

Complementi di deduzione naturale e calcolo delle sequenze

Francesco Paoli
Dispense per gli studenti

April 16, 2024

1 Eliminazione dell'identità

Theorem 1 Per ogni $\alpha \in \mathbf{FOR}(\mathcal{L}_0)$, si ha $\vdash_{\mathbf{PK}} \alpha \Rightarrow \alpha$.

Proof. Procediamo per induzione sul numero n di connettivi presenti in α .

(Base: $n = 0$). Se $n = 0$, allora α non ha connettivi, ossia è una variabile proposizionale p . Ma allora $\vdash_{\mathbf{PK}} p \Rightarrow p$ perché $p \Rightarrow p$ è un assioma (Def. 12.199).

(Passo induttivo: $n = m+1$). Supponiamo per ipotesi di induzione che valga $\vdash_{\mathbf{PK}} \phi \Rightarrow \phi$, per ogni $\phi \in \mathbf{FOR}(\mathcal{L}_0)$ che contiene al massimo m connettivi, e supponiamo che α contenga $m+1$ connettivi. Distinguiamo 4 casi a seconda del connettivo principale di α .

Se $\alpha = \neg\beta$, poiché β contiene m connettivi, per ipotesi di induzione esiste in \mathbf{PK} una dimostrazione \mathcal{D} di $\beta \Rightarrow \beta$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in \mathbf{PK} :

$$\mathcal{D} \quad \frac{\frac{\beta \Rightarrow \beta}{\Rightarrow \beta, \neg\beta} (-d)}{\neg\beta \Rightarrow \neg\beta} (sd, \neg s)$$

Se $\alpha = \beta \wedge \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in \mathbf{PK} una dimostrazione \mathcal{D}_1 di $\beta \Rightarrow \beta$ e una dimostrazione \mathcal{D}_2 di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in \mathbf{PK} :

$$\frac{\frac{\frac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta, \gamma \Rightarrow \beta} (\mathcal{D}_1, is, ss)}{\beta, \gamma \Rightarrow \beta} (\mathcal{D}_2, is)}{\beta, \gamma \Rightarrow \beta \wedge \gamma} (\wedge d)}{\beta \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \gamma} (\wedge s)$$

Se $\alpha = \beta \vee \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in \mathbf{PK} una dimostrazione \mathcal{D}_1 di $\beta \Rightarrow \beta$ e una

dimostrazione \mathcal{D}_2 di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \beta, \gamma}(id)}}{\frac{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta, \gamma}{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \gamma}(\vee s)} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\frac{\gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma \Rightarrow \beta, \gamma}(id, sd)}(\vee d)$$

Se $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, poiché β e γ contengono ciascuna al massimo m connettivi, per ipotesi di induzione esistono in **PK** una dimostrazione \mathcal{D}_1 di $\beta \Rightarrow \beta$ e una dimostrazione \mathcal{D}_2 di $\gamma \Rightarrow \gamma$. Abbiamo allora la seguente dimostrazione in **PK**:

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \gamma, \beta}(id, sd)}}{\frac{\beta \rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma}{\beta \rightarrow \gamma \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma}(\rightarrow s)} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\frac{\gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma, \beta \Rightarrow \gamma}(is, ss)}(ss, \rightarrow d)$$

■

2 Equivalenza tra PK e ND

Definition 2 Sia X un insieme non vuoto. Una successione di lunghezza n su X è una funzione Γ con dominio $[1, \dots, n]$ (l'insieme dei numeri interi positivi da 1 a n incluso) e codominio X . Una successione finita su X è una successione di lunghezza n su X per qualche numero intero positivo n .

Per esempio, sia X l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e consideriamo la funzione Γ tale che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \Gamma(5) = a, \Gamma(3) = b, \Gamma(4) = \Gamma(6) = c$. la funzione Γ è una successione di lunghezza 6 su X . La rappresentiamo in forma più conveniente nel seguente modo: $\langle a, a, b, c, a, c \rangle$.

Definition 3 Sia Γ una successione di lunghezza n sull'insieme X . L'insieme supporto di Γ (in simboli, $|\Gamma|$) è definito come

$$|\Gamma| = \{x \in X : x = \Gamma(m), \text{ per qualche } m \leq n\}.$$

Per esempio, sia $X = \mathbf{FOR}(\mathcal{L}_0)$ e sia Γ la successione finita su X così definita: $\Gamma = \langle p, p \vee q, r, p \rightarrow q, p \vee q, p \vee q, r \rangle$. Abbiamo:

$$|\Gamma| = \{p, p \rightarrow q, p \vee q, r\}.$$

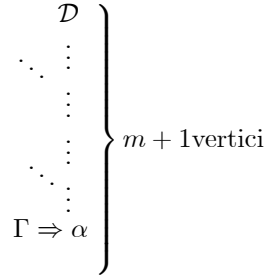
Definition 4 Sia X un insieme non vuoto, e sia $Y = \{a_1, \dots, a_n\}$ un sottoinsieme finito di X . Una Y -successione è una successione Γ_Y di lunghezza n su X tale che, per qualche permutazione π di $[1, \dots, n]$, $\Gamma_Y = \langle a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)} \rangle$.

Per esempio, sia $X = \mathbf{FOR}(\mathcal{L}_0)$ e sia Y il sottoinsieme di X così definito: $Y = \{p, p \rightarrow q, p \vee q, r\}$. $\Gamma_Y = \langle p \rightarrow q, p, r, p \vee q \rangle$ è un esempio di Y -successione.

questo caso, il numero minimo di vertici che può avere \mathcal{D} è 1 e non 0, perché ogni dimostrazione ad albero deve avere almeno un vertice.

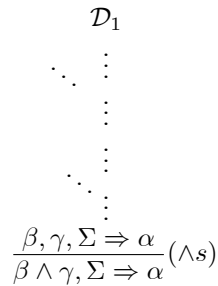
(Base: $n = 1$). Se $n = 1$, l'unico vertice di \mathcal{D} è contemporaneamente la radice di \mathcal{D} e una foglia di \mathcal{D} . In quanto radice, dev'essere etichettato dalla conclusione $\Gamma \Rightarrow \alpha$. In quanto foglia, però, $\Gamma \Rightarrow \alpha$ dev'essere un assioma e quindi la successione Γ deve consistere unicamente nella formula α . Di conseguenza $|\Gamma| = \{\alpha\}$. Ma in **ND** esiste sicuramente una derivazione di α dall'assunzione aperta α . Quindi $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$.

(Passo induttivo: $n = m + 1$). Supponiamo per ipotesi di induzione che il teorema valga per dimostrazioni ad albero che contengono al massimo m vertici: ossia, se esiste una dimostrazione in **PK** di $\Delta \Rightarrow \varphi$ contenente al massimo m vertici, allora $|\Delta| \vdash_{\mathbf{ND}} \varphi$. Supponiamo inoltre che esista in **PK** una dimostrazione ad albero \mathcal{D} di $\Gamma \Rightarrow \alpha$, dove \mathcal{D} contiene $m + 1$ vertici e l' $m + 1$ -esimo vertice (la radice) è occupato dalla sequenza $\Gamma \Rightarrow \alpha$:



$\Gamma \Rightarrow \alpha$ dev'essere la conclusione di una regola di inferenza. Distinguiamo tanti casi quante sono le regole di **PK**. Per semplicità, ci limitiamo alle regole $\wedge s, \rightarrow d$.

Sia $\Gamma = \beta \wedge \gamma, \Sigma$, per cui $\Gamma \Rightarrow \alpha$ è la sequenza $\beta \wedge \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$. Supponiamo che sia stata ottenuta per $\wedge s$ dalla premessa $\beta, \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$:



\mathcal{D}_1 (che si conclude con $\beta, \gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha$) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Quindi $\vdash_{\mathbf{ND}} |\beta, \gamma, \Sigma| \Rightarrow \alpha$, ovvero esiste in **ND** una derivazione ad albero \mathcal{D}^* di α dalle assunzioni aperte β, γ, Σ . Costruiamo la

seguinte derivazione ad albero in **ND** di α dalle assunzioni aperte $\beta \wedge \gamma, \Sigma$:

$$\frac{\frac{\beta \wedge \gamma}{\beta}(\wedge - E(a)) \quad \frac{\beta \wedge \gamma}{\gamma}(\wedge - E(b))}{\mathcal{D}^*} \dots \alpha$$

Quindi $|\beta \wedge \gamma, \Sigma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$, ossia $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$.

Sia $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, per cui $\Gamma \Rightarrow \alpha$ è la sequenza $\Gamma \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$. Supponiamo che sia stata ottenuta per $\rightarrow d$ dalla premessa $\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma$:

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma}{\Gamma \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma}(\rightarrow d)}$$

\mathcal{D}_1 (che si conclude con $\beta, \Gamma \Rightarrow \gamma$) ha m vertici, per cui le si applica l'ipotesi di induzione. Quindi $\vdash_{\mathbf{ND}} |\beta, \Gamma| \Rightarrow \gamma$, ovvero esiste in **ND** una derivazione ad albero \mathcal{D}^* di γ dalle assunzioni aperte β, Γ . Costruiamo la seguente derivazione ad albero in **ND** di $\beta \rightarrow \gamma$ dalle assunzioni aperte in Γ , dove l'ultima applicazione di $\rightarrow -I$ chiude tutte le occorrenze aperte di β :

$$\frac{[\beta] \mathcal{D}^* \dots \gamma}{\beta \rightarrow \gamma}(\rightarrow -I)$$

Quindi $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \beta \rightarrow \gamma$, ossia $|\Gamma| \vdash_{\mathbf{ND}} \alpha$. ■