

**METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2023/24**  
*Prova Scritta 8 Luglio 2024*

**Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2023/24 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 1, 2, 4,5.**

**1. (10 punti)**

Si consideri la forma bilineare nel campo complesso

$$s = \langle u | A | u \rangle,$$

dove  $|u\rangle$  è un generico vettore ket e  $A$  un operatore su uno spazio vettoriale lineare  $V$  sul campo complesso di dimensione  $N$ .

a) Si dimostri che  $s$  è uno scalare, cioè non cambia (è invariante) per cambiamenti di base ortonormali.

b) Si determinino le condizioni che deve soddisfare  $A$  affinché  $s$  sia un numero reale.

c) Considerando una generica base ON  $\{|e_n\rangle\}$  di  $V$  si scriva  $s$  in termini delle componenti di  $|u\rangle$  e  $A$  in questa base e si ripeta la dimostrazione del punto a).

d) Assumendo che  $A$  verifichi le condizioni determinate al punto b) si scriva  $s$  in termini delle componenti di  $|u\rangle$  e  $A$  nella base costituita dagli autovettori di  $A$ . Le proprietà degli autovalori di  $A$  garantiscono che  $s$  è reale?

**2. (10 punti)**

Si definisca la trasformata di Fourier  $g(\omega)$  di un funzione  $f(x)$  e la sua antitrasformata.

a) Si enuncino le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata e della sua antitrasformata.

b) Assumendo che siano soddisfatte le condizioni di cui al punto a), si dimostri che il prodotto scalare di due funzioni nello spazio  $x$  è lo stesso nello spazio  $\omega$ :

$$\langle f(x) | F(x) \rangle_x = \langle g(\omega) | G(\omega) \rangle_\omega,$$

dove  $g(\omega), G(\omega)$  sono rispettivamente le trasformate di Fourier delle funzioni  $f(x)$  e  $F(x)$ .

**3. (10 punti)**

Si enunci e si dimostri la formula integrale di Cauchy (secondo teorema di Cauchy) per una funzione analitica  $f(z)$  sul campo complesso. Partendo da quest'ultima si derivi la formula delle derivate (formula integrale di Cauchy generalizzata) e si discutano le conseguenze di questa formula per l'esistenza delle derivate  $n$ -sime di  $f(z)$ .

**4. (10 punti)**

Date le due matrici sullo spazio vettoriale complesso  $\mathbb{C}^2$  scritte nella base canonica di  $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

a) determinare i coefficienti  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  in modo tale che le due matrici siano diagonalizzabili simultaneamente. Si dimostri che la matrice  $B$  determinata in questo modo deve essere proporzionale alla matrice unità e che inoltre si ha  $B = \alpha A^2$ .

b) Si determinino gli autovalori di  $A$  e  $B$  il set di autovettori comuni e la matrice unitaria che effettua la diagonalizzazione simultanea delle due matrici.

**Opzionale**

Si determini la matrice

$$C = \cos aA$$

con  $a$  reale, sia nella base canonica di  $\mathbb{C}^2$  sia nella base in cui  $A$  è diagonale.

## 5. (10 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+i}$$

- a) Si applichino alla funzione i teoremi sull'esistenza della trasformata  $g(\omega)$  e dell' antitrasformata di Fourier.
- b) Si calcoli  $g(\omega)$  e si verifichi il risultato calcolando l'antitrasformata. I risultati del calcolo sono coerenti con quanto ottenuto al punto a)?

## 6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^5 + 2z^3a^2 + za^4}$$

con  $a$  numero reale.

- a) Classificare le singolarit  della funzione punto all'infinito incluso.
- b) Calcolare i residui per tutte le singolarit  al finito.
- d) Sviluppare  $f(z)$  in serie di Taylor-Laurent intorno a  $z = 0$  determinando, inoltre, il dominio di convergenza della serie.
- c) Calcolare la parte principale dell'integrale

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$