

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21
Prova Scritta 19 Luglio 2021

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2020/21 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 2, 3, 5,6.

1. (10 punti)

Dati una matrice unitaria U , una generica matrice B ed un vettore $|u\rangle$ in uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione N :

- a) Si scrivano esplicitamente, usando la notazione indiciale, le leggi di trasformazione della matrice e del vettore per trasformazioni U .
- b) Indicati con B' ed $|u'\rangle$ il risultato della trasformazione, si verifichi sempre usando la notazione indiciale che $TrB = TrB'$ e che $\langle u|u\rangle = \langle u'|u'\rangle$
- c) Usando la notazione simbolica si calcoli B' nel caso in cui
 - c1) B è la matrice unità
 - c2) $B = \alpha U$ con α numero complesso

2. (10 punti)

Si definisca lo spazio delle funzioni al quadrato sommabili in $[-\pi, \pi]$: $L^2(-\pi, \pi)$ dando un esempio esplicito di una funzione $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$.

- a) Si dimostri che $L^2(-\pi, \pi)$ è uno spazio di Hilbert.
- b) Si chiarisca perché lo spazio $L^p(-\pi, \pi)$ con $p \neq 2$ NON è uno spazio di Hilbert.
- c) Si dia una base (sistema completo) ON di $L^2(-\pi, \pi)$ dimostrando esplicitamente l'ortonormalità della base scelta.

3. (10 punti)

- a) Si definisca una singolarità polare di ordine N in $z = z_0$ per una funzione analitica $f(z)$ ed il residuo di $f(z)$ in z_0 .
- b) Si dia un esempio esplicito di una funzione con un polo di ordine 3.
- c) Si dimostri la formula per il calcolo esplicito del residuo di $f(z)$ in z_0 nel caso di N generico e si usi tale formula per calcolare il residuo della funzione nel caso dell'esempio esplicito scelto.

4. (10 punti)

Date la matrici sullo spazio vettoriale complesso bidimensionale \mathbb{C}^3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

determinare i coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in modo tale che la matrice A

- (a) sia Hermitiana e risulti $\det A = -3$
- (b) si calcolino gli autovettori ed autovalori di A , si diagonalizzi la matrice e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione.

5. (10 punti)

Calcolare la trasformata di Fourier $g(\omega)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

si verifichi il risultato calcolando l'antitrasformata di $g(\omega)$.

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

- a) Classificare i punti di singolarità della funzione (punto all'infinito incluso) e determinarne i residui.
- b) Determinare i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor-Laurent intorno al punto $z = i\pi$ e determinare il dominio di convergenza della serie.
- c) Calcolare l'integrale

$$I = \oint_{\gamma} dz f(z)$$

dove la curva γ è una circonferenza di raggio 2π con centro nell'origine del piano di Gauss.