

**METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2019/20**  
*Prova Scritta 26 Luglio 2021*

1. Data la matrice sullo spazio vettoriale complesso bidimensionale  $\mathbb{C}_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

con  $\theta \in \mathbb{C}$ .

Determinare  $\alpha$  in modo che  $A$  sia hermitiana, calcolare i suoi autovalori, autovettori e la matrice unitaria  $U$  che la diagonalizza.

2. Nello spazio  $L^2(-\pi, \pi)$  trovare i coefficienti  $c_n$  dello sviluppo nella base complessa di Fourier  $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$  della funzione

$$f(x) = -2 \quad \text{per} \quad -\pi < x < 0; \quad f(x) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi$$

e si verifichi la relazione di completezza per i  $c_n$ .

[Si tenga a mente la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ]

3. Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 8z^2 + 15}$$

- a) Classificare i punti di singolarità della funzione [punto all'infinito incluso] e determinarne il residuo .
- b) Trovare i primi due coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor-Laurent di  $f(z)$  intorno a  $z = i\sqrt{3}$  e determinare la regione di convergenza della serie.
- c) Calcolare usando integrazione nel campo complesso l'integrale sull'asse reale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$$