

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2023/24

Prova Scritta 14 Gennaio 2025

1. (12 punti)

Si dimostri che un cambiamento tra basi ortonormali di uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione finita é descritta da una trasformazione unitaria. Usando la notazione con le componenti (indici) si derivino le leggi di trasformazione di vettori ket e bra e di una matrice A per tali trasformazioni. Si dimostri inoltre che $\langle v|A|u\rangle$ e la traccia di A sono invarianti per queste trasformazioni.

2. (10 punti)

Si consideri l'equazione agli autovalori avente la forma di una PDE in due dimensioni

$$Hu(x, y) = Eu(x, y), \quad H = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \quad (0.1)$$

con le condizioni al contorno periodiche $u(0, y) = u(L, y)$, $u(x, 0) = u(x, L)$. L, E sono costanti reali strettamente positive.

1) Si integri la PDE usando il metodo della separazione delle variabili.

2) si determinino gli autovalori E_n e gli autovettori normalizzati $|u_{m,p}\rangle$ di H .

3. (10 punti)

Si definisca lo sviluppo di Taylor-Laurent di una funzione analitica intorno ad un generico punto $z = z_0$. Si determini il dominio di convergenza della serie e si derivi la forma esplicita dei coefficienti dello sviluppo. Si dimostri inoltre che nel caso in cui z_0 é punto di analiticit  lo sviluppo coincide con quello usuale di Taylor.

4. (12 punti)

Data la matrice B che nella base canonica di \mathbb{C}^3 ha la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

determinare il numero complessi a in modo che B sia hermitiana.

a) Trovare gli autovalori ed autovettori di B e dimostrare che B é diagonalizzabile.

b) Trovare tre autovettori di B che costituiscono una base ON di \mathbb{C}^3 .

c) Scrivere la trasformazione unitaria che diagonalizza B e la sua forma diagonale.

d) Trovare autovettori ed autovalori di $H = e^{\alpha B}$ con α generico numero complesso.

5. (10 punti)

Calcolare la trasformata $g(\omega)$ della funzione:

$$f(x) = e^{ax} \text{ per } x < 0, \quad f(x) = 0 \text{ per } x > 0$$

con $a > 0$. Determinare la frequenza di risonanza. Calcolare l'antitrasformata di $g(\omega)$ e dimostrare che essa coincide con $f(x)$.

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^4}{(z^2 + 1)^2}$$

a) Classificare la funzione e le sue singolarit  (punto all'infinito incluso).

b) Calcolare i residui di $f(z)$ nei suoi punti di singolarit .

c) Calcolare i primi due termini della serie di Laurent della funzione nell'intorno di $z = i$ ed il dominio di convergenza della serie.

d) Sviluppare la funzione in serie di Taylor-Laurent nel punto $z = \infty$