

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2020/21
Prova Scritta 8 Luglio 2021

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2020/21 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 2, 3, 5,6.

1. (12 punti)

Si consideri

$$s = \langle x|A|y\rangle$$

dove A e x, y sono rispettivamente un operatore e vettori in uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione N .

- a) Determinare condizioni sufficienti sull'operatore A in modo tale che s possa essere considerato una buona definizione di prodotto scalare $\langle x|y\rangle$ nello spazio vettoriale.
- b) Scrivere s in componenti (si usi cioè la notazione con gli indici).
- c) Si dimostri che s é invariante per trasformazioni unitarie.
- d) Si trovi l'espressione di s nella base $\{e_i\}$ costituita dagli autovettori di A .

2. (10 punti)

Si consideri l'equazione della corda vibrante di lunghezza L in una dimensione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

- a) Si risolva l'equazione usando il metodo di separazione delle variabili e si trovino i modi di vibrazione della corda (modi normali) usando condizioni al contorno di Dirichlet.
- b) Si scriva la generica configurazione della corda al tempo t , $u(x, t)$ come sovrapposizione dei modi normali.
- c) Conoscendo il profilo iniziale della corda al tempo $t = 0$: $u(x, t = 0) = \psi(x)$ determinare la configurazione della corda al generico tempo t .

3. (10 punti)

- a) Si definisca lo sviluppo di Taylor-Laurent di una funzione analitica $f(z)$ definita in un generico campo D non semplicemente connesso del piano di Gauss, nell'intorno di un generico punto z_0 (analitico o non analitico).
- b) Si derivi la forma dei coefficienti a_n dello sviluppo.
- c) Si definisca, rappresentando con un disegno il dominio D , la regione di convergenza della serie.

4. (10 punti)

Date le matrici sullo spazio vettoriale complesso bidimensionale \mathbb{C}^2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ c & b \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

- (a) determinare i coefficienti a, b, c in modo tale che A e B siano hermitiane ed ammettano un set di autovettori comuni
- (b) Si calcolino gli autovalori di A e B e gli autovettori u_1 e u_2 comuni delle due matrici, le si diagonalizzi e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione.
- (c) Si dimostri che i vettori u_1, u_2 costituiscono una base ortonormale dello spazio \mathbb{C}^2

5. (10 punti)

Nello spazio $L^2(-\pi, \pi)$, si trovino i coefficienti dello sviluppo nella serie di Fourier reale (seni e coseni) della funzione

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2} < x < \pi;$$

$$f(x) = -1 \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0;$$

$$f(x) = 1 \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

- a) Si scriva esplicitamente lo sviluppo in serie di $f(x)$.
- b) Si specifichi il tipo di convergenza della serie di funzioni e si trovino i valori a cui converge la serie nei punti di discontinuit .
- (c) Si verifichi la relazione di completezza per i coefficienti.

[Si tengano a mente le serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$]

6. (10 punti)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$$

- a) Classificare i punti di singolarit  della funzione (punto all'infinito incluso) e determinarne i residui.
- b) Determinare lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent intorno al punto $z = 0$ e determinare il dominio di convergenza della serie.
- c) Calcolare la parte principale dell'integrale sull'asse reale

$$I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$$