

Metodi classici del calcolo delle variazioni

Anno Registro:	2024/2025		
Docente:	GRECO ANTONIO [005969]		
Insegnamento:	ANALISI SUPERIORE 2 [SC/0184] - CAGLIARI		
CI:			
CDS:	MATEMATICA [60/65] - LM		
DIP:	FACOLTA' DI SCIENZE		
Data	Inizio	Fine	Argomento
20/03/2025	09:00	10:00	Introduzione al calcolo delle variazioni. I primi problemi. Costruzione di un modello matematico per la ricerca della brachistocrona.
	10:00	11:00	Costruzione di un modello matematico per la ricerca del corpo di minima resistenza. Prima parte: studio dell'urto elastico di una singola particella sulla superficie del corpo.
24/03/2025	09:00	10:00	Costruzione di un modello matematico per la ricerca del corpo di minima resistenza. Seconda parte: passaggio dal discreto al continuo. Espressione generale dei funzionali del calcolo delle variazioni in dimensione 1. Definizioni fondamentali: maggioranti, minoranti, estremo superiore, estremo inferiore, limitatezza.
	10:00	11:00	Definizioni fondamentali: valore massimo, valore minimo, funzione massimante, funzione minimante, estremanti. Cenni al metodo diretto: dimostrazione dell'esistenza di una successione minimizzante, e problemi connessi alla sua convergenza ed alla continuità del funzionale.
26/03/2025	11:00	12:00	Studio di semplici problemi variazionali ispirati al classico problema della brachistocrona: il caso dei cammini rettilinei (piani inclinati).
	12:00	13:00	Studio di semplici problemi variazionali ispirati al problema di Newton del corpo di minima resistenza, con particolare riferimento ai concetti di estremo superiore, estremo inferiore, maggiorante, minorante, massimo, minimo, e successione minimizzante. Le funzioni ammissibili u sono solitamente soggette ad un vincolo del tipo $0 \leq u \leq h$ (costante positiva assegnata).
27/03/2025	09:00	10:00	Introduzione del vincolo $u' \geq 0$ nel problema di Newton del corpo di minima resistenza: giustificazione fisica e matematica. Costruzione esplicita di una successione minimizzante costituita da funzioni equilimitate, regolari e periodiche, in corrispondenza della quale il funzionale associato al problema tende a zero.
	10:00	11:00	Presentazione del problema isoperimetrico nel piano e del suo analogo N-dimensionale. Problema di Didone nel piano. Dimostrazione del fatto che a partire da una soluzione del problema di Didone si può costruire una soluzione del problema isoperimetrico.
31/03/2025	09:00	10:00	Dimostrazione del fatto che a partire da una soluzione del problema isoperimetrico se ne può costruire una di quello di Didone.
	10:00	11:00	Tre espressioni dell'area di un dominio piano regolare mediante integrali curvilinei, ricavate dalle formule di Gauss-Green. Il caso particolare dei poligoni con n lati.

02/04/2025	11:00	12:00	Formulazione del problema di Didone mediante un funzionale la cui integranda f dipende da una funzione incognita r , a valori in \mathbb{R}^2 , e dalla derivata r' .
	12:00	13:00	Proprietà di invarianza di scala del problema isoperimetrico, e normalizzazione del perimetro. Il problema della catenaria: introduzione
03/04/2025	09:00	10:00	Illustrazione di un modello matematico del classico problema della catenaria, basato sul principio della minima energia potenziale. Determinazione dell'ordinata del baricentro della catena e relazione con l'energia potenziale della medesima.
	10:00	11:00	Enunciato e dimostrazione del lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Costruzione di alcune funzioni test appartenenti a diverse classi di regolarità (C^1 , C -infinito), anche al fine di ottenere versioni più generali del lemma.
07/04/2025	09:00	10:00	Presentazione dell'equazione di Eulero-Lagrange e motivazione della sua importanza. Dimostrazione del fatto che una eventuale minimante di classe C^2 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange. Prima parte: riduzione alla dimensione uno.
	10:00	11:00	Richiami sulla derivazione sotto il segno di integrale. Dimostrazione del fatto che un'eventuale minimante di classe C^2 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange: conclusione.
09/04/2025	11:00	12:00	Determinazione dell'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale tempo di transito per il problema della brachistocrona. Dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema al contorno associato.
	12:00	13:00	Costruzione di un integrale primo dell'equazione di Eulero della brachistocrona. Interpretazione fisica, con riferimento alla legge di Snell della rifrazione. Cenni al metodo risolutivo di Johann Bernoulli.
10/04/2025	09:00	10:00	Rappresentazione parametrica della cicloide. Studio della funzione $u(x)$ il cui grafico è tale curva, con particolare riguardo alle proprietà della derivata $u'(x)$.
	10:00	11:00	Verifica del fatto che la cicloide è il grafico di una estrema del problema della brachistocrona. Dimostrazione della esistenza di una soluzione del problema al contorno associato, svolta mediante un'opportuna dilatazione della cicloide normalizzata.
14/04/2025	09:00	10:00	Determinazione delle estremali dei funzionali più semplici e significativi: il funzionale di Dirichlet in dimensione 1, ed il funzionale lunghezza del grafico.
	10:00	11:00	Enunciato e dimostrazione del lemma di Du Bois - Reymond. Forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Regolarità della minimante sotto la condizione di Legendre stretta. Esempio riferito al problema della brachistocrona.
16/04/2025	11:00	12:00	Richiami sul teorema del Dini, detto anche teorema della funzione implicita. Massimi e minimi vincolati: richiami sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione 2.
	12:00	13:00	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la soluzione di problemi variazionali vincolati, con particolare riferimento al problema della catenaria. Cenni agli integrali variazionali multidimensionali, con riferimento al problema di Plateau non parametrico.