

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21

Prova Scritta 20 Dicembre 2021, riservata ai fuoricorso

1. (10 punti)

Sia A un operatore che soddisfa la relazione di commutazione con il suo aggiunto $[A, A^+] = 1$.

(a) Dato l'operatore $H = A^+A$ dimostrare che esso è Hermitiano, e calcolare i commutatori $[H, A]$ e $[H, A^+]$.

(b) Dimostrare usando questi commutatori che indicando con $|n\rangle$ un autovettore di H con autovalore n (sia ha cioè $H|n\rangle = n|n\rangle$) allora l'azione di A e A^+ su $|n\rangle$ è data da $A|n\rangle = \alpha|n-1\rangle$ e $A^+|n\rangle = \beta|n+1\rangle$ dove α, β sono numeri complessi e $|n-1\rangle, |n+1\rangle$ sono gli autovettori di H corrispondenti ad autovalori rispettivamente $n-1$ ed $n+1$.

2. (10 punti)

Si dimostri la formula per la trasformata di Fourier delle derivate n -esime di una funzione $f^{(n)}(x)$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (-i\omega)^n \mathcal{F}(f(x))$$

dove $\mathcal{F}(f(x))$ è la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$. Si illustri inoltre l'uso della formula per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari ed omogenee.

3. (10 punti)

Si dimostri il secondo teorema di Cauchy (rappresentazione integrale di una funzione analitica $f(z)$). Si discutano inoltre le conseguenze del teorema per quando riguarda l'esistenza delle derivate n -esime della funzione $f(z)$.

4. (10 punti)

Date le matrici A, B che nella base canonica hanno la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

determinare i numeri complessi a, b, c in modo che A, B siano hermitiane ed ammettano un set di autovettori comuni. Trovare autovalori di A, B e gli autovettori comuni. Calcolare la matrice $H = e^A$ sia nella base in cui è diagonale A che nella base canonica.

5. (10 punti)

Nello spazio $L^2(-\pi, \pi)$, calcolare i coefficienti c_n dello sviluppo in serie nella base $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ della funzione

$$F(x) = \sinh x$$

Inoltre si verifichi la relazione di completezza (Parseval) per i coefficienti c_n .

[Si tenga a mente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{\sinh \pi \cosh \pi - \pi}{\sinh^2 \pi}$ e le formule per le funzioni iperboliche: $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$, $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$]

6. (10 punti)

Data la funzione

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

a) Classificare le singolarità della funzione.

b) Calcolare l'integrale

$$\oint_C f(z) dz$$

dove C é una circonferenza di raggio $2\pi(n + \frac{1}{2})$ centrata nell'origine del piano di Gauss e n é un intero positivo.

b) Sviluppare $f(z)$ in serie di Taylor-Laurent a meno di termini $\mathcal{O}(z)$ intorno all'origine del piano di gauss, determinando, inoltre, il dominio di convergenza della serie.