# EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO RIGIDO

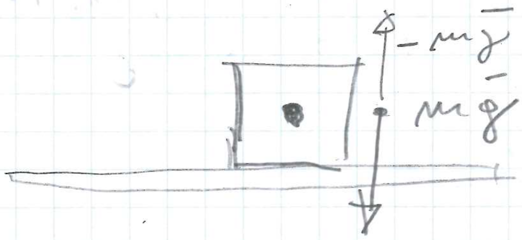
CONDIZIONE DI EQUILIBRIO:

$\bar{F} = 0 \qquad \bar{M} = 0$

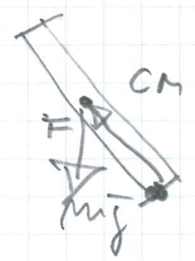
N.B. se $\bar{F} = 0$ $\bar{M} = 0$ non dipende dalla scelta del polo

ESEMPIO: EQUILIBRIO DI CORPI SOGGETTI A FORZA PESO:

- LA CONDIZIONE $\bar{F} = 0$ può essere REALIZZATA CON LE REAZIONI VINCOLARI




- LA CONDIZIONE $\bar{M} = 0$ RICHIEDE CHE IL punto di sospensione O stia sulla verticale $\Rightarrow \bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} =$




$\bar{M} \neq 0$

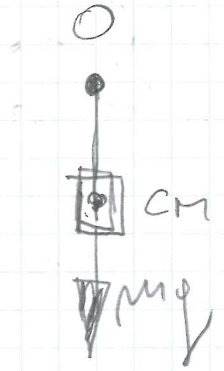
NON EQUILIBRIO


$\bar{M} = 0$

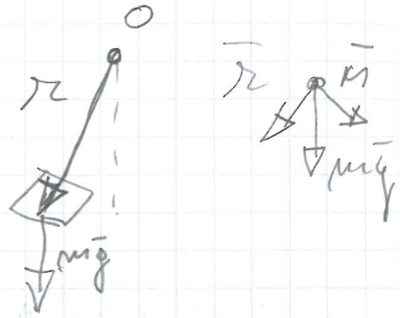
EQUILIBRIO

Possiamo anche distinguere tra

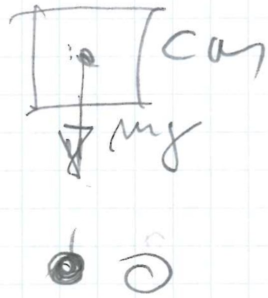
Equilibrio $\boxed{\text{stabile}}$ O sopra CM

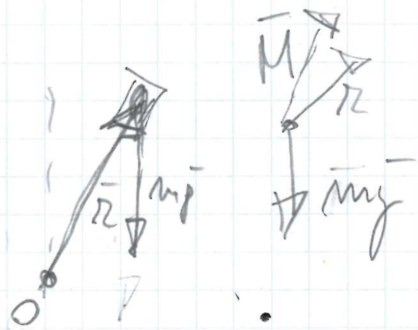



PICCOLA PERT. GENERA $\bar{M}$ DI RIPRISTINO




Equilibrio INSTABILE O SOTTO CM



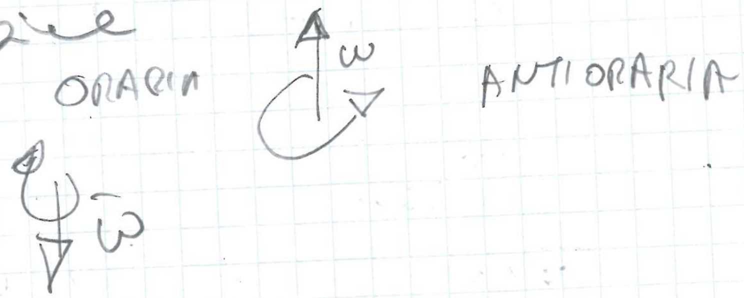



Rotazioni intorno ad un asse fisso in un SR INERZIALE

- Esempio molto comune (Rotazioni di parti di macchine, motori etc.)

- $\bar{\omega}$ diretto lungo asse di rotazione

- Verso di $\bar{\omega}$ da direzione di rotazione

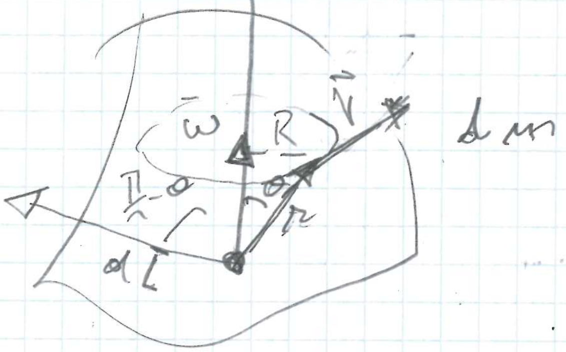



- C. di Massa $\notin$ o $\in$ asse rotazione

- Ogni punto esegue un moto circolare ⇒ circonferenza C con centro sull'asse di rotazione

$$V = \omega \times R$$
$$a = \omega^2 R$$

Calcolo MOMENTO ANGOLARE




$\bar{r} \perp \bar{V}$

$$d\bar{L} = \bar{r} \times dm\, \bar{V}$$

$$dL = r\, v\, dm = r R \omega\, dm$$

Proiezione lungo asse z

$$dL_z = dL \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dL \sin\theta$$

$$= dm\, r \sin\theta\, R\, \omega = dm\, R^2\, \omega$$

$$L_z = \int dL_z = \int dm\, R^2 \omega$$

$$= I_z\, \omega$$

$$\boxed{I_z = \int dm\, R^2}$$

momento di inerzia lungo asse z

$$\boxed{L_z = I_z\, \omega}$$

⇒ Il momento di inerzia lungo un asse è il fattore di proporzionalità $I_A$

$$L_A = I_A \, \omega$$

Tra velocità angolare e proiezione di $L$ lungo l'asse

⇓ Dipende solo da: ① Asse rotazione ② Forma del corpo

N.B. La componente di $\bar{L}$ perpendicolare all'asse $\bar{L}_\perp$ può variare fra un modulo che è direzione

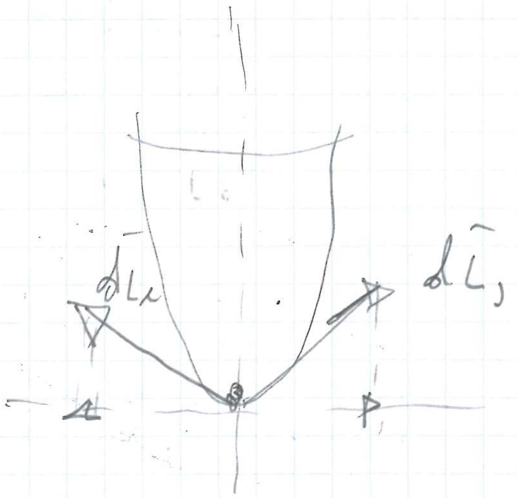
⇒ Se l'asse di rotazione è diretto lungo un asse di simmetria del corpo

⇓

$$\bar{L}_\perp = 0 \qquad L = L_z$$

$$\boxed{\bar{L} = I_z \, \bar{\omega}}$$

questo perché per ogni elemento $d\bar{L}_i$ c'è necessariamente un simmetrico ⇒ le componenti ortogonali si annullano




ASSE PRINCIPALE DI INERZIA

se $\bar{L}$ è variabile varia solo in modulo

$$\frac{d\bar{L}}{dt} \propto \bar{\omega} \Rightarrow \bar{M} \propto \bar{\omega}$$

Praticamente viene fornito da un MOTORE

$\Rightarrow$ Parti meccaniche in rotazione SIMMETRICHE rispetto all'asse di rotazione per minimizzare momenti FUORI ASSE

$\omega$ = costante $\Rightarrow$ momento esterno necessario per superare attrito

$\Rightarrow$ Risolviamo Equazione del moto per il caso $\bar{L} \propto \bar{\omega}$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \bar{\omega}\right) = I_z \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

$$= I_z \bar{\alpha}$$

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha \, dt + \omega_0$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt.$$

ENERGIA CINETICA E LAVORO

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow$$

$$E_K = \frac{1}{2}\int dm \, v^2 = \frac{1}{2}\int dm \, \omega^2 R^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dm R^2\right) \omega^2$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

Dipende dalla scelta dell' ASSE DI ROTAZIONE

SE $L \propto \omega$ $\omega = \frac{L}{I_z}$

$$\boxed{E_K = \frac{L^2}{2I_z}}$$

Relazione Energia cinetica - Lavoro

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{IN}^2$$

In forma infinitesima

$$dW = dE_K = \frac{1}{2} I_z \, 2\omega \, d\omega$$

$$= I_z \omega \, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \frac{d\omega}{dt} dt$$

$$= I_z \alpha \, d\theta = M \, d\theta$$

SEGUE

$$\boxed{W = \int_{\theta_0}^{\theta} M \, d\theta}$$

Potenza istantanea

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

$$\boxed{P = M\omega}$$

Corrispondenza leggi

delle dinamica del punt

$$M \to I_z$$

$$V \to \omega$$

$$a \to \alpha$$

$$F \to M$$

EQUAZIONE DEL MOTO NEL CASO DI $\bar{L}$ non parallelo a $\bar{\omega}$

Esempio della trottola

In questo caso è facile intuire che L ruota intorno all'asse di ROTAZIONE

PRECESSIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\bar{L}_z}{dt} = M_z \qquad \frac{d\bar{L}_\perp}{dt} = M_\perp$$

$$\Downarrow$$

$I_z \alpha = M_z \Rightarrow$ IL moto di rotaz intorno all'asse è ancora regolato da $M_z$

Per esempio $M_z = 0 \Rightarrow \omega_z = \text{cost}$

In questo caso $\bar{L}_\perp$ può ruotare intorno all'asse (cambia cioè direzione) pur restando costante in modulo

MOTO DI PRECESSIONE

VEDI FIGURA TESTO

TROTTOLA

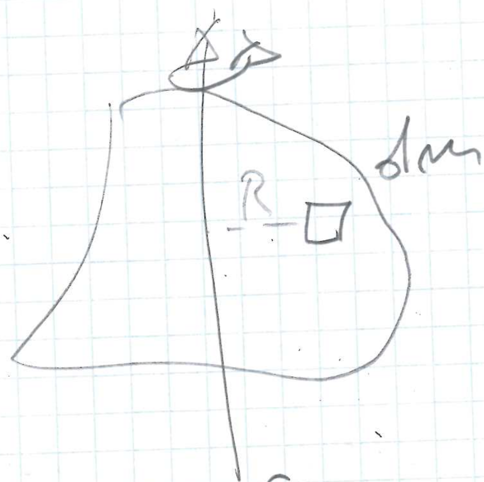
LA COPPIA DELLE FORZE GRAVITÀ E REAZIONE VINCOLARE GENERA $\bar{M}_\perp$ che provoca cambio di direzione di $\bar{L}_\perp$ mentre la sua PROIEZIONE su z RIMANE costante

Momento di Inerzia

⇒ simile alla massa;

fattore di proporzionalità tra MOMENTO e accelerazione angolare

⇒ diversamente dalla massa: dipende dall'asse di rotazione




$$I = \int R^2 \, dm = \int_V \rho \, r^2 \, dV =$$

$$= \int_V \rho (x^2 + y^2) \, dV$$

- Dipende dalla distribuzione delle masse: più lontane sono più contribuiscono

- Additività:

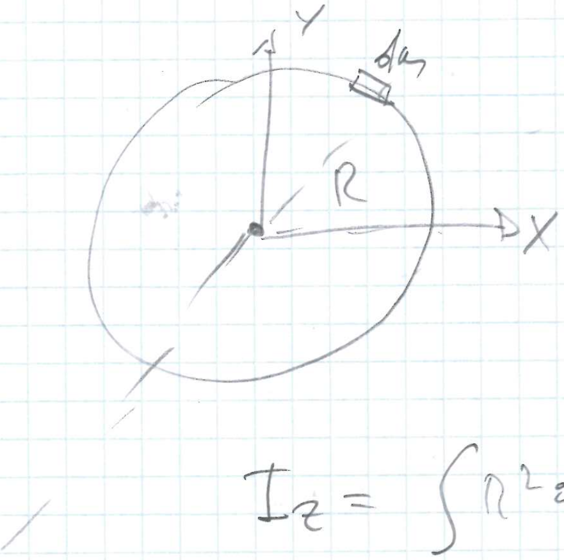
RAGGIO GIRATORE

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

UNITÀ

$$[I] = L^2 M \rightarrow kg\, m^2$$

ESEMPIO ANELLO sottile omogeneo




$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho\, dl$$

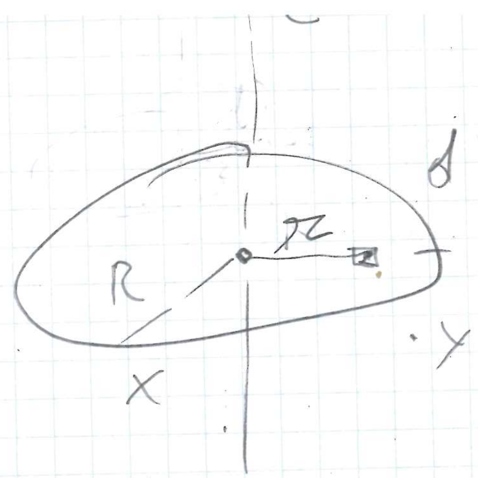
$$= R^2 \rho \int dl = \rho_l\, 2\pi R^3 = M$$

$$=$$

Guscio cilindrico

$$I = m R^2$$

DISCO




$$I = \int r^2 \, dm$$

$$= \int r^2 \rho \, dV = \int r^2 \rho \, dx \, dy$$

coordinate polari

$$\int dx\,dy \to \int r \, dr \, d\theta$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \, r^3 = \rho \, 2\pi \, \frac{1}{4} R^4$$

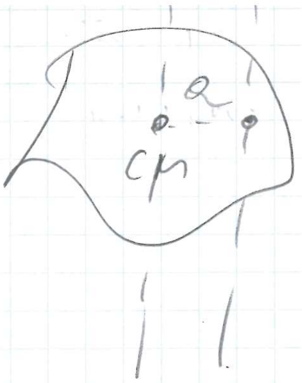
$$= \rho \frac{\pi R^2}{2} R^2 = \frac{\rho V}{2} R^2 = \frac{m R^2}{2}$$

TEOREMA DI HUYGENS – STEINER

Se $I_c$ è il momento di massa rispetto ad un asse passante per il centro di MASSA il momento di massa rispetto ad un asse parallelo e distante $a$ è dato da

$$I = I_c + m \, a^2$$

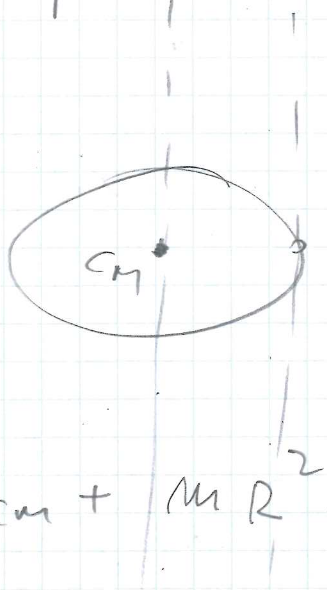
$\not\!\!\!\,$ MASSA CORPO





No DIM.

Esempio: Momento d'inerzia disco rispetto asse passante per il bordo





$$I = I_{cm} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

$$= \frac{3}{2}mR^2$$

ENERGIA CINETICA rispetto a generico asse di rotazione

$$E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Ma usando il teorema di H.S.

$$I_z = I_{z'} + m a^2$$

↳ MOM. DI INERZIA RISPETTO al c.d.m

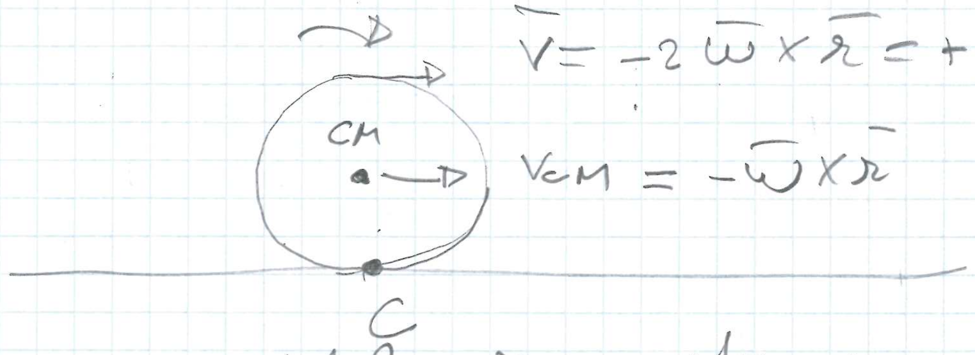
$$E_K = \frac{1}{2} (I_{z'} + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m V_{cm}^2$$

$$E_K = E_K^{(cm)} + \frac{1}{2} m V_{cm}^2$$

TEOREMA di König

# MOTO DI ROTOLAMENTO
# (RUOTA)

- Punto di contatto C HA $\bar{V} = 0$



$\bar{V} = -2\,\bar{\omega} \times \bar{r} = +2\,V_{CM}$

$V_{CM} = -\bar{\omega} \times \bar{r}$

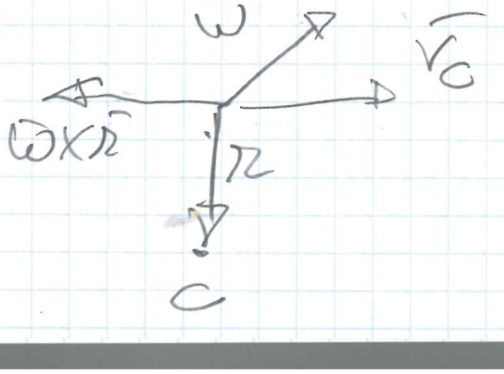
- Il corpo rotola senza strisciare
- Si può pensare che in ogni istante il corpo ruoti intorno ad un'asse passante per C con velocità angolare $\bar{\omega}$

- È evidente che per tenere C fermo serve una forza di attrito statica

- La velocità di un punto C

$$\bar{V}_{CM} = -\bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$V = 2\,\bar{V}_{CM}$$



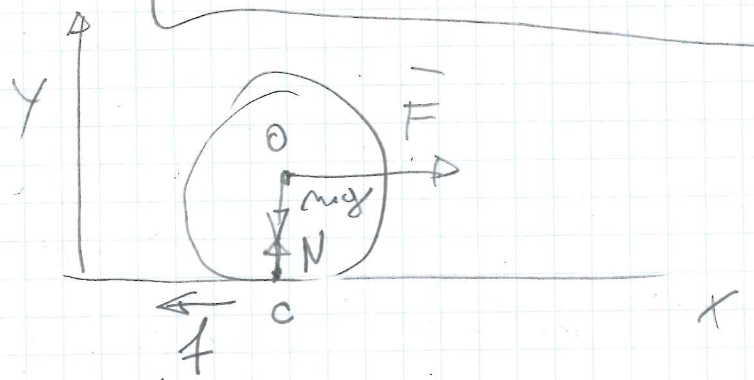
$\boxed{V_{CM} = \omega r}$ + $a_{CM} = \alpha r$

Nel moto di rotolamento

$\bar{V}_{CM}$ e $\bar{\omega}$ NON sono

indipendenti

$\boxed{\text{FORZA ORIZZONTALE COSTANTE}}$





$\not{f}$ forza attrito statico

MOTO DEL CENTRO DI MASSA

$$\bar{F} + \bar{R} + m\bar{g} = m\,\bar{a}_{CM}$$

ASSE X

$$F - f = m\,a_{CM}$$

ASSE Y

$$N = mg$$

Legge momento meccanico rispetto al c.d.m

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{f} = I\,\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad r f = I \alpha = I \frac{a_{CM}}{r}$$

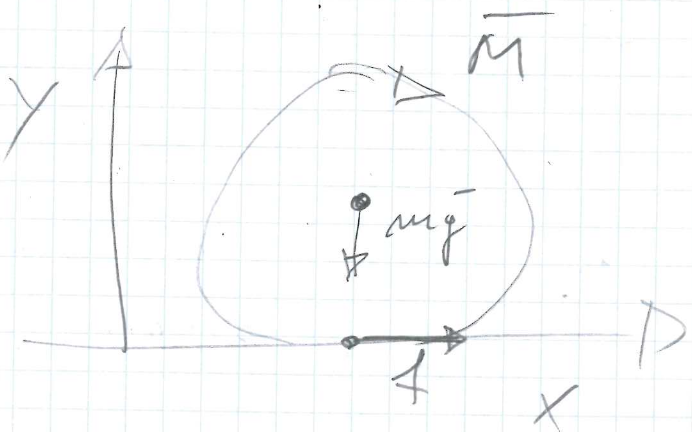
$$\begin{cases} a_{CM} = \dfrac{F}{m\left(1+\dfrac{I}{mr^2}\right)} \\[2ex] f = \dfrac{F}{1+\dfrac{mr^2}{I}} \end{cases}$$

$$\boxed{f \leq \mu_s N}$$

$\Rightarrow$ altrimenti $\Rightarrow$ SCIVOLAMENTO

$\Rightarrow$ Forza attrito statico

## MOMENTO COSTANTE




- Applichiamo un momento costante tramite motore

$$\bar{R} + m\bar{g} = m\bar{a}_{CM}$$

$$\bar{M} + \bar{r} \times \bar{f} = I\bar{\alpha}$$

$$N = mg$$

$$f = m\, a_{cm}$$

$$M - rf = I \frac{a_{cm}}{r}$$

$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

anche qui $f \leq \mu_s N$

$\boxed{\text{N.B.}}$

- Nel caso di forze $F$
  la reazione $f$ si oppone a m
- Nel caso di momento $M$.

$f$ FA GIRARE LA RUOTA.

CONCLUSIONE

Moto di rotolament di un corpo rigido è possibile con opportuni valori delle forze e dei momenti esterni

Esempio: sgommate

Leggi di conservazione per il mto. del corpo RIGIDO

• Conservazione della quantità di moto del sistema $\bar{p} = m V_{cm}$

⇓

se la risultante delle forze esterne $= 0$ $F^R = 0$

il C. d. M si muove con $V_{cm} = cost$

MA: singoli punti non si muovono di M.R.U

Esempio: Rotolamento di una ruota con $V_{cm} = cost$

• CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

• Conservazione del MOMENTO ANGOLARE

se $\bar{M} = 0$ (Momento esterno nullo)

$\bar{L} = cost$ $\begin{cases} \text{Modulo} \\ \text{Direzione} \\ \text{Verso} \end{cases}$

(Rispetto ad un generico Polo)

Conservazione dell'energia MECCANICA

⇒ vale se non ci sono forze di attrito INTERNI

ESEMPIO DELLO STUDENTE

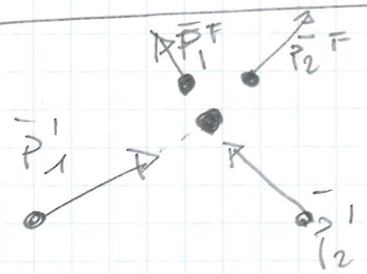
$$\Delta W = \Delta E_k = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1}$$

se $I_2 < I_1$

$\Delta E_k > 0$ $\quad \Delta W > 0$

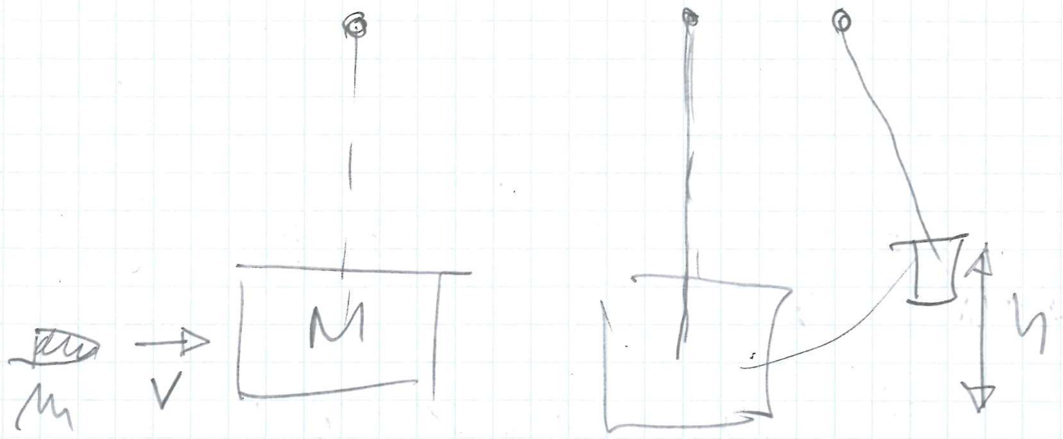
VIENE FATTO LAVORO

DA DOVE VIENE L'ENERGIA?



## ESEMPIO PENDOLO BALISTICO

Grande blocco di legno sospeso con un filo orizzontale che serve a misurare la velocità di un proiettile




Viene messo in oscillazione

- Conservazione della quantità di moto nell'urto (completamente anelastico)

$$mv = (m+M)\,v'$$

Conservazione dell'energia durante l'oscillazione

$$\frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = (m+M)\,g\,h$$

$$\Longrightarrow \quad v' = \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh}}$$