

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21

Prova Scritta 21 Settembre 2021

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2020/21 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 2, 3, 5,6.

1. (10 punti)

Derivare le leggi di trasformazione di vettori ket, vettori bra e operatori (matrici) per cambiamenti di basi ortonormali di uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione finita. Si esegua la derivazione usando due diverse notazioni: 1) Dirac, 2) in componenti (usando gli indici).

2. (10 punti)

Si definisca la nozione di sistema completo (base) per uno spazio di Hilbert H di dimensione infinita discutendo le varie forme della relazione di completezza. Si dia poi un esempio di sistema completo ortonormale per lo spazio $L^2(0, 2\pi)$ e si dimostri l'ortonormalità.

3. (10 punti)

Si definisca il concetto di punto di diramazione per una funzione analitica $f(z)$ e si discutano i vari metodi per eliminare la ploidromia di $f(z)$. Si discutano i casi particolari delle funzioni

$$f_1(z) = (z^2 + 1)^{\frac{1}{n}}, \quad f_2(z) = \ln z$$

con n numero intero

4. (10 punti)

Data la matrice A con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

(a) determinare β, γ in modo che A sia ANTIhermitiana. Trovare autovalori ed autovettori normalizzati u_n di A , la matrice diagonalizzata A_D e la matrice unitaria U che effettua la diagonalizzazione.

5. (10 punti)

(1) Nello spazio $L^2(-\pi, \pi)$, sviluppare in serie COMPLESSA di Fourier la funzione

$$f(x) = -1 \quad \text{per} \quad -\pi < x < 0; \quad f(x) = 2 \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi$$

(2) Si specifichi il tipo di convergenza della serie di funzioni e si trovino i valori a cui converge la serie nei punti di discontinuità.

(3) Verificare il risultato al punto (2) calcolando esplicitamente la serie nei punti di discontinuità

(4) Si verifichi la relazione di completezza per i coefficienti.

[Si tenga a mente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$]

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}$$

- a) Classificare i punti di singolarità della funzione (punto all'infinito incluso) e determinarne i residui (punto all'infinito escluso).
- b) Determinare i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor-Laurent intorno al punto $z = \pi$ e determinare il dominio di convergenza della serie.
- c) Calcolare l'integrale sul piano complesso

$$I = \oint_{\gamma} dz f(z)$$

dove γ é una generica circonferenza centrata nell'origine del piano di Gauss con raggio diverso da $n\pi$ con n intero strettamente positivo.