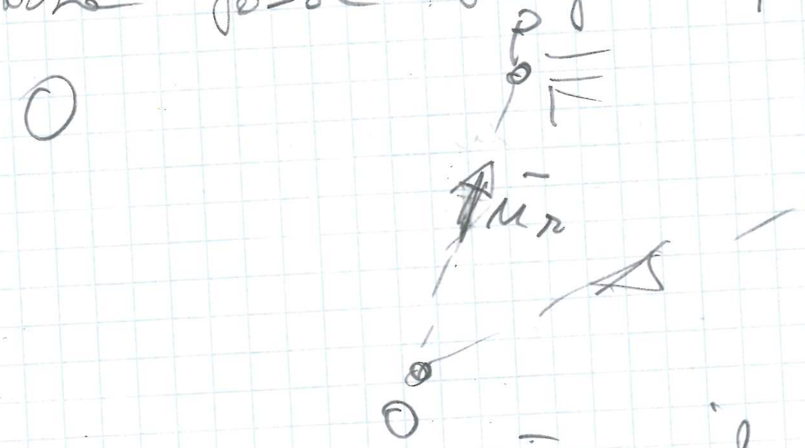
GRAVITAZIONE

Tra le 4 forze fondamentali della NATURA la gravitazione è stata la prima ad essere scoperta. Oggi è alla base di tutti i fenomeni astronomici ed astrofisici

- La gravitazione è una **FORZA CENTRALE**:

La retta di applicazione della forza su P passa sempre per un CENTRO



Indicando con $\bar{u}_r$ il versore di $\overline{OP}$ abbiamo $r = |OP|$

$$\bar{F} = F(r)\,\bar{u}_r$$

$F(r) > 0$ Forza REPULSIVA

< 0 " ATTRATIVA

- POSSIAMO PENSARE A $f(r)$ come ad un CAMPO DI FORZE: ogni particella presente nello spazio in un punto $\bar{r}$ è soggetta ad una forza

$$\bar{F} = f(r)\,\bar{u}_r$$

- Un CAMPO DI FORZE modifica le proprietà dello spazio:

APOTEOSI NEL CASO DELLA RG

$\Rightarrow$ campo di forze determina la GEOMETRIA DELLO SPAZIO

- Proprietà generale di un CAMPO DI FORZE CENTRALI:

MOMENTO ANGOLARE rispetto al centro O si conserva:

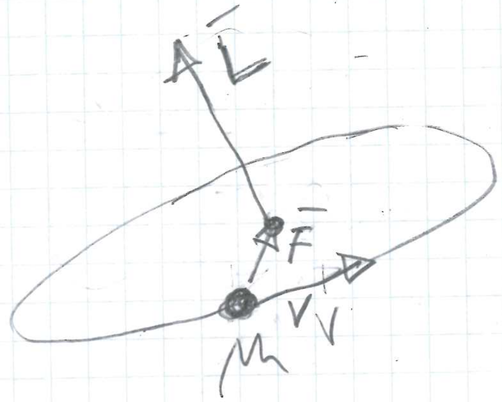
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{u}_r\, f(r) = 0$$

Conservazione discende dalla simmetria per il GRUPPO DI ROTAZIONI INTORNO AL CENTRO O

$\Rightarrow$ $\bar{L} = \text{cost}$

· $\bar{L}$ è ORTOGONALE A $\bar{r}$ e $\bar{v}$

⇒ l'orbita di un punto materiale soggetto ad una forza centrale è contenuta in un piano ortogonale a $\bar{L}$



Se $\bar{L}$ = cost. il piano è FISSO

· Componenti polari

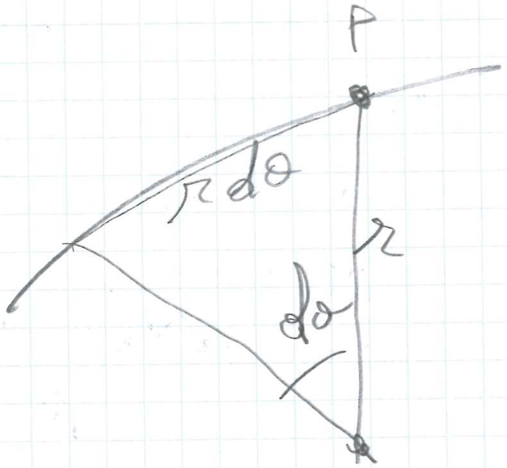
$$\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v} = m\,\bar{r} \times (\bar{v}_r + \bar{v}_\theta)$$

$$= \bar{r} \times m\bar{v}_\theta \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$L = \text{cost} \Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

NB: quello che è costante è il prodotto $r^2\frac{d\theta}{dt}$



$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ $\qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$

Velocità areale $\Rightarrow$ costante

per la conservazione di

L

Le orbite di un punto materiale soggetto a un campo centrale sono tali che

- giacciono in un piano fisso
- la velocità areale spazzata dal $\overline{OP}$ rimane costante

Integrando

$$dA = \frac{L}{2m} dt$$

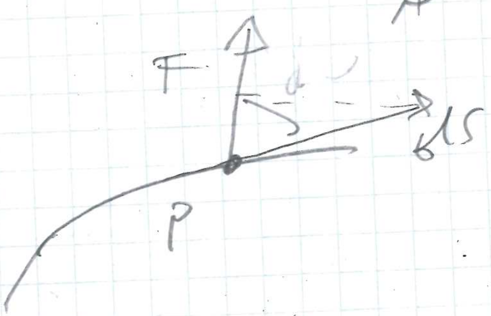
$$A = \frac{L}{2m} T \rightarrow$$ Se l'orbita è CHIUSA posso prendere T PERIODO

$$T = \frac{2m}{L} A$$

- Ogni forza centrale è necessariamente CONSERVATIVA come conseguenza del fatto che dipende solo dal modulo di $\bar{r}$:

$$W = \int_A^B \bar{F}(r) \cdot d\bar{s} = \int_A^B f(r)\, \bar{u}_r \cdot d\bar{s}$$

$$= \int_A^B f(r) \cos\theta\, ds$$



$$\cos\theta\, ds = dr$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\, dr = g(r_2) - g(r_1)$$

[illegible]

Leggi di Keplero

Prima che Newton formulasse nel 1666 la sua teoria della GRAVITAZIONE UNIVERSALE la forza che teneva in orbita i pianeti e la forza che fa cadere gli oggetti sulla terra erano considerate FORZE DISTINTE

Keplero tra il 1600 – 1620 partendo dalle misure accurate di BRAHE sulle orbite dei pianeti e dell'ipotesi ELIOCENTRICA DI COPERNICO, formulò le sue tre leggi.

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi
2. La velocità areolare del raggio vettore pianeta – sole è costante

3. Il quadrato del periodo dell'orbita è proporzionale al cubo del semiasse dell'orbita

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

ORIGINE FISICA DI QUESTE LEGGI??

→ LEGGENDA ; MELA DI NEWTON

→ Newton capisce che la forza che fa cadere gli oggetti sulla terra è lo stesso che tiene in orbita i pianeti:

gittata : $x_G \sim v_0^2 \sin 2\theta$

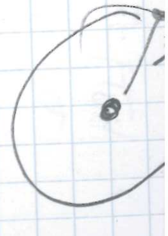
$\theta = \frac{\pi}{4}$ MASSIMO

AUMENTANDO v_0^2 ⇒ oggetto va in orbita

FORMULA LA SUA TEORIA DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

• Per semplificare assumo che l'orbita sia una circonferenza

1. Legge $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost$



$\Rightarrow \left|\frac{\bar{}}{dt}\right| = cost \Rightarrow$ Moto circ. uniforme

$\Rightarrow$ In generale Forze centrali Momento angolare conservato

$\Rightarrow$ nell' ellisse se $r \uparrow$ $\bar{v} \downarrow$

$\Rightarrow$ orbita circolare $\Rightarrow$ accelerazione sola centripeta $\bar{a}_T = 0$

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

massa pianeta

usando la 3 legge nella forma $T^2 = K r^2$

$$\boxed{F = \frac{4\pi^2}{K} \frac{m}{r^2}}$$

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

questo e $F_{SP} = \frac{4\pi^2}{K_P} \frac{m_P}{r^2}$

$\Rightarrow$ Per la 3 Legge delle Azioni

$$F_{SP} = F_{PS} = \frac{4\pi^2}{K_S} \frac{m_S}{r^2} = \frac{4\pi^2}{K_P} \frac{m}{r}$$

$$\frac{4\pi^2}{m_P k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_P} \Rightarrow m_P k_S = m_S k_P$$

La soluzione più semplice

$$k_S \sim \frac{1}{m_P} \qquad k_P \sim \frac{1}{m_S}$$

$$k_S = \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{m_P} \qquad k_P = \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{m_S}$$

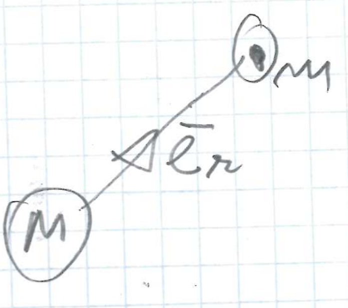
$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

Legge della GRAVITAZIONE UNIVERSALE

G costante universale (COSTANTE DI NEWTON)

$F \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow$ Interazione a raggio di azione infinito

FORMA VETTORIALE



FORZA ESERCITATA DA M SU m

$$\bar{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\bar{e}_r$$

FORZA ATTRATTIVA

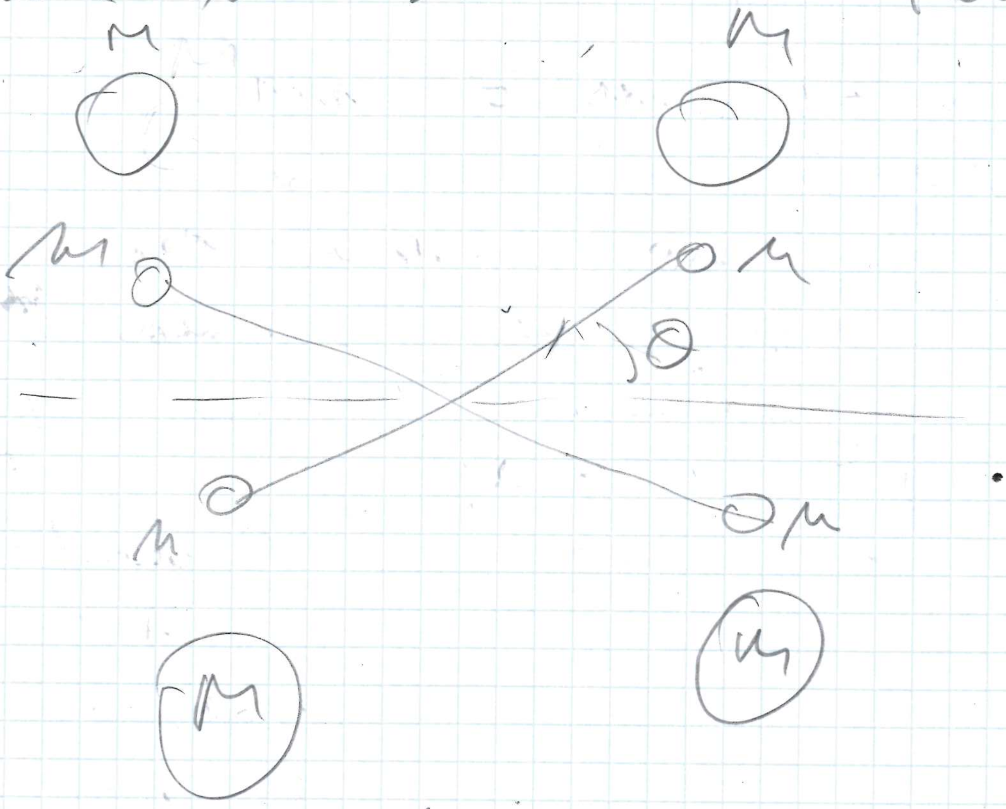
UNITÀ DI MISURA

$$[G] = \frac{N}{M^2} L^2 = \frac{L^3}{MT^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

MISURA DI G

Esperimento di CAVENDISH 1798

usa una bilancia di torsione



Misurando l'angolo di torsione

si trova

$$\boxed{G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}}$$

valore molto piccolo!!

FORZA GRAVITAZIONALE molto

Debole ⇒ più debole ...

4 interazione della natura

MASSA INERZIALE E
MASSA GRAVITAZIONALE

⇒ Le masse che compaiono nella legge della gravitazione universale CONCETTUALMENTE non hanno niente a che fare con la massa che compare nella II legge di Newton

$$\boxed{F = m_I a}$$

m_I massa inerziale

quantifica l'INERZIA cioè la risposta di un corpo sotto l'azione di una generica forza

$$F = G \frac{m_g M_g}{r^2}$$

m_g (M_g) ⇒ MASSA GRAVITAZIONALE

quantifica la forza gravitazionale

sorgente del campo gravitazionale

L'ESPERIMENTO

Facciamo cadere 2 corpi di massa inerziale m_{1I} m_{2I} nel campo gravitazionale della terra

$$F = m_{1I}\, a = F_N = G\,\frac{m_{1g} M_T}{r^2}$$

chiamo $g = \frac{M_{Tg}\, G}{r^2}$

$$m_{1I}\, a_1 = m_{1g}\, g$$

stesso per l'altro corpo

$$m_{2I}\, a_2 = m_{2g}\, g$$

Sperimentalmente si trova (GA...

Tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione $a = g$

segue $\boxed{m_I = m_g}$

EQUIVALENZA MASSA INERZIALE – MASSA GRAVITAZIONALE

Coincidenza nella teoria NEWTONIANA

ALLA BASE DELLA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

ESPERIMENTO DI EÖTVÖS $M_G/M_I = 1$
con errore relativo 10^{-6}
ATTUALMENTE 10^{-12}

ALTRO ESEMPIO

CALCOLO del periodo di un pendolo

$$m_I \frac{d^2\theta}{dt^2} = m_g \frac{g}{L} \theta$$

segue $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_I}{m_G} \frac{\ell}{g}}$

Solo se $m_I = m_G$ il periodo del pendolo non dipende dal corpo

CAMPO GRAVITAZIONALE

- una massa M (puntiforme o NON) genera su tutte le masse m poste a distanza $\bar{r}$ una forza

$$\bar{F} = -m G \frac{M}{r^2} \bar{u}_r$$

Possiamo ora introdurre il concetto di campo GRAVITAZIONALE!

La massa M SORGENTE DEL CAMPO genera nello spazio un campo gravitazionale

$$\bar{E} = -G \frac{M}{r} \bar{e}_r$$

La forza $\bar{F}$ diventa

$$\bar{F} = m \bar{E}$$

MASSA DI PROVA

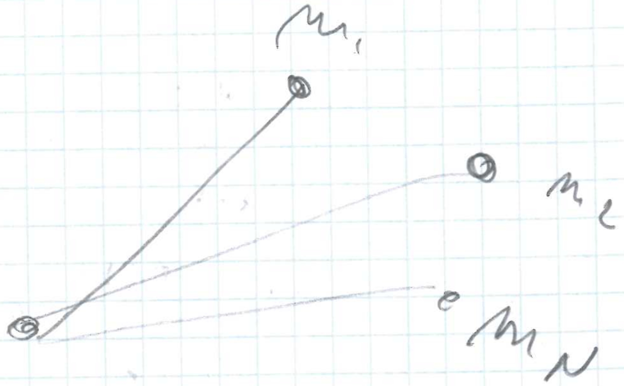
NOZIONE GENE[RALE DI] CAMPO:
GRANDEZZA FISICA
- SCALARE
- VETTORIALE
- TENSORIALE

$E(r,t)$ definita per punti dello spazio

- Concetto di campo molto utile nella fisica moderna;

- Campo generato da una distribuzione di masse

$$\bar{E}(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{E}_i$$



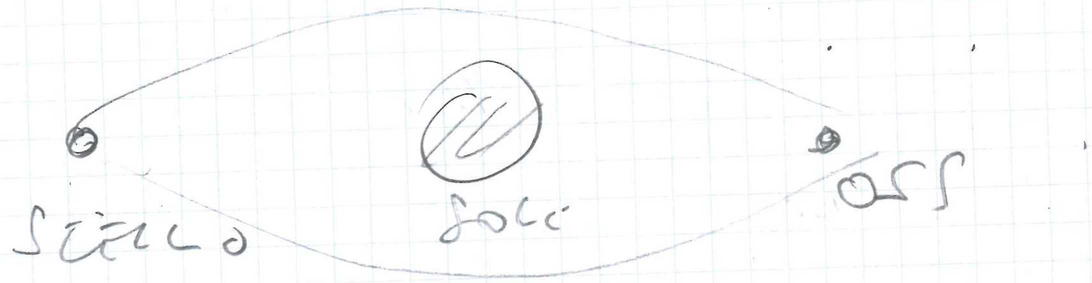
Caso continuo

$$\bar{E}(P) = \int E(P)\, dm$$

• Relatività generale:
C.G. associata alla modifica della geometria dello spazio-tempo

ES! curvatura raggi luminosi

LENTE GRAVITAZIONALE

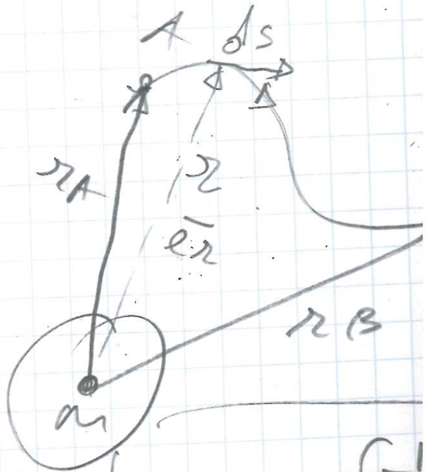


ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$\Delta E_{AB} \Rightarrow$ Energia potenziale: lavoro fatto CONTRO le forze del campo per andare da $A \to B$

$$\Delta E_{AB} = -\int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\bar{e}_r \cdot \bar{ds}$$

$$\bar{e}_r \cdot \bar{ds} = dr$$



$$\Delta E_{AB} = G\int_{r_A}^{r_B} \frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{GMm}{r_B} + \frac{GMm}{r_A}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{G}{}}$$

FORZA CONSERVATIVA

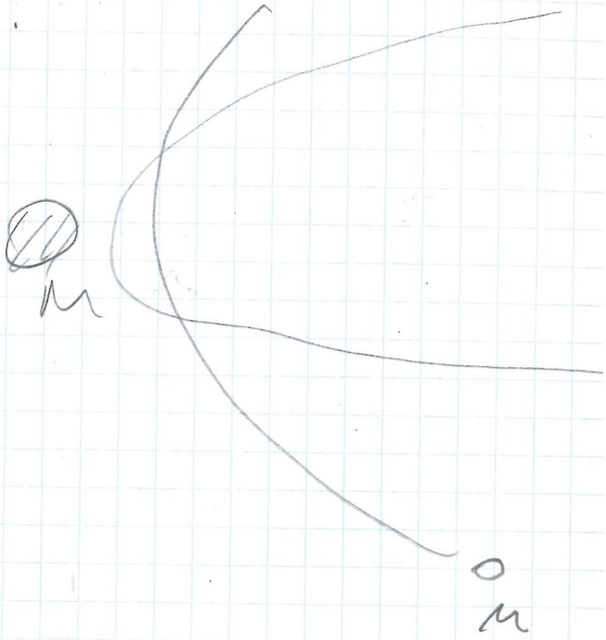
MOTO IN CAMPO GRAVITAZIONALE

ORBITE

Si dimostra che → vedi corso M.R. le orbite di corpi in un C G possono essere di tre tipi:

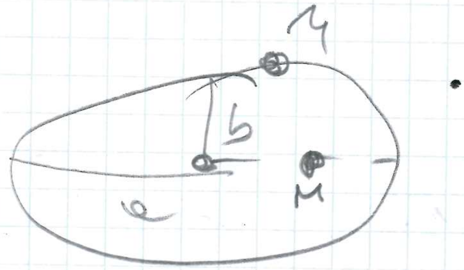
- Iperboliche
- PARABOLICHE

STATI NON LEGATI



- ELLITTICHE

STATI LEGATI



$E = E_K + E_p$

$r \to \infty \qquad E_p \to 0 \qquad E_K \geq 0$

$\Rightarrow E > 0$ IPERBOLICA

$\Rightarrow E = 0$ PARABOLICA

$\Rightarrow E < 0$ ELLITTICA

N.B. NON È POSSIBILE LA caduta sul CENTRO SE

$L \neq 0$

ASS. ORBITA CIRCOLARE

$$E_p + E_K = E_T = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

$v = \omega r$

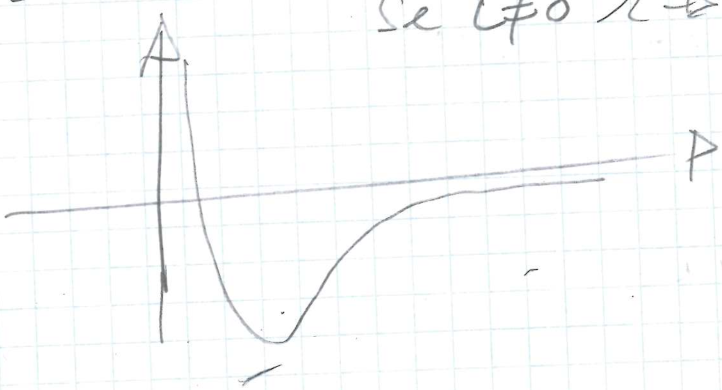
$L = rp = rvm = r^2\omega m$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$\omega = \frac{L}{r^2 m}$

$$= -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^2}$$

Se $L \neq 0$ $r \to 0$ $E \to \infty$

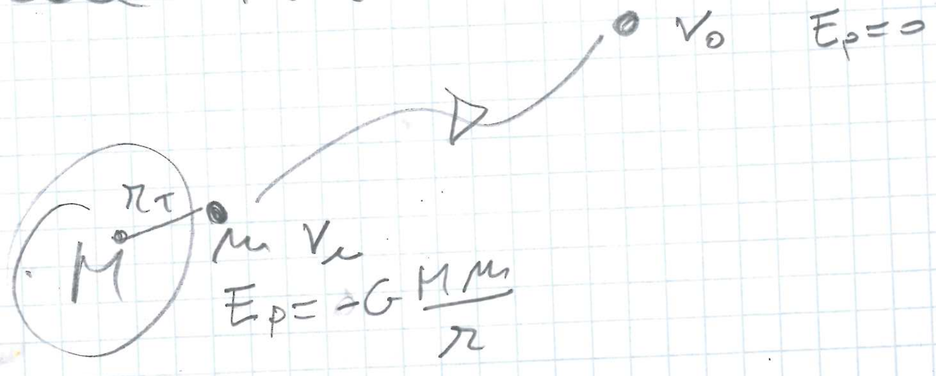


CENNI RELATIVITÀ GENERALE

ESEMPIO

VELOCITÀ DI FUGA

Calcolare la velocità INIZIALE DI un corpo per uscire dal campo gravitazionale terrestre



Conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - G\frac{mM}{r_T} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Velocità di fuga quando $v_0 = 0$

$$V_F = \sqrt{\frac{2GM}{r_T}}$$

ESISTE UNA VELOCITÀ LIMITE

$V_F \leq C \Rightarrow$ velocità della luce

Se per una stella $V_F > C$ nessun segnale fisico può scappare dal C.G. della stella

BUCO NERO

$V_F = C \Rightarrow c^2 = \frac{2GM}{r}$

$$\boxed{r = \frac{2GM}{c^2}}$$

RAGGIO DI SCHWARZSCHILD DEL BUCO NERO