

# METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2023/24

*Prova Scritta 22 Luglio 2024*

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2023/24 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 1, 2, 4,5.

**1. (10 punti)**

- a) Si dimostri che una cambiamento tra basi ortonormali in uno spazio vettoriale sul campo complesso é sempre descritto da un operatore (matrice) unitario.
- b) Si derivino, usando la notazione di Dirac, le leggi di trasformazione di vettori (ket e bra) e operatori per cambiamenti tra basi ortonormali.
- b) Si derivino usando la notazione con gli indici le leggi di trasformazione dei vettori, righe, colonna e matrici associati ai vettori ket, bra e operatori.

**2. (10 punti)**

Dopo aver definito lo spazio delle funzioni al quadrato sommabili  $L^2(a, b)$  si dimostri che questo spazio é uno spazio di Hilbert. Si dia inoltre un esempio di un sistema ortonormale completo (base) su  $L^2(a, b)$ , dimostrando esplicitamente l'ortonormalità del sistema.

**3. (10 punti)**

Si classifichino i vari tipi di singolarità a isolata di una funzione analitica (inclusi i punti di diramazione) dando per ogni tipo di singolarità un esempio specifico. Si dimostri inoltre la formula per il calcolo del residuo di una singolarità polare di ordine  $N$ .

**4. (10 punti)**

Data la matrice sullo spazio vettoriale complesso  $\mathbb{C}^3$  scritta nella base canonica di  $\mathbb{C}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & i & \gamma \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

- (a) Posto  $\beta = 0$  determinare i coefficienti  $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$  in modo tale che la matrice A sia diagonalizzabile.
- (b) Posto  $\alpha = 0$  determinare i coefficienti  $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$  in modo tale che la matrice A sia Hermitiana.
- (c) Nel caso (b) si calcolino gli autovettori ed autovalori di A, si diagonalizzi la matrice e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione.

**5. (10 punti)**

Data la funzione

$$f(x) = e^{-|x|+iax}$$

con  $a$  numero reale.

- a) Si applicano i teoremi sull' esistenza della sua trasformata di Fourier  $g(\omega)$  e della anti-trasformata.

Calcolare  $g(\omega)$  e verificare il risultato ottenuto calcolando l'antitrasformata.

Trovare i valori di  $\omega$  per cui si ha risonanza.

**6. (10 punti)**

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{4z^2 + 5z^2 + 1}.$$

- a) Classificare le singolarità della funzione punto all'infinito incluso.

- b) Calcolare i residui per tutte le singolarità al finito.
- c) Sviluppare  $f(z)$  in serie di Taylor-Laurent intorno ad un punto di singolarità polare a piacere ( si determinino solo i primi due termini dello sviluppo). Si determini la regione di convergenza della serie.
- c) Calcolare usando il lemm di Jordan l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$