

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2023/24

Prova Scritta 17 Giugno 2024

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2023/24 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 1, 2, 4,5.

1. (10 punti)

Si dimostri usando la notazione di Dirac che un operatore Hermitiano ha autovalori reali e che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali. Si discutano le implicazioni di questo teorema sulla diagonalizzabilità di una matrice hermitiana considerando anche il caso in cui ci siano autovalori degeneri.

Opzionale

Si ripeta la stessa dimostrazione per una matrice Hermitiana a_{ij} usando la notazione in componenti (indici).

2. (10 punti)

Si dimostri la disuguaglianza di Bessel per lo sviluppo in serie di Fourier generalizzato per un sistema ON, $\{e_n(x)\}$, $n = 0 \dots \infty$ in uno spazio di Hilbert H . Dimostrare inoltre che il sistema é completo (base di H) se é verificata l'identità di Parseval.

3. (10 punti)

Si definisca lo sviluppo formale di una funzione generalmente continua $f(x)$ nella della serie di Fourier (reale o complessa a scelta dello studente) e si enuncino i teoremi sul tipo di convergenza di tale serie.

a) Considerando il caso di convergenza in media di ordine due (cioè rispetto alla norma L^2) si dimostri usando la notazione puramente formale di Dirac la relazione di completezza

$$\langle f|f \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

dove c_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie.

4. (10 punti)

Date la matrice sullo spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^3 scritta nella base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

a) determinare i coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in modo tale che la matrice A sia antihermitiana e si trovino i suoi autovalori ed autovettori. Si scriva inoltre la matrice diagonalizzata e la trasformazione unitaria che esegue la diagonalizzazione.

Opzionale

Posto $\alpha = 0$ si trovi per quali valori di β la matrice A é diagonalizzabile. Per gli autovalori degeneri si determini la loro molteplicitá algebrica e la dimensione dell'autospazio.

5. (10 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{per } x < 0; \quad f(x) = e^{-ax} \quad \text{per } x > 0$$

con a numero reale positivo.

Usando i teoremi enunciati a lezione si dimostri l'esistenza della trasformata $g(\omega)$ e dell' antitrasformata di Fourier. Si calcoli $g(\omega)$ e si verifichi il risultato calcolando l'antitrasformata. Per quali valori di ω abbiamo risonanza?

Opzionale

Si calcoli la trasformata di Fourier nel caso in cui a é un numero immaginario puro ($a = -ik$ con $k \in \mathbb{R}$) e $f(x) = e^{-ikx}$ ovunque per x reale.

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{e^{\pi z} + 1}$$

- a) Classificare le singolarità della funzione punto all'infinito incluso.
- b) Calcolare i residui per tutte le singolarità al finito.
- c) Calcolare l'integrale

$$\oint_C f(z) dz$$

dove C è una semicirconferenza di raggio $2n\pi$ centrata nell'origine del piano di Gauss che giace nella regione $\text{Im}(z) > 0$ ed n è un intero positivo.

- d) Sviluppare $f(z)$ in serie di Taylor-Laurent intorno a $z = i$ (si calcolino solo i primi due coefficienti non nulli dello sviluppo), determinando, inoltre, il dominio di convergenza della serie.