Complementi di deduzione naturale e calcolo delle sequenze

Francesco Paoli
Dispense per gli studenti

April 16, 2024

1 Eliminazione dell'identità

Theorem 1 *Per ogni* $\alpha \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$*, si ha* $\vdash_{\mathbf{PK}} \alpha \Rightarrow \alpha$.

Proof. Procediamo per induzione sul numero n di connettivi presenti in α.

(Base: $n = 0$). Se $n = 0$, allora α non ha connettivi, ossia è una variabile proposizionale p. Ma allora $\vdash_{\mathbf{PK}} p \Rightarrow p$ perché $p \Rightarrow p$ è un assioma (Def. 12.199).

(Passo induttivo: $n = m+1$). Supponiamo per ipotesi di induzione che valga $\vdash_{\mathbf{PK}} \phi \Rightarrow \phi$, per ogni $\phi \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ che contiene al massimo m connettivi, e supponiamo che α contenga $m + 1$ connettivi. Distinguiamo 4 casi a seconda del connettivo principale di α.

Se $\alpha = \neg\beta$, poiché β contiene m connettivi, per ipotesi di induzione esiste in **PK** una dimostrazione $\mathcal{D}$ di $\beta \Rightarrow \beta$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \beta \Rightarrow \beta\end{array}}{\Rightarrow \beta, \neg\beta}(\neg d)}{\neg\beta \Rightarrow \neg\beta}(sd, \neg s)$$

Se $\alpha = \beta \wedge \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in **PK** una dimostrazione $\mathcal{D}_1$ di $\beta \Rightarrow \beta$ e una dimostrazione $\mathcal{D}_2$ di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \beta \Rightarrow \beta\end{array}}{\beta, \gamma \Rightarrow \beta}(is, ss) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \gamma \Rightarrow \gamma\end{array}}{\beta, \gamma \Rightarrow \gamma}(is)}{\beta, \gamma \Rightarrow \beta \wedge \gamma}(\wedge d)}{\beta \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \gamma}(\wedge s)$$

Se $\alpha = \beta \vee \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in **PK** una dimostrazione $\mathcal{D}_1$ di $\beta \Rightarrow \beta$ e una dimostrazione $\mathcal{D}_2$ di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \beta \Rightarrow \beta\end{array}}{\beta \Rightarrow \beta, \gamma}(id) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \gamma \Rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta, \gamma}(id, sd)}{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta, \gamma}(\vee s)}{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \gamma}(\vee d)$$

Se $\alpha = \beta \to \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in **PK** una dimostrazione $\mathcal{D}_1$ di $\beta \Rightarrow \beta$ e una dimostrazione $\mathcal{D}_2$ di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \beta \Rightarrow \beta\end{array}}{\beta \Rightarrow \gamma, \beta}(id, sd) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \gamma \Rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma, \beta \Rightarrow \gamma}(is, ss)}{\beta \to \gamma, \beta \Rightarrow \gamma}(\to s)}{\beta \to \gamma \Rightarrow \beta \to \gamma}(ss, \to d)$$

■

2 Equivalenza tra PK e ND

Definition 2 *Sia X un insieme non vuoto. Una* successione di lunghezza n *su X è una funzione Γ con dominio $[1, ...n]$ (l'insieme dei numeri interi positivi da 1 a n incluso) e codominio X. Una* successione finita *su X è una successione di lunghezza n su X per qualche numero intero positivo n.*

Per esempio, sia X l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e consideriamo la funzione Γ tale che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \Gamma(5) = a, \Gamma(3) = b, \Gamma(4) = \Gamma(6) = c$. la funzione Γ è una successione di lunghezza 6 su X. La rappresentiamo in forma più conveniente nel seguente modo: $\langle a, a, b, c, a, c \rangle$.

Definition 3 *Sia Γ una successione di lunghezza n sull'insieme X. L'*insieme supporto *di Γ (in simboli, $|\Gamma|$) è definito come*

$$|\Gamma| = \{x \in X : x = \Gamma(m), \text{ per qualche } m \leq n\}.$$

Per esempio, sia $X = \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ e sia Γ la successione finita su X così definita: $\Gamma = \langle p, p \vee q, r, p \to q, p \vee q, p \vee q, r \rangle$. Abbiamo:

$$|\Gamma| = \{p, p \to q, p \vee q, r\}.$$

Definition 4 *Sia X un insieme non vuoto, e sia $Y = \{a_1, ..., a_n\}$ un sottoinsieme finito di X. Una Y-*successione *è una successione Γ_Y di lunghezza n su X tale che, per qualche permutazione π di $[1, ..., n]$, $\Gamma_Y = \left\langle a_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(n)} \right\rangle$.*

Per esempio, sia $X = \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ e sia Y il sottoinsieme di X così definito: $Y = \{p, p \to q, p \vee q, r\}$. $\Gamma_Y = \langle p \to q, p, r, p \vee q \rangle$ è un esempio di Y-successione.

Theorem 5 1. *Sia Y un sottoinsieme finito di $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ e sia $\alpha \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$. Se $Y \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$, allora $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \alpha$ per ogni Y-successione Γ_Y.*

2. *Sia Γ una successione finita su $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ e sia $\alpha \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$. Se $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma \Rightarrow \alpha$, allora $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$.*

Proof. (1). Sia $Y \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$. Allora esiste in **ND** una derivazione ad albero $\mathcal{D}$ di α dalle assunzioni aperte in Y. Procediamo per induzione sul numero n di vertici in $\mathcal{D}$. In questo caso, il numero minimo di vertici che può avere $\mathcal{D}$ è 1 e non 0, perché ogni derivazione ad albero deve avere almeno un vertice.

(Base: $n = 1$). Se $n = 1$, l'unico vertice di $\mathcal{D}$ è contemporaneamente la radice di $\mathcal{D}$ e una foglia di $\mathcal{D}$. In quanto radice, dev'essere etichettato dalla conclusione α. In quanto foglia, però, la formula α dev'essere anche un'assunzione aperta in Y. Poiché $\vdash_{\mathbf{PK}} \alpha \Rightarrow \alpha$, eventualmente applicando a tale sequenza le regole *is* e *ss*, si può ricostruire nell'antecedente una qualsiasi Y-successione Γ_Y, e quindi $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \alpha$.

(Passo induttivo: $n = m + 1$). Supponiamo per ipotesi di induzione che il teorema valga per derivazioni ad albero che contengono al massimo m vertici: ossia, se esiste una derivazione in **ND** di φ da Z contenente al massimo m vertici, allora $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Z \Rightarrow \varphi$ per ogni Z-successione Γ_Z. Supponiamo inoltre che esista in **ND** una derivazione ad albero $\mathcal{D}$ di α dalle assunzioni aperte in Y, dove $\mathcal{D}$ contiene $m+1$ vertici e l'$m+1$-esimo vertice (la radice) è occupato dalla conclusione α:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \ddots\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots\ \vdots \\ \alpha \end{array}\right\} m + 1\text{vertici}$$

Se α è giustificato come assunzione, procediamo come sopra. Se invece α è la conclusione di una regola di inferenza, distinguiamo tanti casi quante sono le regole di **ND**. Per semplicità, ci limitiamo alle regole $\wedge - I, \wedge - E(a), \rightarrow -I$.

Sia $\alpha = \beta \wedge \gamma$ ottenuta per $\wedge - I$ dalle premesse β e γ:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \ddots\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots\ \vdots \\ \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \ddots\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\beta \wedge \gamma}$$

$\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ hanno al massimo m vertici, per cui si applica loro l'ipotesi di induzione. Inoltre, gli insiemi delle assunzioni aperte sia di $\mathcal{D}_1$ che di $\mathcal{D}_2$ devono per forza essere sottoinsiemi di Y. Quindi, usando l'ipotesi di induzione ed eventualmente anche is, ss, per ogni Y-successione Γ_Y si ha $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \beta$ e $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \gamma$. Applicando a tali premesse la regola operazionale $\wedge d$, otteniamo $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.

Sia α ottenuta per $\wedge - E(a)$ dalla premessa $\alpha \wedge \beta$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \ddots \ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots \ \vdots \\ \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \end{array}$$

$\mathcal{D}_1$ (che si conclude con $\alpha \wedge \beta$) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Inoltre, $\mathcal{D}_1$ ha le stesse assunzioni aperte di $\mathcal{D}$. Quindi per ogni Y-successione Γ_Y si ha $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \alpha \wedge \beta$. Costruiamo la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_Y \Rightarrow \alpha \wedge \beta \end{array} \qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha}(is, ss, \wedge s)}{\Gamma_Y \Rightarrow \alpha}(cut)$$

In tal modo otteniamo $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \alpha$.

Sia $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ ottenuta per $\rightarrow -I$ in quanto esiste in **ND** una derivazione di γ dall'assunzione β:

$$\begin{array}{c} [\beta] \\ \ddots \ \mathcal{D}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots \ \vdots \\ \dfrac{\gamma}{\beta \rightarrow \gamma} \end{array}$$

Supponiamo anche per semplicità che tutte le occorrenze di β vengano chiuse dall'applicazione di $\rightarrow -I$ considerata. $\mathcal{D}_1$ (che si conclude con γ e in cui β figura ancora come assunzione aperta) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Le assunzioni aperte di $\mathcal{D}_1$ sono le stesse di $\mathcal{D}$ più β. Quindi, applicando l'ipotesi di induzione, per ogni Y-successione Γ_Y si ha $\vdash_{\mathbf{PK}} \beta, \Gamma_Y \Rightarrow \gamma$. Applicando a tali premesse la regola operazionale $\rightarrow d$, otteniamo $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma_Y \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$.

(2). Sia $\vdash_{\mathbf{PK}} \Gamma \Rightarrow \alpha$. Allora esiste in **PK** una dimostrazione ad albero $\mathcal{D}$ di $\Gamma \Rightarrow \alpha$. Procediamo per induzione sul numero n di vertici in $\mathcal{D}$. Anche in questo caso, il numero minimo di vertici che può avere $\mathcal{D}$ è 1 e non 0, perché ogni dimostrazione ad albero deve avere almeno un vertice.

(Base: $n = 1$). Se $n = 1$, l'unico vertice di $\mathcal{D}$ è contemporaneamente la radice di $\mathcal{D}$ e una foglia di $\mathcal{D}$. In quanto radice, dev'essere etichettato dalla conclusione $\Gamma \Rightarrow \alpha$. In quanto foglia, però, $\Gamma \Rightarrow \alpha$ dev'essere un assioma e quindi la successione Γ deve consistere unicamente nella formula α. Di conseguenza $|\Gamma| = \{\alpha\}$. Ma in **ND** esiste sicuramente una derivazione di α dall'assunzione aperta α. Quindi $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$.

(Passo induttivo: $n = m + 1$). Supponiamo per ipotesi di induzione che il teorema valga per dimostrazioni ad albero che contengono al massimo m vertici: ossia, se esiste una dimostrazione in **PK** di $\Delta \Rightarrow \varphi$ contenente al massimo m vertici, allora $|\Delta| \vdash_{\mathbf{ND}} \varphi$. Supponiamo inoltre che esista in **PK** una dimostrazione ad albero $\mathcal{D}$ di $\Gamma \Rightarrow \alpha$, dove $\mathcal{D}$ contiene $m + 1$ vertici e l'$m + 1$-esimo vertice (la radice) è occupato dalla sequenza $\Gamma \Rightarrow \alpha$:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \ddots \;\vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots \;\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \alpha \end{array}\right\} m + 1 \text{vertici}$$

$\Gamma \Rightarrow \alpha$ dev'essere la conclusione di una regola di inferenza. Distinguiamo tanti casi quante sono le regole di **PK**. Per semplicità, ci limitiamo alle regole $\wedge s, \rightarrow d$.

Sia $\Gamma = \beta \wedge \gamma, \Sigma$, per cui $\Gamma \Rightarrow \alpha$ è la sequenza $\beta \wedge \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$. Supponiamo che sia stata ottenuta per $\wedge s$ dalla premessa $\beta, \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \ddots \;\vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots \;\vdots \\ \dfrac{\beta, \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha}{\beta \wedge \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha}(\wedge s) \end{array}$$

$\mathcal{D}_1$ (che si conclude con $\beta, \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Quindi $\vdash_{\mathbf{ND}} |\beta, \gamma, \Sigma| \Rightarrow \alpha$, ovvero esiste in **ND** una derivazione ad albero $\mathcal{D}^*$ di α dalle assunzioni aperte β, γ, Σ. Costruiamo la seguente derivazione ad albero in **ND** di α dalle assunzioni aperte $\beta \wedge \gamma, \Sigma$:

$$\dfrac{\beta \wedge \gamma}{\beta}(\wedge - E(a)) \qquad \dfrac{\beta \wedge \gamma}{\gamma}(\wedge - E(b))$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}^* \\ \ddots\vdots \\ \vdots \\ \ddots\vdots \\ \alpha \end{array}$$

Quindi $|\beta \wedge \gamma, \Sigma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$, ossia $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$.

Sia $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, per cui $\Gamma \Rightarrow \alpha$ è la sequenza $\Gamma \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$. Supponiamo che sia stata ottenuta per $\rightarrow d$ dalla premessa $\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \ddots\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddots\vdots \\ \dfrac{\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma}{\Gamma \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma}(\rightarrow d) \end{array}$$

$\mathcal{D}_1$ (che si conclude con $\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma$) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Quindi $\vdash_{\mathbf{ND}} |\beta, \Gamma| \Rightarrow \gamma$, ovvero esiste in **ND** una derivazione ad albero $\mathcal{D}^*$ di γ dalle assunzioni aperte β, Γ. Costruiamo la seguente derivazione ad albero in **ND** di $\beta \rightarrow \gamma$ dalle assunzioni aperte in Γ, dove l'ultima applicazione di $\rightarrow -I$ chiude tutte le occorrenze aperte di β:

$$\begin{array}{c} [\beta] \\ \mathcal{D}^* \\ \ddots\vdots \\ \vdots \\ \ddots\vdots \\ \dfrac{\gamma}{\beta \rightarrow \gamma}(\rightarrow -I) \end{array}$$

Quindi $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \beta \rightarrow \gamma$, ossia $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$. ■