

# METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21

*Prova Scritta 17 Giugno 2021*

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2020/21 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 2, 3, 5,6.

## 1. (10 punti)

Si dimostri che se un operatore  $A$  in uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione  $N$  ammette  $N$  autovettori tra loro ortogonali allora  $A$  è necessariamente un operatore normale. Si dimostri la condizione sufficiente nel caso particolare in cui l'operatore  $A$  è hermitiano (si dimostri cioè che un operatore hermitiano ammette sempre  $N$  autovettori tra loro ortonormali).

## 2. (10 punti)

Si dimostri la disuguaglianza di Bessel per lo sviluppo in serie di Fourier generalizzato per un sistema ON,  $\{e_n(x)\}$ ,  $n = 0 \dots \infty$  in uno spazio di Hilbert  $H$ . Dimostrare inoltre che il sistema è completo (base di  $H$ ) se è verificata l'identità di Parseval.

## 3. (10 punti)

Si enunci e dimostri il secondo teorema di Cauchy (rappresentazione integrale di Cauchy) e si discuta l'implicazione del teorema per quanto riguarda l'esistenza delle derivate successive di una funzione analitica.

## 4. (10 punti)

Date la matrice sullo spazio vettoriale complesso bidimensionale  $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

(a) determinare la matrice

$$N = \alpha A^+ A$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(b) Stabilire se la matrice  $N$  può essere hermitiana, invertibile o unitaria.

(c) Per il caso in cui  $N$  è hermitiana si calcolino i suoi autovalori ed autovettori.

## 5. (10 punti)

Nello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$ , si trovino i coefficienti dello sviluppo nella serie di Fourier complessa  $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}$ ,  $n = -\infty \dots \infty$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2} < x < \pi; \quad f(x) = 1 \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(1) Si specifichi il tipo di convergenza della serie di funzioni e si trovino i valori a cui converge la serie nei punti di discontinuità.

(2) Si verifichi la relazione di completezza per i coefficienti.

[Si tenga a mente la serie  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$ ]

## 6. (10 punti)

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 2a^2 z^2 + a^4}$$

con  $a$  reale.

- a) Classificare i punti di singolarità della funzione (punto all'infinito incluso) e determinarne i residui distinguendo i due casi  $a \neq 0$  e  $a = 0$ .
- b) Trovare i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor-Laurent intorno al punto  $z = ia$  e determinare il dominio di convergenza della serie (solo per il caso  $a \neq 0$ ).
- c) Calcolare l'integrale sull'asse reale (solo per il caso  $a \neq 0$ )

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$$