Fondamenti di Analisi Superiore 2

prof. Antonio Greco

Domande rivolte agli studenti in sede d'esame
Appelli dal 26-05-2012 al 29-08-2016

Cenni alla teoria delle distribuzioni

1. Scrivere una funzione test.

2. Indicata con ψ la funzione
$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1), \end{cases} \tag{1}$$
e posto
$$\varphi_n(x) = \psi(x-n) \tag{2}$$
determinare il limite puntuale $\lim_{n\to+\infty} \varphi(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

3. Per qualche valore di n disegnare il grafico della funzione $\varphi_n(x)$ definita nella (2).

4. Stabilire se la successione delle funzioni φ_n definite nella (2) converge uniformemente.

5. Dare un'interpretazione geometrica della convergenza uniforme.

6. Stabilire se la successione delle funzioni φ_n definite nella (2) converge in $L^1(\mathbb{R})$.

7. Stabilire se la successione delle funzioni φ_n definite nella (2) converge in $L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, +\infty)$.

8. Stabilire se le funzioni φ_n definite nella (2) appartengono allo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test.

9. Stabilire se la successione delle funzioni φ_n definite nella (2) converge nello spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test.

10. Dare la definizione di convergenza nello spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni.

11. Stabilire se la successione delle funzioni φ_n definite nella (2) converge nello spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni.

12. Stabilire se la successione delle funzioni f_n date da

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \tag{3}$$

converge uniformemente.

13. Stabilire se la successione delle funzioni f_n date dalla (3) converge nello spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni.

14. Trovare il limite puntuale della successione di funzioni

$$\psi_n(x) = n\,\psi(nx) \tag{4}$$

dove $\psi(x)$ è come nella (1).

15. Trovare il limite in $\mathcal{D}'$ della successione delle funzioni ψ_n date dalla (4).

16. Trovare il limite in $\mathcal{D}'$ della successione *delle derivate* ψ'_n delle funzioni ψ_n date dalla (4).

17. Scrivere una successione convergente nello spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni.

18. Scrivere una successione di funzioni che converge nel senso delle distribuzioni ma non uniformemente.

19. Stabilire se la convergenza in $\mathcal{D}'$ equivale alla convergenza uniforme.

20. Scrivere una successione di funzioni $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ che tende alla distribuzione nulla.

21. Stabilire se esiste una successione di funzioni $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ che tende alla distribuzione nulla e che non tende uniformemente a zero.

22. Stabilire se la successione delle funzioni f_n date da

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus (0,1) \end{cases} \tag{5}$$

converge in $\mathcal{D}'$ alla distribuzione nulla.

23. Spiegare che cos'è la δ di Dirac.

24. Spiegare che cos'è la δ di Dirac centrata nel punto $x_0 = 1$.

25. Scrivere una successione di funzioni avente per limite la δ di Dirac.

26. Scrivere una successione di funzioni avente per limite la δ di Dirac centrata nel punto $x_0 = 1$.

27. Scrivere una successione di funzioni *continue* avente per limite la δ di Dirac.

28. Scrivere una successione di *funzioni test* avente per limite la δ di Dirac.

29. Stabilire se la successione di funzioni $f_n(x)$ date da
$$f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x) \tag{6}$$
converge puntualmente.

30. Stabilire se la successione di funzioni $f_n(x)$ definite nella (6) converge in $L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, +\infty)$.

31. Trovare la derivata distribuzionale della funzione $f(x) = |x|$.

32. Trovare la derivata della distribuzione δ di Dirac.

Metodi classici del calcolo delle variazioni

33. Spiegare in cosa consiste il calcolo delle variazioni.

34. Scrivere la disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

35. Dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica nella classe dei rettangoli, e discutere il caso dell'uguaglianza.

36. Identificare i rettangoli di perimetro $L = 3$ e area massima.

37. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy $2\,|ab| \le a^2 + b^2$.

38. Enunciare il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

39. Spiegare che cos'è l'equazione di Eulero di un funzionale.

40. Dare condizioni sufficienti affinché la minimante di un funzionale soddisfi l'equazione di Eulero.

41. Scrivere l'equazione di Eulero del seguente funzionale:

$$J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx \tag{7}$$

42. Determinare le estremali del funzionale (7).

43. Trovare tutti i *minoranti* del funzionale F definito qui di seguito e avente per dominio l'insieme X indicato a fianco.

$F[u] =$	$X =$
$\displaystyle\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}$	$C^1([0,R]),\ R > 0$

44. Dire se il funzionale $F[u]$ dato da

$$F[u] = \int_0^{2\pi} u^2(x)\, dx$$

ammette estremo inferiore nella classe X delle funzioni ammissibili appresso definita:

$$X = \{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}.$$

45. Determinare *l'estremo inferiore* del funzionale F definito qui di seguito nella classe X delle funzioni ammissibili indicata a fianco.

$F[u] =$	$X =$
$\displaystyle\int_0^1 u(x)\, dx$	$\{\, u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \,\}$
$\displaystyle\int_0^\pi u^2(x)\, dx$	$\{\, u \in C^2([0,\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} u^2(x)\, dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{1 + (u'(\rho))^2}$	$C^1([0,R]),\ R > 0$

46. Stabilire se il funzionale F definito qui di seguito ammette *minimo* nella classe X delle funzioni ammissibili indicata a fianco, ed in caso affermativo calcolarne il valore.

$F[u] =$	$X =$
$\displaystyle\int_0^1 u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,1]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^\pi u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^\pi u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^2([0,\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^2 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2]) \mid u(0) = 0,\ u(2) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^2 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2]) \mid u(0) = 0,\ u(2) = 2 \,\}$
$\displaystyle\int_0^2 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^2([0,2]) \mid u(0) = 0,\ u(2) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^3 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,3]) \mid u(0) = 0,\ u(3) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$	$\{\, u \in C^1([-1,1]) \mid u(-1) = u(1) = 0 \,\}$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+(u'(x))^2}\,dx$	$C^1([0,1])$
$\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{2+(u'(x))^2}\,dx$	$C^1([0,2])$
$\displaystyle\int_0^R \frac{\rho\,d\rho}{1+(u'(\rho))^2}$	$C^1([0,R]),\ R > 0$

47. Caratterizzare le eventuali minimanti del funzionale $F[u]$ dato da

$$F[u] = \int_{-1}^{1} u(x)\, dx \tag{8}$$

nella classe X delle funzioni ammissibili appresso definita:

$$X = \left\{ u \in C^1([-1,1]) \,\middle|\, u(-1) = u(1) = 0,\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx = \pi \right\}.$$

48. Caratterizzare le eventuali minimanti del funzionale (8) nella classe X delle funzioni ammissibili appresso definita:

$$X = \left\{ u \in C^1([-1,1]) \,\middle|\, u(-1) = u(1) = 0,\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx = 3 \right\}.$$

49. Stabilire se il funzionale

$$F_\lambda[u] = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda \sqrt{1 + (u'(x))^2} + u(x) \right) dx$$

ammette minimo nella classe X delle funzioni ammissibili data da

$$X = \{\, u \in C^2([-\pi,\pi]) \mid u(-\pi) = u(\pi) = 0 \,\}$$

essendo λ un parametro positivo.

50. Stabilire se il funzionale F definito qui di seguito ammette *massimo* nella classe X delle funzioni ammissibili indicata a fianco, ed in caso affermativo calcolarne il valore.

$F[u] =$	$X =$
$\int_0^{2\pi} u^2(x)\, dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\int_0^{2} (u'(x))^2\, dx$	$\{\, u \in C^2([0,2]) \mid u(0) = 0,\ u(2) = 1 \,\}$
$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$	$\{\, u \in C^1([-1,1]) \mid u(-1) = u(1) = 0 \,\}$
$\int_0^{1} \frac{x}{1 + (u'(x))^2}\, dx$	$C^1([0,1])$

51. Caratterizzare le eventuali *massimanti* del funzionale (8) nella classe X delle funzioni ammissibili appresso definita:

$$X = \left\{ u \in C^1([-1,1]) \,\middle|\, u(-1) = u(1) = 0,\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx = \pi \right\}.$$

Elementi di analisi funzionale
e metodo diretto del calcolo delle variazioni

52. Spiegare che cos'è una *successione minimizzante* per un funzionale dato.

53. Fissato $L > 0$, individuare una successione massimizzante per il funzionale $\Omega \mapsto |\Omega|$ nella classe delle figure piane Ω regolari a tratti e tali che $|\partial\Omega| = L$.

54. Scrivere una successione minimizzante per il funzionale F definito qui di seguito nella classe X delle funzioni ammissibili indicata a fianco.

$F[u] =$	$X =$
$\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^{2\pi} u^2(x)\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,2\pi]) \mid u(0) = 0,\ u'(0) = 1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+(u'(x))^2}\,dx$	$C^1([0,1])$

55. Svolgere la dimostrazione di Hurwitz della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

56. Scrivere la disuguaglianza di Hölder.

57. Dare la definizione della norma di L^∞, che si indica con $\|u\|_\infty$.

58. Spiegare in che cosa consiste il metodo diretto del calcolo delle variazioni.

59. Spiegare a cosa serve il metodo diretto del calcolo delle variazioni.

60. Enunciare il teorema fondamentale sul quale si basa il metodo diretto del calcolo delle variazioni.

61. Scrivere un funzionale al quale si possa applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni.

62. Stabilire se il metodo diretto del calcolo delle variazioni si può applicare al funzionale F definito qui di seguito nella classe X delle funzioni ammissibili indicata a fianco.

$F[u] =$	$X =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+(u'(x))^2}\,dx$	$C^1([0,1])$
$\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,1]) \mid u(0)=0,\ u(1)=1 \,\}$
$\displaystyle\int_0^3 (u'(x))^2\,dx$	$\{\, u \in C^1([0,3]) \mid u(0)=0,\ u(3)=1 \,\}$

63. Dare la definizione di continuità di un funzionale nello spazio $C^1([-1,1])$.

64. Stabilire se il funzionale F definito qui di seguito è *continuo* nello spazio di Banach E indicato a fianco.

$F[u] =$	$E =$
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$	$C^0([0,1])$
$\displaystyle\int_{-1}^1 u(x)\,dx$	$C^1([-1,1])$

65. Spiegare cosa si intende per *semicontinuità inferiore*.

66. Stabilire se il funzionale F definito qui di seguito è *semicontinuo inferiormente* nello spazio di Banach E indicato a fianco.

$F[u] =$	$E =$
$\displaystyle\int_{-1}^1 u(x)\,dx$	$C^1([-1,1])$
$\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^2\,dx$	$C^1([0,1])$

67. Fare un esempio di un funzionale semicontinuo inferiormente.

68. Fare un esempio di un funzionale semicontinuo inferiormente e non continuo.

69. Stabilire se ogni successione di rettangoli di perimetro 4 ha almeno una sottosuccessione convergente.

70. Spiegare in che cosa consiste la proprietà di compattezza di uno spazio funzionale.

71. Spiegare cosa si intende per spazio funzionale *limitato*.

72. Stabilire se lo spazio $C^1([0,1])$ è limitato.

73. Motivare l'importanza della proprietà di compattezza di uno spazio funzionale.

74. Dire se i sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio metrico sono compatti.

75. Fare un esempio di un insieme chiuso e limitato ma non compatto.

76. Stabilire se lo spazio $C^1([0,1])$ è compatto.

77. Stabilire se l'insieme $X = \{\, u \in C^1([0,3]) \mid u(0) = 0,\ u(3) = 1 \,\}$ è un sottoinsieme compatto dello spazio $C^1([0,3])$.

78. Stabilire se lo spazio $C^2([a,b])$ è compatto.

79. Stabilire se l'insieme $X = \{\, u \in C^2([0,\pi]) \mid u'(0) = 1 \,\}$ è un sottoinsieme compatto dello spazio $C^2([0,\pi])$.

80. Stabilire se lo spazio $L^2((a,b))$ è compatto.

81. Stabilire se l'insieme S dato da

$$S = \{\, \operatorname{sen} nx \mid n \in \mathbb{N} \,\} \tag{9}$$

è un sottoinsieme limitato di $L^2((0,2\pi))$.

82. Stabilire se l'insieme S dato dalla (9) è un sottoinsieme chiuso di $L^2((0, 2\pi))$.

83. Stabilire se l'insieme S dato dalla (9) è un sottoinsieme compatto di $L^2((0,2\pi))$.

84. Spiegare in che cosa consiste la proprietà di equilimitatezza richiesta dal teorema di Ascoli-Arzelà.

85. Scrivere una funzione appartenente allo spazio $L^1(\mathbb{R})$.

86. Scrivere una funzione appartenente allo spazio $L^1((0,1))$.

87. Posto $u_n(x) = x^n$ per $x \in (0,1)$, stabilire se la successione delle derivate u_n' converge fortemente in $L^1((0,1))$ e se possiede una sottosuccessione debolmente convergente in $L^1((0,1))$.

88. Fissata una successione di funzioni $u_n \in L^2$ tali che $u_n \cdot u_k = 0$ per $n \neq k$, e $\|u_n\| > 2^n$ per ogni $n \geq 0$, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{\|u_n\|^\alpha} \tag{10}$$
converge in L^2. Indicata con S_α la somma della serie (10) per $\alpha > 1$, calcolare il limite
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \cdot S_\alpha$$
e dire se la successione delle u_n ha una sottosuccessione debolmente convergente.

89. Dare la definizione degli spazi di Sobolev.

90. Dare la definizione dello spazio di Sobolev $W^{1,1}$.

91. Scrivere una funzione appartenente allo spazio di Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$.

92. Enunciare il teorema di compattezza debole in $W^{1,p}((a,b))$, $p \in (1,+\infty)$.

93. Dire se il funzionale
$$F[u] = \int_0^1 u(x)\, dx$$
è un elemento del duale H^* dello spazio di Hilbert $H = W^{1,2}((0,1))$.

94. Enunciare il teorema di rappresentazione di Riesz in uno spazio di Hilbert.