\ y = y(\vartheta) \end{cases}$$
della cicloide descritta da un punto P fissato su di una circonferenza di raggio R che rotola sotto l'asse x, essendo ϑ l'angolo di rotazione e supponendo
$$(x(0), y(0)) = (0, 0).$$
Suggerimento: indicate con $(x_C, -R)$ le coordinate del centro della circonferenza, l'assenza di strisciamento è espressa dall'uguaglianza $x_C = R\vartheta$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Non ammette minimo

Esercizi

1) Fissato $R_0 \in (0,1)$, e indicata con Ω la corona circolare $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_0^2 < x^2 + y^2 < 1 \,\}$, si consideri il cosiddetto "funzionale dell'area"
$$J[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x,y)|^2}\,dx\,dy$$
nella classe X costituita dalle funzioni $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che $u(x,y) = 0$ se $x^2 + y^2 = R_0^2$ e $u(x,y) = 1$ se $x^2 + y^2 = 1$. Verificare che se esiste una minimante u_0, non ve ne sono altre.

(continua a fianco)

Suggerimento: le funzioni strettamente convesse $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soddisfano $f(\frac{p_0+p_1}{2}) < \frac{1}{2}\,(f(p_0) + f(p_1))$ per ogni $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ distinti. Se esistesse un'altra minimante u_1, allora, ponendo $f(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$, $p_0 = \nabla u_0(x,y)$, e $p_1 = \nabla u_1(x,y)$, e integrando...

2) Verificare che un'eventuale minimante u_0 è una funzione radiale $u_0(x,y) = v_0(\rho)$, dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Suggerimento: se così non fosse, allora, ruotando u_0...

3) Scrivere $J[u_0]$ in coordinate polari, ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange, e risolverla tenendo conto che
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sett}\cosh |x|) + C.$$

4) Sapendo che $0 \le \operatorname{sett}\cosh x < x$ per ogni $x \ge 1$, dimostrare che J non ammette minimo nella classe X.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Success. massimizz.

Esercizi

1) Fissata una costante $L \in (0, +\infty)$, trovare una successione massimizzante per la funzione $F(R) = |R|$ (= area di R) avente per dominio l'insieme dei rettangoli $R \subset \mathbb{R}^2$ di perimetro L.

2) Trovare una successione massimizzante per la funzione $F(\Omega) = |\Omega|$ (= area di Ω) avente per dominio l'insieme dei domini piani limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di classe C^1.

(continua a fianco)

3) Trovare una successione massimizzante per la funzione $F(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}|$ (= area di $\mathcal{P}$) avente per dominio l'insieme dei poligoni $\mathcal{P}$ inclusi nel disco $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio 1.

4) Trovare una successione minimizzante per il funzionale

$$F[u] = \int_0^{2\pi} u^2(x)\, dx$$

avente per dominio l'insieme $X = \{\, u \in C^1([0, 2\pi]) \mid u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \,\}$.

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Lo spazio $W^{1,2}((a,b))$

Esercizi

1) Stabilire per quali $\alpha \in [0, +\infty)$ la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $W^{1,2}((0,1))$.

2) Stabilire per quali $\alpha \in [0, +\infty)$ la funzione $u(x) = x^{-\alpha}$ appartiene allo spazio $W^{1,2}((1, +\infty))$.

(continua a fianco)

3) (a) Stabilire se la successione $u_n(x) = x^n$ converge in $W^{1,2}((0,1))$. (b) Dire se la medesima successione è una successione di Cauchy in $W^{1,2}((0,1))$.

4) (a) Stabilire se la successione $u_n(x) = x^{-n}$ converge in $W^{1,2}((1, +\infty))$. (b) Dire se la medesima successione è una successione di Cauchy in $W^{1,2}((1, +\infty))$.

[205]

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Disuguagl. di Poincaré

Esercizi

Sia R il rettangolo $R = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$, e $u \in C_c^\infty(R)$ una funzione tale che $u(x,y) = 0$ per ogni (x,y) sufficientemente vicino al contorno ∂R.

1) Stabilire per quali $(x,y) \in R$ si ha

$$|u(x,y)| \le \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt. \tag{1}$$

Suggerimento: usare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(continua a fianco)

2) Stabilire per quali $(x,y) \in R$ si ha

$$u^2(x,y) \le (d-c) \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^2 dt. \tag{2}$$

Suggerimento: applicare alla (1) la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

3) Stabilire per quali $(x,y) \in R$ si ha

$$u^2(x,y) \le (d-c) \int_c^d |\nabla u(x,t)|^2 \, dt. \tag{3}$$

Suggerimento: segue banalmente dalla (2).

4) Stabilire se esiste una costante C, indipendente dalla funzione u, tale che $\|u\|_2 \le C \, \|\nabla u\|_2$. Suggerimento: integrare la (3) prima in dx e poi in dy.

[206]

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Continuità

Esercizi

Consideriamo la successione delle funzioni u_n date da $u_n(x) = x^n/\sqrt{n}$ per $x \in [0,1]$ ed $n = 1, 2, \dots$ e indichiamo con F il funzionale di Dirichlet

$$F[u] = \int_0^1 (u'(x))^2 \, dx.$$

1) Stabilire se $F[u_n]$ ammette limite (nel senso dei numeri reali).

2) Stabilire se u_n converge uniformemente.

3) Stabilire se il funzionale $F\colon C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ è continuo rispetto alla norma di $C^0([0,1])$ (la cosiddetta *norma uniforme o del massimo*).

Fondam. An. Sup. 2
prof. Antonio Greco
Convergenza debole

Esercizi

Consideriamo la successione delle funzioni u_n date da $u_n(x) = 2^n \operatorname{sen} nx$ per $x \in (-\pi, \pi)$ ed $n = 1, 2, \dots$

1) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2((-\pi,\pi))}$.

2) Stabilire se la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k(x)}{\|u_k\|^{3/2}_{L^2((-\pi,\pi))}} \tag{1}$$

converge in $L^2((-\pi, \pi))$ (suggerimento: usare la completezza, oppure la totale convergenza).

(continua a fianco)

3) Indicata con $v_0(x)$ la somma della serie (1), calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\, v_0(x)\, dx.$$

4) Stabilire se la successione (u_n) converge debolmente in $L^2((-\pi, \pi))$.