CINEMATICA DEL PUNTO

MECCANICA : DESCRIZIONE DEL MOTO DI PUNTO / INSIEME DI PUNTI E DELLE CAUSE CHE LO GENERANO.

- CINEMATICA ⇒ DESCRIZIONE DEL MOTO
- DINAMICA ⇒ CAUSE (FORZE)

- PUNTO MATERIALE (PARTICELLA)

  Corpo privo di dimensioni

  Dimensioni trascurabili rispetto allo spazio in cui si muove

  $d << D$

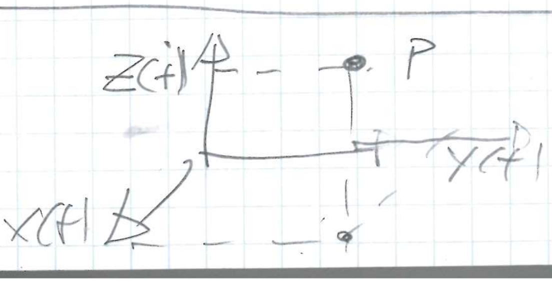
- PUNTO MATERIALE ⇒ TRASLAZIONI
- CORPI ESTESI ⇒ ROTAZIONI, VIBRAZIONI

- SISTEMA DI RIFERIMENTO

NON ESISTE IL MOTO ASSOLUTO

IL MOTO È SEMPRE RELATIVO

SISTEMA DI RIFERIMENTO RISPETTO A CUI IL MOTO È RIFERITO



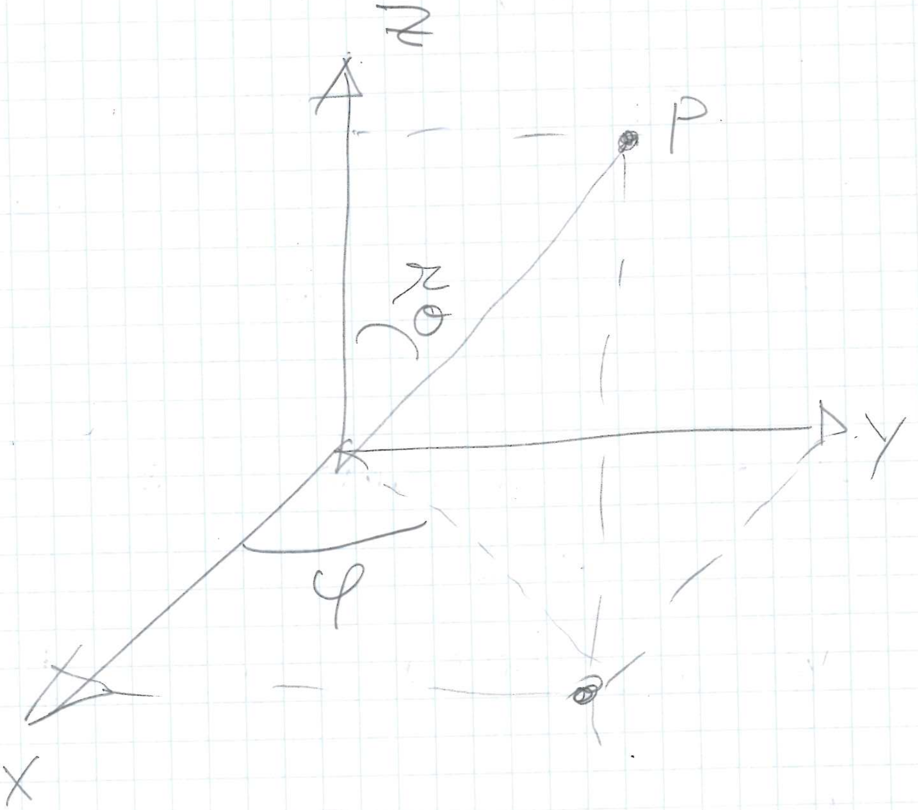
SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ PUNTI IN

$P \in \mathbb{R}^3$

ALTRI SISTEMI DI RIFERIMENTO

POLARE SFERICO



$$P(t) = (r(t), \varphi(t), \theta(t)).$$

TRAIETTORIA

Luogo geometrico formato dai punti occupati dal punto MATERIALE AL PASSARE DEL TEMPO.

ESEMPIO: RETTA
CIRCONFERENZA
ELISSE

LA CINEMATICA È GEOMETRIA

VARIABILI FISICHE ... NELLA CINEMATICA

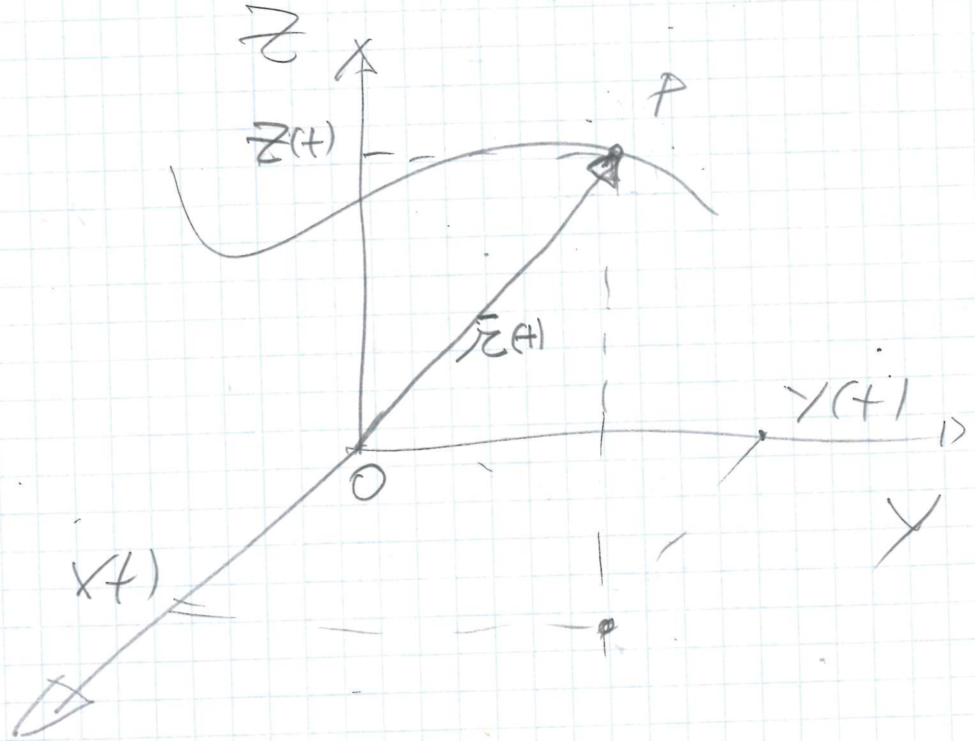
- TEMPO t (VARIABILE INDIPENDENTE
- POSIZIONE $\bar{P}(t)$
- VELOCITÀ $\bar{V}(t)$
- ACCELERAZIONE $a(t)$

- MOTO È RELATIVO: BISOGNA SEMPRE SPECIFICARE IL SR A CUI LO SI RIFERISCE

- $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ CONTINUE E DERIVABILI $\in C^2$

$\boxed{\text{VARIABILI CINEMATICHE}}$

TRAIETTORIA $\Rightarrow$ LINEA CURVA SU CUI SI SPOSTA P



DESCRITTA DA UN VETTORE $\bar{r}(t)$ CHE VARIA NEL TEMPO

POSIZIONE : DESCRITTA DAL RAGGIO VETTORE $\bar{r}(t)$

FISSATO SR CARTESIANO

$$\bar{r}(t) = OP = x(t)\,\bar{u}_x + y(t)\,\bar{u}_y + z(t)\,\bar{u}_z$$

$(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)$ VERSORI (BASE DI $\mathbb{R}^3$)

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO
EQUAZIONI DEL MOTO

MATEMATIC
EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA CURVA IN $\mathbb{R}^3$

GRADI DI LIBERTÀ : NUMERO DI FUNZIONI NECESSARIE PER DEF. P

$r(t) \in \mathbb{R}^N$ $\quad \boxed{N \leq 3}$

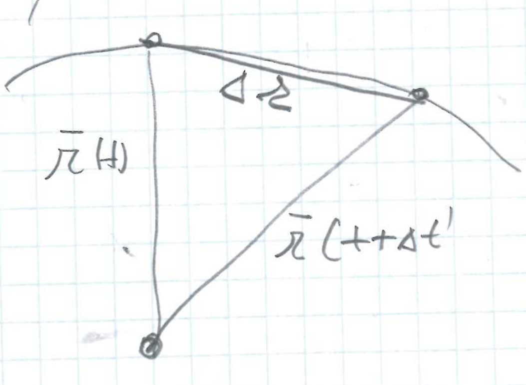
TRAIETTORIA
$\Downarrow$
ELIMINAZIONE PARAMETRI

VELOCITÀ

consideriamo due posizioni di P al tempo t e $t+\Delta t$ $\quad \Delta t$ = FINITO

$\bar{r}(t)$, $\bar{r}(t+\Delta t)$

$\Delta \bar{r}(t) = r(t+\Delta t) - r(t)$



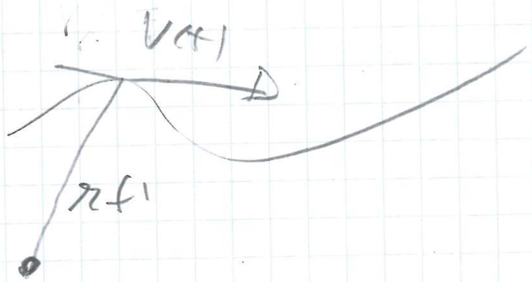
VELOCITÀ MEDIA $v_m = \frac{}{\Delta t}$

IL VETTORE $\bar{v}_m$ non da informazioni su quello che succede tra t e $t+\Delta t$

VELOCITÀ ISTANTANEA

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$ DERIVATA

GEOMETRICAMENTE: $\bar{v}$ È LA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA



$\bar{v}$ NON CAMBIA (È INVARIANTE) SE TRASLIAMO IL SR

- COMPONENTI CARTESIANE DI v

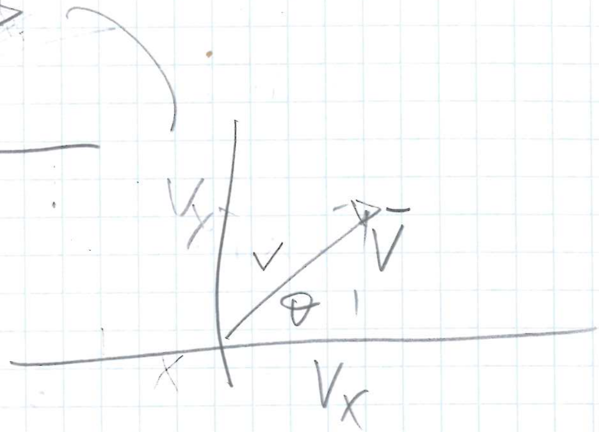
$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + \ldots$$

$$= \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z$$

$$= v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z$$

ESEMPIO 2D



$$\bar{V} = (V_x, V_y)$$

$$V_x = V \cos\theta$$

$$V_y = V \sin\theta$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

- EQUAZIONE ORARIA $\bar{r}(t) \Rightarrow \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$

POSSIAMO INVERTIRE:

EDO

$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow$ EQUAZIONE DIFFERENZ

$$V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt}$$

DA FISICI

$$d\bar{r} = \bar{V}\, dt$$

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{V}(t)\, dt$$

$r_0 \Rightarrow$ COSTANTE DI INT. DELLA ED

$r_0 = r(t_0)$

POSIZIONE INIZIALE

IN COMPONENTI

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x \, dt$$

$$y(t) = y_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y \, dt$$

$$z(t) = z_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z \, dt$$

VELOCITÀ MEDIA

$$\bar{v} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r} - \bar{r}_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \bar{v} \, dt$$

VALOR MEDIO DI UNA FUNZIONE

ACCELERAZIONE

SE $\bar{v}(t)$ VARIA NEL TEMPO $\Rightarrow$ MOTO ACCELER

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$ ACCELERAZIONE MEDIA

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$ ACCELERAZIONE ISTANTANEA

N.B.: costante in modulo e v

$\bar{a} = 0$ $\bar{v} = cost$ $\Rightarrow$ MOTO RETT UNIFORME

Componenti CARTESIANE

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{u}_z$$

$$= a_x \bar{u}_x + a_y u_y + a_z \bar{u}_z$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

GEOMETRICAMENTE LEGATA ALLA CURVATURA DI UNA CURVA

- PASSAGGIO INVERSO

$$d\bar{v} = \bar{a}\, dt$$

$$\bar{v} - \bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{a}\, dt$$

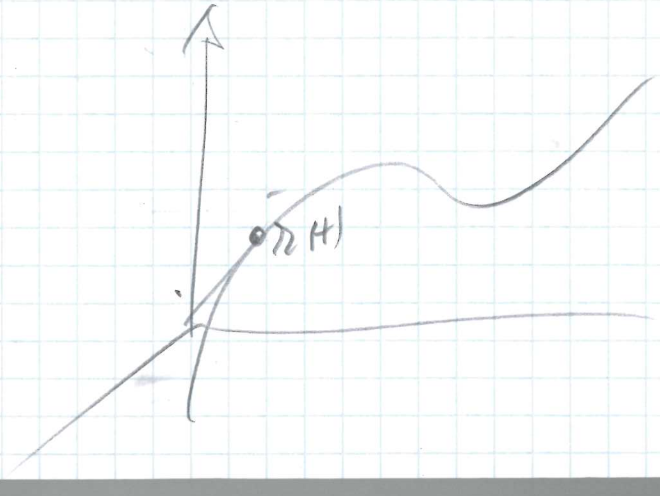
$\bar{v}_0$ → VELOCITÀ INIZIALE AL TEMPO t_0

- IN MODO SIMILE LE VARIE COMPONENTI

$$v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x\, dt$$

MOTI PROIETTATI

POSSIAMO CONSIDERARE un moto reale $\bar{r}(t)$ proiettato sull'asse X



$x = x(t)$ $\qquad v_x = \frac{dx}{dt}$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x \, dt$$

$$v_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x \, dt$$

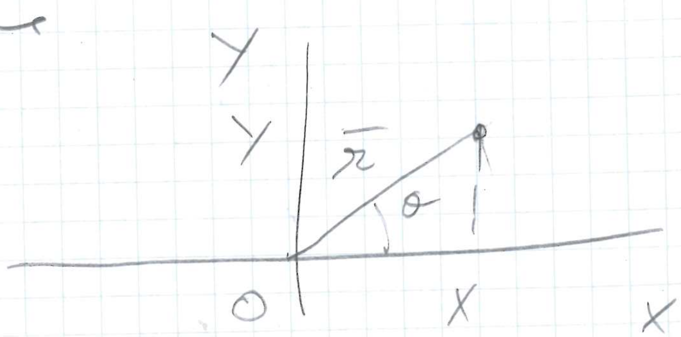
Come il moto del punto P proiettato sull'asse x

- composizione dei moti

  ⇒ ricostruzione del moto $\bar{r}(t)$ partendo dai moti sui tre assi

COORDINATE POLARI

Possiamo usare CP nel piano invece di quelle cartesiane



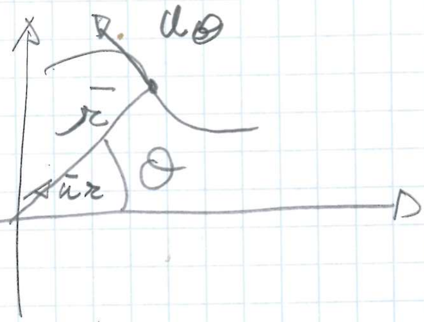
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$

COMPONENTI POLARI DELLA VELOCITÀ

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

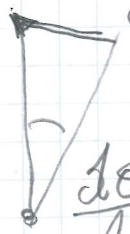


$$\bar{r} = r\,\bar{u}_r$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\bar{u}_r + r\,\frac{d\bar{u}_r}{dt}$$

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\bar{u}_\theta$$

$\bar{u}_\theta \perp \bar{u}_r$



Nel limite $d\theta \to 0$

$d\bar{u}_r = \overline{d\theta}$

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}\,\bar{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{u}_\theta$$

$\frac{d\theta}{dt} \to$ VELOC ANGOLAR

$$\bar{v} = \left(\frac{dr}{dt},\ r\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$\downarrow$ VELOCITÀ RADIALE

$\downarrow$ VELOCITÀ TRASVERSA

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

UNITÀ DI MISURA

NEL SI $[v] = [LT^{-1}]$

POSIZIONE m

VELOCITÀ $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{m}{s} = m s^{-1}$

accelerazione $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{m}{s^2} = m s^{-2}$ $[a] = [LT^{-2}]$

TRASFORMAZIONI

$1 \frac{km}{h} = 1 \frac{10^3 m}{3600 s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s} = 0,278 m s^{-1}$

$1 m s^{-1} = 3,6 km/h$

$\boxed{\text{MOTO RETTILINEO}}$ $\bar{r} \in \mathbb{R}^1$

MOTO UNIDIMENSIONALE (lungo una retta)

$\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}$ sempre tra loro parallele

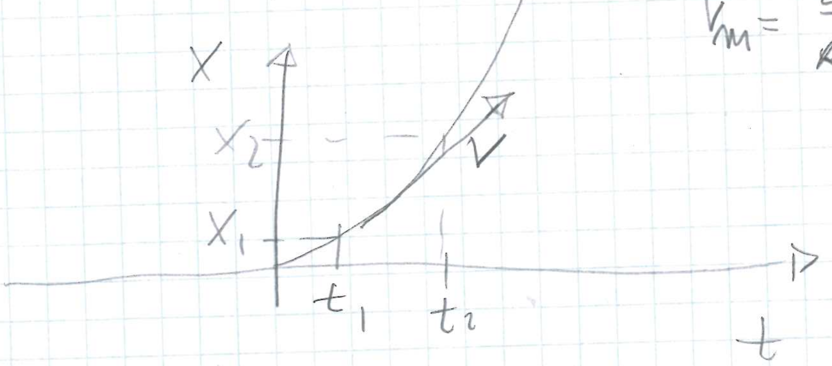
$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

x, v, a

LEGGE ORARIA

$x = x(t) \in \mathbb{R}^1$

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$



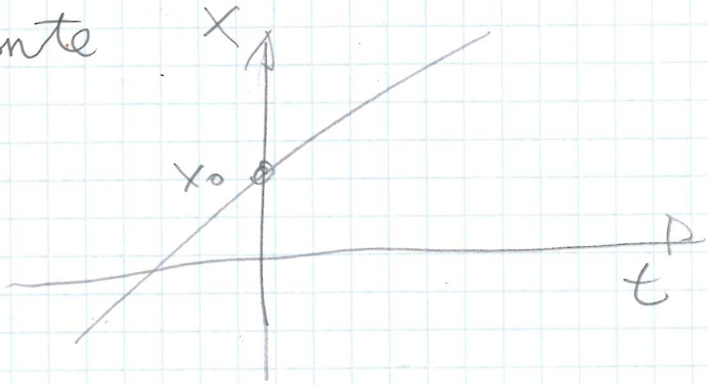
$v = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0} v\, dt$$

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$V =$ costante



LEGGE ORARIA RETTA

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt = X_0 + v\int_{t_0}^{t} dt$$

$$= X_0 + v(t - t_0) \quad \text{SE } t_0 = 0 .$$

$$\boxed{X = X_0 + vt}$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\boxed{a = \text{cost.}}$$

$t_0 = 0$

LEGGE ORARIA

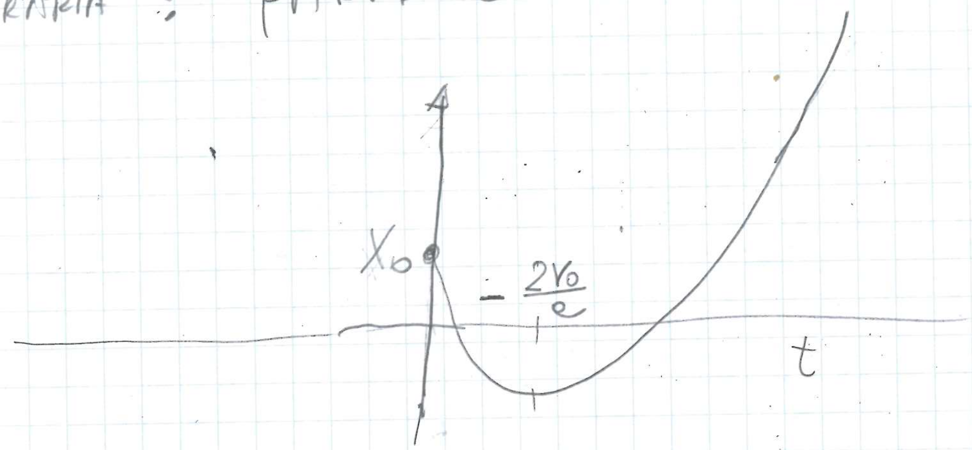
$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt = v_0 + a(t - t_0) = v_0 + at$$

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt = X_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\, dt$$

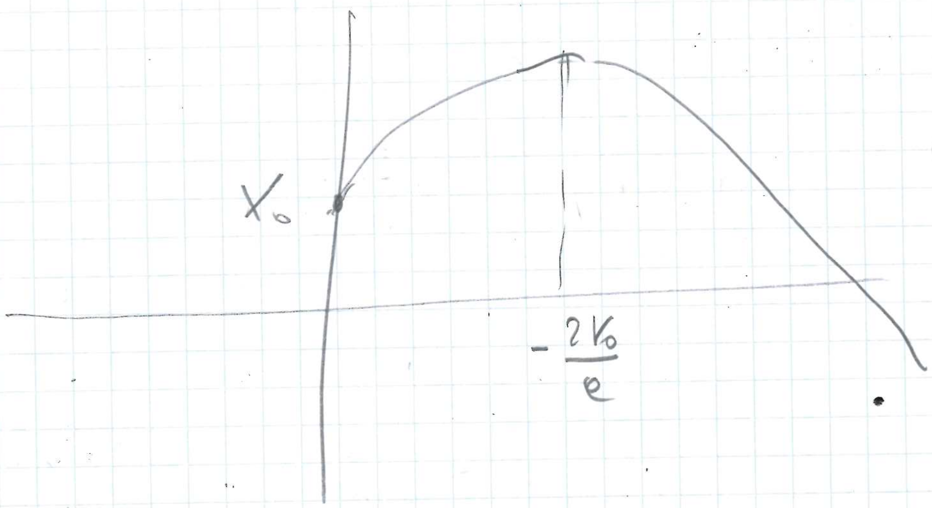
$$= X_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t$$

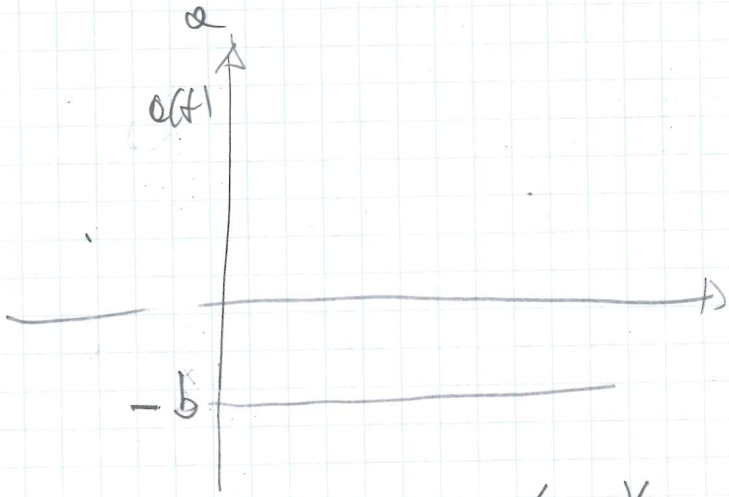
LEGGE ORARIA : PARABOLA



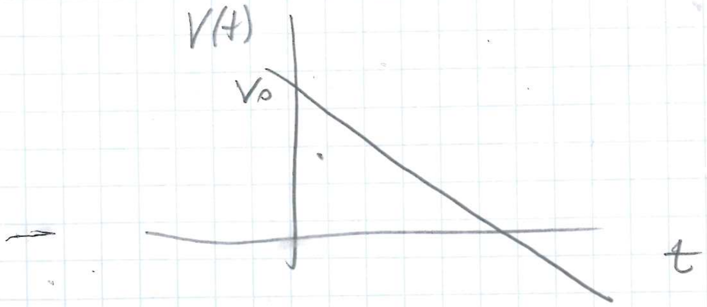
$a > 0$



$a < 0$



$$V = V_0 - bt$$



MOTO VARIO

Generico legge oraria

$$X = X(t)$$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

IN PROSSIMITÀ DELLA TERRA A CAUSA DELLA FORZA GRAVITAZIONALE UN CORPO DI MASSA M È soggetto ad accelerazione costante

$$g = 9.8 \ ms^{-2}$$

Lanciamo il corpo al tempo $t = 0$ con velocità iniziale v_0

$\downarrow g$

$$v(t) = v_0 - g t$$

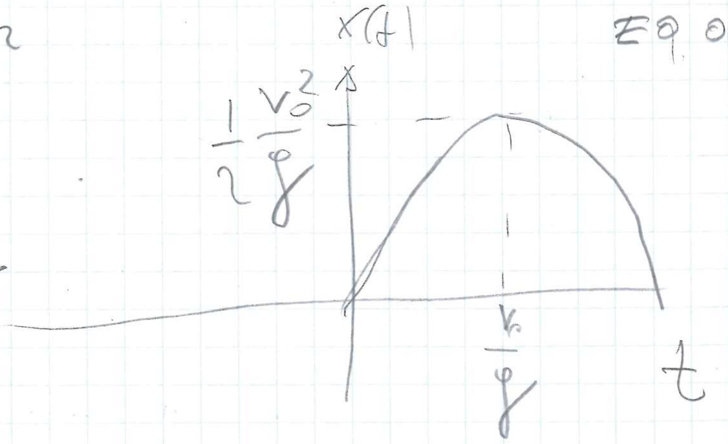
$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$\uparrow v_0$ $x_0 = 0, t = 0$

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = v_0 - g t$$

EQ ORARIA



si ferma quando

$$v(t) = 0$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

$$x\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$V(t) = -gt \qquad X(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$\Rightarrow$ tempo di caduta $\quad X(t) = 0$

$$\frac{1}{2} g t^2 = h \qquad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Velocità finale

$$V(t_c) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

$\boxed{\text{TAMPONAMENTO}}$

$V_1 > V_2$

senza decelle…

$d_1 = X_1 + V_1 t$

$d_2 = X_2 + V_2 t$

TAMPONAMENTO

$$t = \frac{X_2 - X_1}{V_1 - V_2}$$

a $t = 0$ $\quad P_1$ FRENA $\quad -a = \text{cost.}$

RELAZIONE PERCHÉ NON SI VERIFICHI TAMPONAMENTO

1. QUANTO TEMPO DEVE FRENARE?
2. DIST. PERCORSA DURANTE FRENATA

COND. LIMITE $\Rightarrow$ ANCHE $V_1 = V_2$

QUANDO $\quad X_1(t) = X_2(t)$

$$X_2(t) = X_2 + V_2 t \qquad X_1(t) = X_1 + V_1 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$X_1(t) = X_2(t) \Rightarrow (X_2 - X_1) = (V_1 - V_2)t - \frac{1}{2} \ldots$$

$$d = (V_1 - V_2)t - \frac{1}{2} a t^2$$

INOLTRE $\qquad V_1(t) = V_2(t)$

$$V_1 - at = V_2 \qquad V_1 - V_2 = at$$

$$t = \frac{V_1 - V_2}{a} \quad \text{tempo frenata} \qquad d = \frac{(V_1 - V_2)\ldots}{2a}$$

· MOLLA

È UN MOTO CHE SEGUE LA LEGGE ORARIA

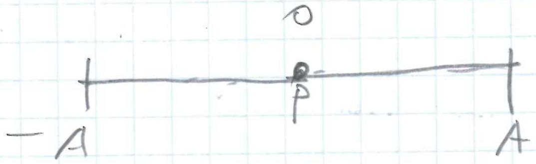
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$A \rightarrow$ Ampiezza

$\omega \Rightarrow$ FREQUENZA O PULSAZIONE

$\phi \Rightarrow$ FASE INIZIALE

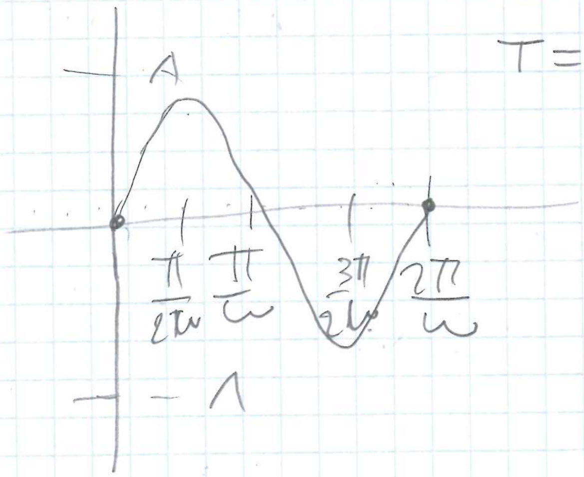
ESEMPIO DI MOTO VARIO



$\sin y \Rightarrow$ Funzione periodica $\phi = 0$

$$\omega t = \omega t' + 2\pi$$

$$T = t - t' = \frac{2\pi}{\omega}$$



T = PERIODO

ω = FREQUENZA

FREQUENZA Numero cicli al secondo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Periodo e frequenza non dipendono dalla ampiezza

Velocità

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

Accelerazione

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x$$

- si vede subito che un moto armonico soddisfa la EDO

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

detta EDO DELL' OSCILLATORE ARMONICO

Le costanti A, ϕ ci danno le condiz. iniziali della EDO

$x_0 = x(t=0) = A \sin\phi$ $\quad v_0 = v(t=0) = \omega A \cos$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\omega x_0}{v_0} \qquad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

UNITÀ DI MISURA

PULSAZIONE $\frac{RAD}{s}$

$A \to m$

$T \to s$

$\nu = Hz = \frac{1}{s}$ $\quad [\nu] = \frac{1}{T}$

FASE $\to$ RADIANTI

VELOCITÀ E ACCELERAZIONI COME FUNZIONI DELLA POSIZIONE

- In alcune situazioni fisiche è utile esprimere $\bar{v}$ e $\bar{a}$ NON come funzione di t ma del punto x

- Possiamo scrivere

$$v = v(t) = v[x(t)]$$
$$a = a(t) = a[x(t)]$$

Funzioni composte

Segue

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}v^2$$

$$\boxed{a = v\frac{dv}{dx}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(v^2)$$

Segue

$$a\,dx = v\,dv$$

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$\Rightarrow$ ciò rende possibile calcolare la differenza delle velocità $v^2 - v_0^2$ senza conoscere la legge oraria ma la funzione $a(x)$

ESEMPI

MOTO UNIF. ACCELERATO

$$a = \text{cost}$$

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

CADUTA DI UN CORPO

$$a = -g$$

$$v_0 = 0$$

$$v = \sqrt{2g(h - x)}$$

MOTO ARMONICO

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

COND. INIZ. $x_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

MOTO GENERICO

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

EQUAZ. PARAMETRICHE DI UNA CURVA

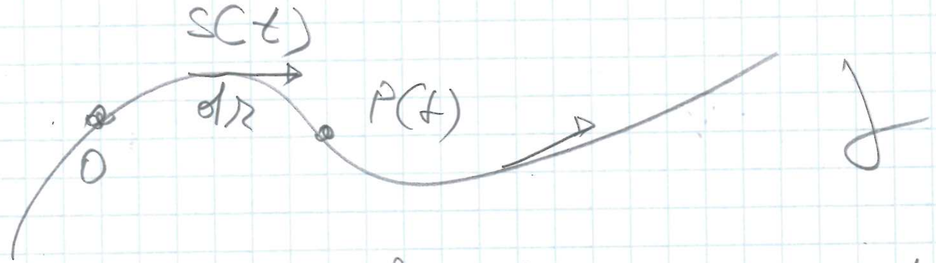
TRAIETTORIA SI OTTIENE ELIMINANDO IL PARAMETRO t

~~ES~~ ESEMPIO

MOTI SU TRAIETTORIE CURVE

2D e 3D $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$

- Nei moti 2D e 3D si scompone il moto nelle componenti x, y, z
- Se si conosce a priori la traiettoria si può considerare il moto come 1D usando l' **ASCISSA CURVILINEA**



$s(t) \Rightarrow$ lunghezza del tratto di curva $\widehat{OP}$

- ESPRIMIAMO $\bar{v}$ e $\bar{a}$ in forma di $s(t)$

$$d\bar{r} = ds\,\bar{u}_T$$

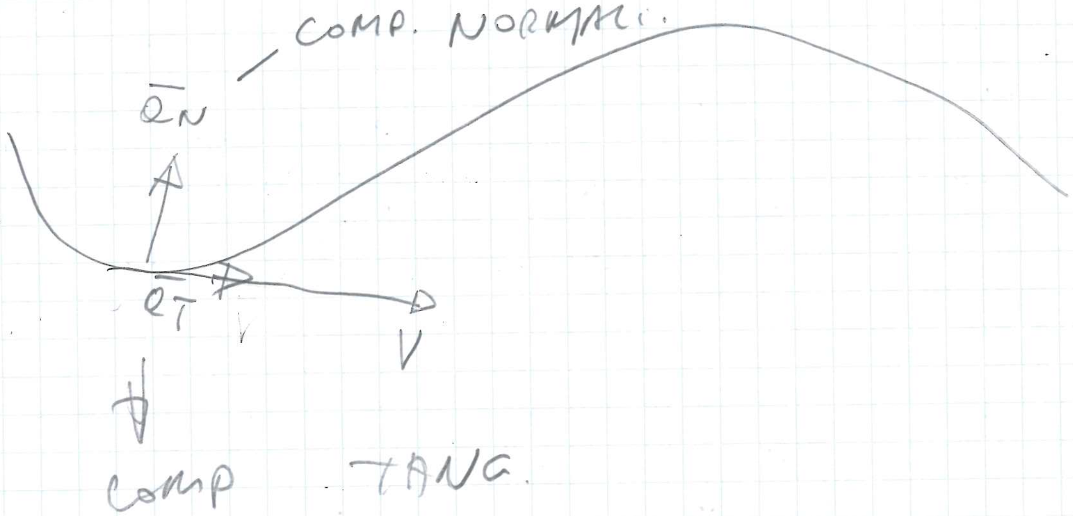
$\bar{u}_T$ VERSORE lungo la tangente alla curva

$$\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}\,\bar{u}_T = v\bar{u}_T}$$

$\frac{ds(t)}{dt} = |v|$

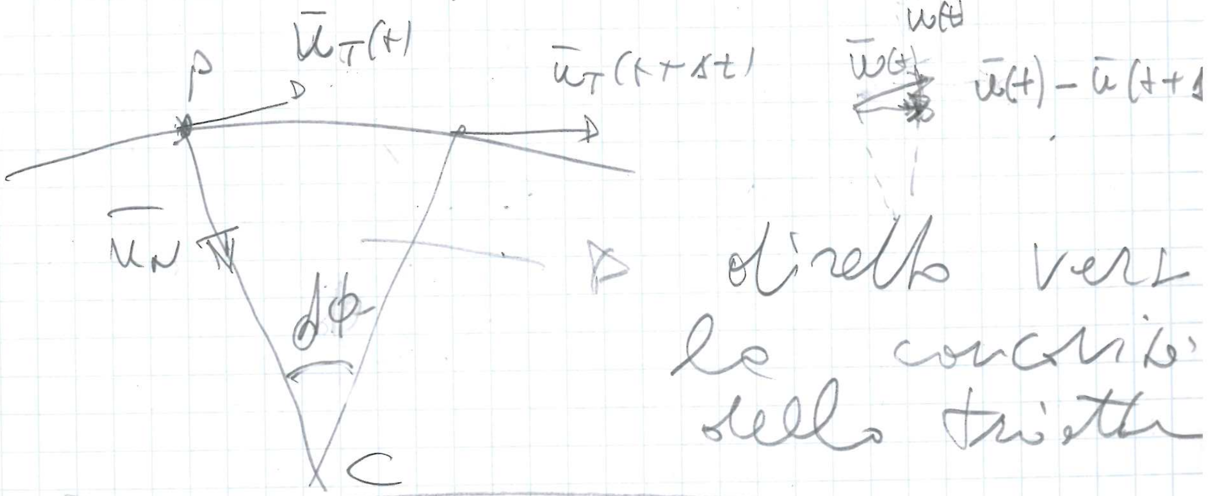
N.B. $\Rightarrow$ velocità È SEMPRE TANGENTE ALLA CURVA

ACCELERAZIONE ... SIA LA VARIAZIONE IN $\boxed{\text{MODULO}}$ CHE IN $\boxed{\text{DIREZIONE}}$ DELLA VELOCITÀ $\Longrightarrow$ DUE COMPONENTI



$$\bar{e} = \frac{d}{dt}(\bar{v}) = \frac{d}{dt}(v\bar{u}_T) = \frac{dv}{dt} u_T$$

$$+ v \frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\cdot\bar{u}_N$$



diretto verso la concavità della traiettoria

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{e} &= e_T\bar{u}_T + e_N\bar{u}_N \\ e_T &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ e_N &= v\frac{d\phi}{dt}\end{aligned}}$$

C è il centro di curvatura della traiettoria

$\overline{CP} \Rightarrow$ RAGGIO DI CURVATURA

$$ds = R\, d\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

$$\boxed{\bar{a} = \frac{dv}{dt}\,\bar{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\bar{u}_N}$$

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \text{ACC. tangen}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \text{ACC NORMA}$$

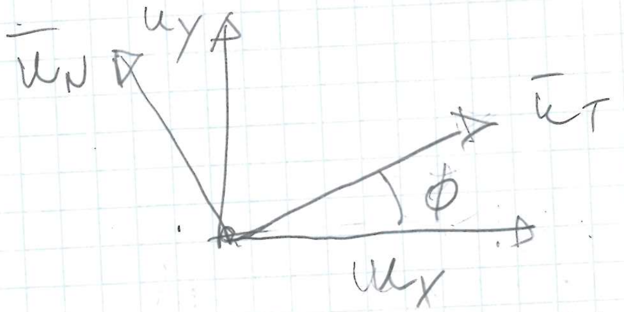
CENTRIPETA

$\Rightarrow$ MOTO CURVILINEO UNIFORM

$v = \text{cost} \Rightarrow a_T = 0$

MA $a_N \neq 0$

COMPONENTI CARTESIANE 2D



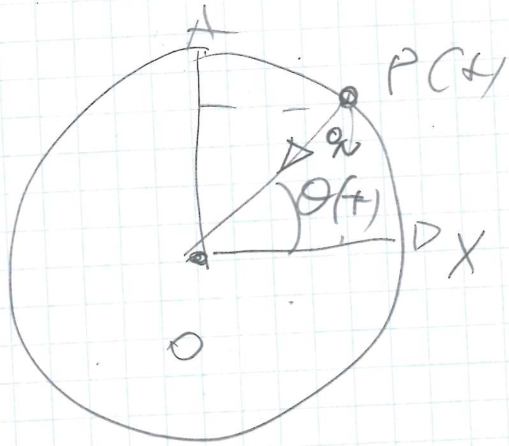
$a_X = a_T \cos\phi - a_N \sin\phi$

$a_Y = a_T \sin\phi + a_N \cos\phi$

MOTO CIRCOLARE

TRAIETTORIA $\Rightarrow$ CERCHIO

$a_N \neq 0$



$\rightarrow$ SE UNIFORME $a_T = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{a}_N$

$$\boxed{s(t) = \theta(t)\, R}$$

(MISURANDO ANGOLI IN RADIANTI

PROIETTANDO

$X(t) = R \cos\theta(t)$

$Y(t) = R \sin\theta(t)$

• VELOCITÀ ANGOLARE

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ MEDIA

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ ISTANTANEA

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$\Rightarrow$ MOTO UN. $\Rightarrow \omega = \text{cost}$

LEGGE ORARIA

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

$$a_N = a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

MOTO PERIODICO

$$T = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$ PERIODO

ACCELERAZIONE ANGOLARE

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

FORMULE INVERSE

da $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$

da

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$

MOTO UNIFORME $\alpha = 0$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t$

UNITÀ DI MISURA

$[\omega] = \frac{RAD}{s}$ $[\alpha] = \frac{Rad}{s^2}$.

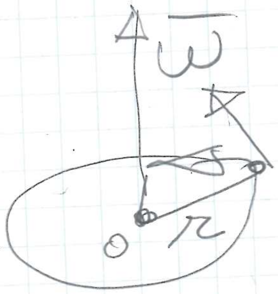
ANALOGIA MOTO RETTILINEO - MOTO CIRCOLARE

TD

NOTAZIONE VETTORIALE

PER FUTURE APPLICAZIONI È UTILE USARE NOTAZIONE VETTORIALE PER IL MOTO CIRCOLARE

VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE $\overline{\omega}$



REGOLA MANO DESTRA

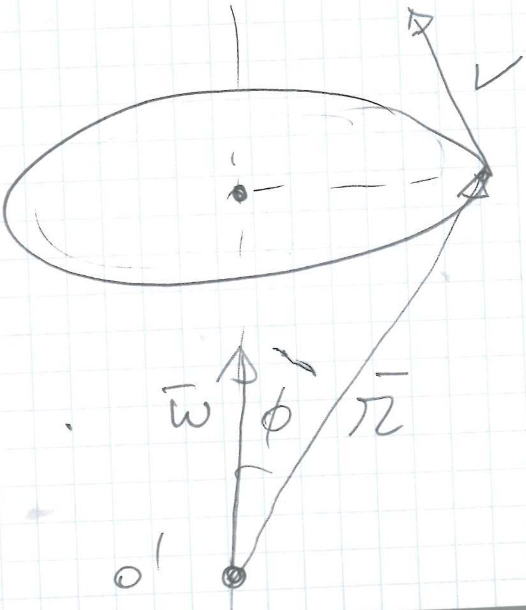
$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

$$v = \omega r \sin\theta = \omega r$$

$\overline{r} = \overline{R}$

RESTA VALIDA ANCHE SE O SI TROVA SU $\forall$ PUNTO ASSE ROTAZIONE



$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

$$v = \omega r \sin\phi = \omega R$$

SEGUE

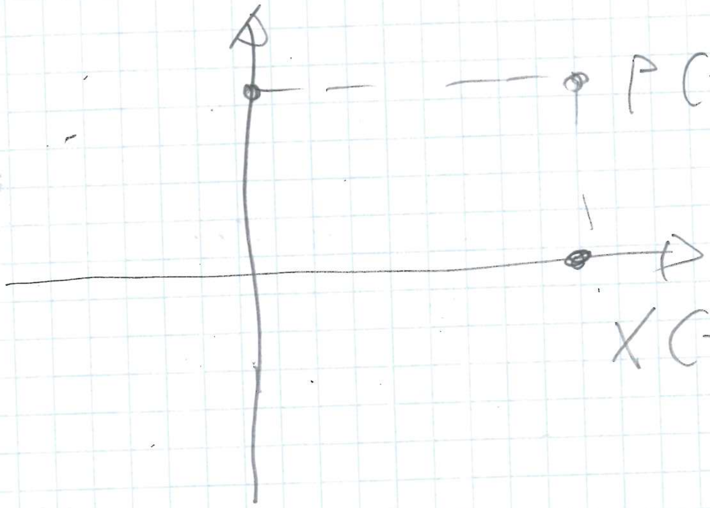
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$$

$$+ \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}$$

MOTO CIRCOLARE COME COMPOSIZIONE DI MOTI ARMONIC

$$Y(t) = B \sin(\omega t + \phi)$$

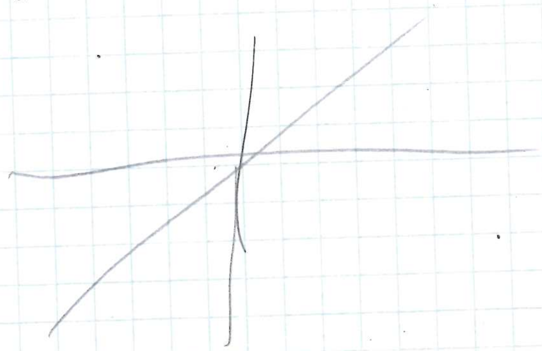
$$P(t) = (X(t), Y(t))$$



$$X(t) = A \sin \omega t$$

$$\phi = 0 \qquad \frac{X}{Y} = \frac{A}{B} \Rightarrow Y = \frac{A}{B} X$$

RETTILINEO UNIFORME



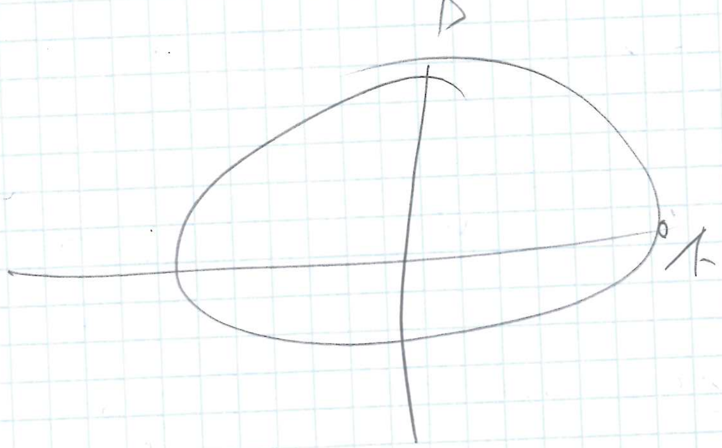
$\phi = \frac{\pi}{2}$

$x = A \sin \omega t$

$y = B \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$= B \cos \omega t$

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \Rightarrow$ ELLISSE

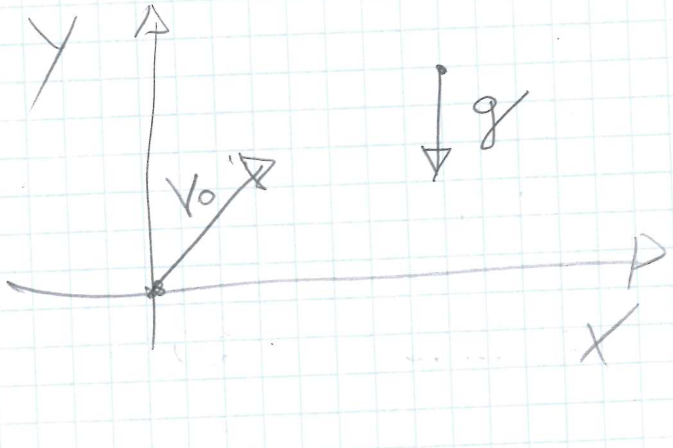


SE $A = B \Rightarrow$ CERCHIO

MOTO PARABOLICO

ESEMPI MOTI IN 2D

COMPOSIZIONE DI MOTO
- UN. ACC g
- RETT. UNIFO v_0



$\bar{a} = -g\,\bar{u}_y$

COND. IN. $\begin{cases} \bar{r} = 0 \\ \bar{v} = v_0 \end{cases}$ $\quad t = 0$

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \int_0^t \bar{a}(t)\,dt = \bar{v}_0 - g\,t\,\bar{u}_y$$

$$\bar{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\bar{u}_x + v_0 \sin\theta\,\bar{u}_y$$

$$\bar{v}(t) = v_0 \cos\theta\,\bar{u}_x + (v_0 \sin\theta - g t)\,\bar{u}_x$$

$\Downarrow$ MOTO UNIF ASSE X

$\Downarrow$ MOTO UN. A ASSE X

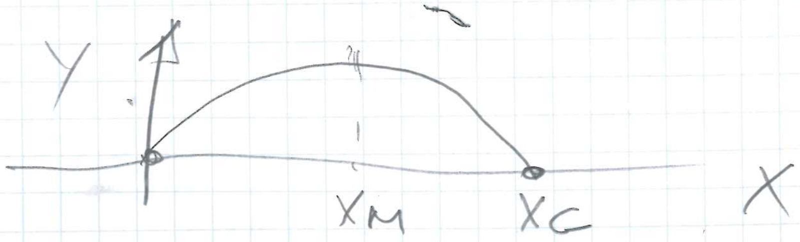
$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

TRAIETTORIA $\Rightarrow$ ELIMINIAMO t

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

$\boxed{\text{PARABOLA}}$ PASSANTE ORIGIN



$\boxed{\text{GITTATA}}$ OG

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$x_G = \frac{2V_0^2\cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{g}$$

SIMM
PARABO

$$= \frac{2V_0^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\theta}{g} = 2x_M$$

ALTEZZA MASSIMA

$$h = y(x_M) = y_M = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

$\boxed{\text{GITTATA MASSIMA}}$

$$\frac{dx_G}{d\theta} = 0 \quad \frac{2V_0^2}{g}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad (x_G)_M = \frac{V_0^2}{g}$$

TEMPO DI VOLO

$$t_G = \frac{2x_M}{V_x} = \frac{2x_M}{V_0\cos\theta} = \frac{2V_0\sin\theta}{g} = 2t$$

STESSO MODULO MA ANGOLO SIMM. $\theta \to -\theta$

$$V_x(t_G) = v_0 \cos\theta$$

$$V_y(t_G) = -v_0 \sin\theta$$

CONSIDERAZIONI FINALI SULLA CINEMATICA

1. CINEMATICA È GEOMETRIA

STUDIO DELLE CURVE E DELLE LORO PROPPRIETÀ (VEDI CORSI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE)

2. GRANDEZZE CINEMATICHE SONO VETTORI

$\Downarrow$

Le LEGGI FISICHE HANNO LA STESSA FORMA IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO

COVARIANZA

ESEMPI:

- EQUAZIONI ORARIE:

TROVARE VISIVAMENTE POSIZIONE, VELOCITÀ, ACCELERAZIONE

$\Downarrow$

CURVA, TANGENTE, CONCAVITÀ CURVATURA

- SVILUPPO INTUITO FISICO

- PROBLEMI