

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21
Prova Scritta 27 Gennaio 2022

1. (10 punti)

Sia data la forma

$$s = \langle u | A | u \rangle$$

dove A e $|u\rangle$ sono rispettivamente un operatore ed un vettore in uno spazio vettoriale complesso V^N di dimensione finita.

- a) Si scriva l'espressione usando le componenti a_{ij} di A e u_j di $|u\rangle$.
- b) Usando la notazione di Dirac, si trovino le condizioni che deve soddisfare A affinché s sia un numero reale. Si ripeta la dimostrazione usando l'espressione di s in componenti.
- c) Nelle ipotesi che sia verificato il caso b), Si dimostri che é sempre possibile trovare una base di V^N in cui si ha

$$s = \sum_{i=1}^N \lambda_i |u'_i|^2$$

con λ_i reali.

2. (10 punti)

Si dimostri la disuguaglianza di Bessel per un sistema ortonormale infinito $\{|u_i\rangle\}$ in uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Si dimostri inoltre che il sistema diventa completo (base) quando la disuguaglianza é saturata (Parseval).

3. (10 punti)

Si enunci il lemma di Jordan e di dia un esempio esplicito del suo utilizzo per il calcolo di una antitrasformata di Fourier.

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\gamma \\ \beta & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

- (a) determinare i numeri complessi α, β, γ in modo tale che A sia hermitiana ed ammetta come autovalore $\lambda = 3$
- (b) si calcolino gli autovettori ed autovalori di A , si diagonalizzi la matrice e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione.

5. (10 punti)

Trovare i coefficienti c_n dello sviluppo in $L^2(-\pi, \pi)$ della funzione

$$f(x) = x^2 \quad (0.2)$$

nella base di Fourier.

Si scriva la forma esplicita della serie e si determini il tipo di convergenza della serie. Si verifichi la relazione di completezza per i coefficienti ottenuti [Si ricordi la serie $\sum_1^\infty 1/(n)^4 = \pi^4/90$].

6. (10 punti)

Determinare posizione, natura delle singolarita' delle seguenti funzioni di variabile complessa e nel caso di punti di diramazione la posizione del taglio che elimina la ploidromia della funzione.

$$f_1(z) = \frac{z-2}{z^3-4z^2+4z}; \quad f_2(z) = \sqrt{z(z^2+1)}; \quad f_3(z) = \frac{z^2 e^z}{e^z - i}. \quad (0.3)$$

a) Si sviluppi in serie di Laurent la funzione $f_1(z)$ intorno a $z = 0$ e si determini il relativo dominio di convergenza della serie.