

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21
Prova Scritta 23 Febbraio 2022

1. (10 punti)

Si consideri un operatore A in uno spazio di Hilbert di dimensione finita N definito da

$$A = \sum_{i,j}^N \alpha_{ij} |e_i\rangle \langle e_j|$$

dove $\{|e_i\rangle\}$ è una base ON dello spazio vettoriale e α_{ij} sono coefficienti complessi.

- a) Si determinino le componenti $a_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle$ dell'operatore A nella base data .
- b) Si trovino le condizioni che devono soddisfare gli α_{ij} affinché A sia un operatore antihermitiano.
- c) Nell'ipotesi di cui al punto b), si trovi la forma dei coefficienti α_{ij} nel caso in cui vengano scelti come base $\{|e_i\rangle\}$ gli autovettori di A .

2. (12 punti)

Si risolva usando il metodo della separazione delle variabili l'equazione d'onda di D'Alembert in due dimensioni spaziali (piano x, y) (c è la velocità di propagazione dell'onda):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} = 0$$

con condizioni al contorno di Dirichlet: $\psi(x = 0, y, t) = \psi(x = L, y, t) = \psi(x, y = 0, t) = \psi(x, y = L, t) = 0$ (ψ deve cioè annullarsi nei lati di un quadrato di lato L nel piano x, y con un vertice nell'origine).

3. (10 punti)

Si dia la definizione generale di residuo di una funzione analitica in un punto di singolarità isolato. Si derivi la formula per il residuo di una funzione in una singolarità polare di ordine n .

4. (10 punti)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

Determinare i coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in modo tale che

- (a) La matrice A sia diagonalizzabile.
- (b) la matrice A sia Hermitiana ed abbia un autovalore $\lambda = \sqrt{2}$
- (c) Per il caso b si calcolino gli autovettori ed autovalori di A , si diagonalizzi la matrice e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione.

5. (10 punti)

Si sviluppi in serie di Fourier, si discuta il tipo di convergenza della serie e si verifichi la relazione di completezza per i coefficienti dello sviluppo, per la funzione a scalino

$$f(x) = -1 \quad \text{per} \quad x < 0, \quad f(x) = 1 \quad \text{per} \quad x > 0$$

(Formula utile: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.)

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

- (a) Determinare e caratterizzare i punti di singolarità della funzione (al finito ed al infinito). Per i punti di singolarità essenziale si dimostri esplicitamente che queste sono singolarità essenziali
- (b) Determinare l'espansione in serie di Laurent intorno a $z = 0$ (determinare almeno i primi due termini dell'espansione) il relativo raggio di convergenza r della serie.
- (c) Determinare i residui di tutte le singolarità polari di $f(z)$.
- (d) Calcolare l'integrale sul campo complesso

$$I = \oint_C dz f(z)$$

dove C è una circonferenza centrata nell'origine di raggio $R = 1$.