

UNIVERSITÀ DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Distribuzioni, trasformate di Fourier e spazi di Sobolev

Aldo Pratelli

A.A. 2009–2010

Indice

0	Introduzione	1
0.1	Spazi normati e spazi duali	1
0.2	Topologia debole e spazi riflessivi	2
0.3	Qualche funzione particolare	3
0.4	Disuguaglianza di Hölder	4
0.5	Completamento di spazi normati	5
0.6	Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni	5
1	Distribuzioni	7
1.1	Definizione di $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$	7
1.1.1	La topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$	7
1.2	Derivate e ordine di una distribuzione	10
1.3	Convoluzione	13
1.3.1	Convoluzione per funzioni	13
1.3.2	Distribuzioni a supporto compatto	18
1.3.3	Convoluzione per distribuzioni	19
1.4	Soluzioni fondamentali	23
2	Trasformata di Fourier	27
2.1	Definizioni	27
2.2	Prime proprietà	28
2.3	La formula di inversione	30
2.4	La trasformata di Fourier in L^1 e in L^2	32
2.5	La trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate	33
3	Definizione di Spazi di Sobolev	35
3.1	Lo spazio $W^{1,1}(I)$	35
3.2	Gli spazi $W^{1,p}(I)$ con $1 < p < \infty$	41
3.3	Lo spazio $W^{1,\infty}(I)$	43
3.4	Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$	46

4	Risultati preliminari sugli spazi di Sobolev	51
4.1	Teoremi di approssimazione	51
4.2	Operatori di estensione	55
4.3	Alcune utili proprietà	61
4.4	La dimostrazione del Lemma di Stampacchia	69
5	Le immersioni di Sobolev	73
5.1	Immersioni continue: il caso $p < n$	73
5.2	Immersioni continue: il caso $p \geq n$	79
5.3	Le immersioni per $k > 1$	84
5.4	Immersioni compatte	86
5.5	La disuguaglianza di Poincarè	90
6	Spazi di Sobolev frazionari e teoremi di traccia	96
6.1	Spazi di Sobolev con $k < 0$	96
6.2	Spazi frazionari	100
6.3	Teoremi di traccia	111

Capitolo 0

Introduzione

In questo capitolo introduttivo ricordiamo rapidamente alcuni concetti di base che useremo durante tutto il corso.

0.1 Spazi normati e spazi duali

Uno *spazio normato* è uno spazio vettoriale X dotato di una norma, ossia una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ che sia positivamente 1-omogenea, strettamente positiva su $X \setminus \{0\}$, e per cui valga la disuguaglianza triangolare

$$\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X ;$$

in questo corso considereremo sempre il caso di spazi vettoriali reali. Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo, mentre uno *spazio di Hilbert* è uno spazio vettoriale completo H dotato di prodotto scalare, ossia per il quale esista una funzione bilineare e simmetrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $\langle x, x \rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$. È facile verificare che uno spazio di Hilbert è in particolare uno spazio di Banach con la norma $\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$; ovviamente gli spazi di Banach e di Hilbert saranno sempre considerati con la topologia data dalla metrica $d(x, y) = \|y - x\|$.

Dato uno spazio di Banach X , il suo *spazio duale* è definito come l'insieme X' delle funzioni lineari e continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$; anche X' è uno spazio di Banach con la norma

$$\|\varphi\|_{X'} := \sup_{X \setminus \{0\}} \frac{|\langle \varphi, x \rangle|}{\|x\|_X} ;$$

come appena fatto, utilizzeremo molto spesso la notazione $\langle \varphi, x \rangle$ piuttosto che $\varphi(x)$, perché esprime meglio l'idea di dualità e perché riduce il numero di parentesi quando X sia uno spazio di funzioni. . .

Osserviamo che, data una funzione lineare e continua $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi di Banach, è definita in modo naturale una corrispondente funzione $f^* : Y' \rightarrow X'$ come

$$\langle f^*(\varphi), x \rangle_{X' \leftrightarrow X} := \langle \varphi, f(x) \rangle_{Y' \leftrightarrow Y} ;$$

in particolare, nel caso in cui ci sia un'inclusione densa $X \subseteq Y$, abbiamo una naturale inclusione $Y' \subseteq X'$ definita come sopra. Infatti, se $X \subseteq Y$ e $\varphi \in Y'$ allora si può definire $\varphi(y)$ per ogni $y \in Y$, e dunque in particolare per ogni $x \in X \subseteq Y$; inoltre, questa applicazione da Y' ad X' è un'inclusione se X è denso in Y , visto che in questo caso una funzione continua $\varphi \in Y'$ che si annulla su tutto X deve essere nulla sull'intero Y e dunque $\varphi \equiv 0 \in Y'$. Ovviamente l'ipotesi di densità è essenziale, se ad esempio consideriamo $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, l'applicazione duale da \mathbb{R}^2 ad \mathbb{R} è la proiezione, che non include \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} !

L'osservazione appena fatta è particolarmente utile, in quanto ci ricorda che –in parole povere– più uno spazio è piccolo, più il suo spazio duale è grande.

Si osservi anche che dotando uno stesso spazio X di due diverse norme, corrispondenti ad una topologia più fine e ad una meno fine, lo spazio duale relativo alla topologia più fine sarà più grande: in pratica, avendo a disposizione più aperti è più facile definire funzionali continui. . .

Ricordiamo, una volta per tutte, che lavorando su spazi metrici la continuità è equivalente alla continuità sequenziale.

0.2 Topologia debole e spazi riflessivi

Dato uno spazio di Banach X possiamo considerare su di esso la *topologia debole*, corrispondente al seguente concetto di convergenza: $x_n \rightharpoonup x$ se per ogni $\varphi \in X'$ si ha

$$\langle \varphi, x_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle.$$

Si può facilmente verificare che questa nozione di convergenza definisca una topologia su X , che viene chiamata debole perché è ovviamente più debole della topologia originale: infatti, se $x_n \rightarrow x$ è ovvio che $\langle \varphi, x_n \rangle$ tenda a $\langle \varphi, x \rangle$ per ogni $\varphi \in X'$!

In modo del tutto analogo, sullo spazio duale X' possiamo considerare la *topologia debole**, corrispondente alla convergenza

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi \iff \forall x \in X, \langle \varphi_n, x \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle.$$

Si noti ora che c'è un'ovvia inclusione $i : X \rightarrow X''$, data da

$$\langle i(x), \varphi \rangle := \langle \varphi, x \rangle$$

per ogni $\varphi \in X'$; nell'equazione appena scritta, la prima dualità è quella tra X'' e X' , e la seconda è quella tra X' ed X . Il fatto che i sia un'inclusione è banale: se infatti $i(x) = i(y)$, si deve avere $\langle \varphi, y - x \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in X'$, e questo assicura subito che $y - x = 0$ grazie al Teorema di Hahn-Banach.

Su X' si possono considerare dunque due topologie di tipo debole, e cioè la topologia debole relativa alla dualità con X'' , e la topologia debole* relativa alla dualità con X . L'inclusione $X \subseteq X''$ assicura immediatamente che

$$\varphi_n \xrightarrow{X'} \varphi \implies \varphi_n \xrightarrow{X'}^* \varphi,$$

e dunque che su uno spazio duale la topologia debole è più fine della debole*.

Ricordiamo infine che gli spazi X per cui $X \approx X''$ sono detti spazi riflessivi, che gli spazi di Hilbert sono sempre riflessivi per il Teorema di Riesz, e infine i seguenti risultati fondamentali.

Teorema 0.1 (Banach–Alaoglu–Bourbaki). *Gli insiemi limitati in X' sono relativamente compatti per la topologia debole*.*

Teorema 0.2. *Dato lo spazio di Banach X , valgono le seguenti proprietà.*

- (i) X è riflessivo se e solo se la palla unitaria è compatta per la topologia debole.
- (ii) X è riflessivo se e solo se X' è riflessivo.
- (iii) Se X' è separabile allora X è separabile.
- (iv) X è riflessivo e separabile se e solo se X' è riflessivo e separabile.
- (v) X è separabile se e solo se gli insiemi limitati di X' sono metrizzabili per la topologia debole*.

Un caso particolare di spazio duale sono le misure di Radon su Ω , $\mathcal{M}^+(\Omega)$, che possiamo identificare con gli elementi positivi del duale delle funzioni continue e limitate su Ω dotate della norma del sup; in realtà la definizione corretta di misure, ossia i funzionali numerabilmente additivi sui Boreliani, identifica un sottoinsieme fortemente chiuso di $(C_b(\Omega))'_+$, ma in molti casi viene comodo chiamare “misure” tutti gli elementi di $(C_b(\Omega))'_+$. Per un’introduzione dettagliata ma semplice riguardo a topologie deboli su spazi duali si può vedere [1].

0.3 Qualche funzione particolare

Concludiamo questa rapida introduzione ricordando alcune funzioni particolari; prima di tutto, ricordiamo che il *supporto* di una funzione è la *chiusura* dell’insieme dove la funzione assume un valore diverso da 0; analogamente, il supporto della misura $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ è il più piccolo insieme chiuso K tale che $\mu({}^c K) = 0$.

Esempio 0.3. *I mollificatori.* Sono delle funzioni $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \text{spt}(\rho_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon). \quad (0.1)$$

Il fatto che esistano è abbastanza semplice: ricordiamo che la funzione

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (0.2)$$

è una funzione C^∞ su \mathbb{R} che si annulla con tutte le derivate in \mathbb{R}^- ; allora la funzione

$$\varphi_2(x) := \varphi_1(1+x) \varphi_1(1-x)$$

è una funzione C^∞ a supporto in $[-1, 1]$; infine, possiamo definire

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{\varphi_2\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)}{\left\| \varphi_2\left(\frac{|\cdot|}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1}}$$

e abbiamo trovato un esempio dei mollificatori. Come appena fatto, sarà molto comodo usare il “ \cdot ” per indicare una funzione nella variabile \cdot che scriviamo esplicitamente; ad esempio, scrivendo $\sin^2(\cdot) - e^{ky}$ indicheremo la funzione $x \mapsto \sin^2(x) - e^{ky}$ in maniera concisa. Osserviamo che l’unica cosa che ci interessa – e che usiamo! – dei mollificatori è che valga la proprietà (0.1), non quale sia la definizione esplicita.

Esempio 0.4. *Le funzioni cut-off.* Dati un chiuso K ed un aperto Ω con $K \subset\subset \Omega$ in uno spazio ambiente X , una funzione cut-off è una funzione continua $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ che valga identicamente 1 su K ed identicamente 0 su $X \setminus \Omega$. Il fatto che esistano funzioni cut-off anche è molto semplice da osservare: chiamando φ_1 la funzione definita da (0.2), si osserva immediatamente che

$$\tau_0(x) := \varphi_1(1 - e\varphi_1(x - 1))$$

è una funzione C^∞ che vale identicamente $1/e$ per $x \leq 1$, e identicamente 0 per $x \geq 2$; allora la funzione

$$\tau(x) := e\left(\tau_0(x) + \tau_0(-x) - \frac{1}{e}\right)$$

è una funzione cut-off per B_1 e B_2 su \mathbb{R} . Componendo allora τ con la funzioni distanza dal complementare di Ω nel modo ovvio, dato che per ipotesi la distanza tra K e ${}^c\Omega$ è strettamente positiva, troviamo funzioni cut-off continue. Se lo spazio ambiente è \mathbb{R}^n , inoltre, è anche possibile ottenere funzioni cut-off di classe C^∞ : si osservi che la funzione che abbiamo costruito non ha questa proprietà visto che anche se Ω è un aperto regolare la funzione distanza da Ω non è meglio che Lipschitziana. Per ottenere funzioni cut-off regolari, allora, basta prendere una funzione cut-off tra un chiuso \tilde{K} ed un aperto $\tilde{\Omega}$ con $K \subset\subset \tilde{K} \subset\subset \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, ed operare poi una convoluzione con un mollificatore standard (che, come ben noto e come del resto vedremo in seguito in queste dispense, ha un effetto regolarizzante).

0.4 Disuguaglianza di Hölder

Ricordiamo che vale il seguente risultato.

Teorema 0.5 (Disuguaglianza di Hölder). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Allora $fg \in L^1(\Omega)$ ed inoltre*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Più in generale, se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ ed $1/p + 1/q = 1/r \leq 1$, si ha

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Infine, date f_1, f_2, \dots, f_h che appartengano rispettivamente ad $L^{p_1}(\Omega), \dots, L^{p_h}(\Omega)$, se $1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_h = 1/r \leq 1$, si ha

$$\|f_1 f_2 \cdots f_h\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_h\|_{L^{p_h}(\Omega)}.$$

0.5 Completamento di spazi normati

Sia X uno spazio vettoriale reale, e $\|\cdot\|$ una norma su X . Si può allora definire uno spazio normato completo \overline{X} come segue: l'insieme \overline{X} è l'insieme di tutte le successioni di Cauchy fatte con elementi di X , con la relazione di equivalenza che dice che $\{x_h\} \sim \{y_h\}$ se $\|x_h - y_h\| \rightarrow 0$. E' immediato osservare che per ogni elemento $\{x_h\}$ di \overline{X} si ha che $\|x_h\|$ tende ad un limite finito: definito questo limite come $\|\{x_h\}\|_{\overline{X}}$, si vede facilmente che $\|\cdot\|_{\overline{X}}$ è una norma su \overline{X} . Si ha anche una semplice inclusione $X \hookrightarrow \overline{X}$, che associa ad ogni $x \in X$ la successione costante $\{x_h = x\}$ in \overline{X} , ed è chiaro che la norma di x in X coincide con la norma di $\{x_h = x\}$ in \overline{X} . Dunque lo spazio normato X è un sottospazio dello spazio normato \overline{X} . Non è particolarmente difficile osservare infine che \overline{X} è uno spazio normato completo; in particolare, ogni spazio normato completo che estenda X deve contenere \overline{X} , ed inoltre $X \equiv \overline{X}$ se e solo se X è completo.

0.6 Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni

Vediamo qui un risultato teorico molto semplice da mostrare ma estremamente potente per le sue applicazioni; in effetti più che un teorema è un'osservazione su uno schema tecnico che si può usare per trovare minimi di funzionali in opportune ipotesi. Infatti, è comunemente conosciuto come *Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni*.

Teorema 0.6 (Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni). *Sia dato uno spazio topologico (X, τ) ed un funzionale $J : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. rispetto a τ e con i sottolivelli sequenzialmente relativamente compatti (cioè, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ogni successione contenuta nell'insieme $\{x \in X : J(x) \leq \alpha\}$ ammette una sottosuccessione convergente). Allora J ammette un punto di minimo.*

Proof. Se $J \equiv +\infty$ non c'è nulla da mostrare; altrimenti, sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione minimizzante J , ossia $J(x_1) < +\infty$ e $J(x_n) \searrow \inf_X J$. Visto che la successione $\{x_n\}$ è tutta contenuta in $\{x \in X : J(x) \leq J(x_1)\}$, per la relativa sequenziale compattezza esiste un punto $x \in X$ tale che, a meno di sottosuccessioni, $x_n \xrightarrow{\tau} x$. Infine, per semicontinuità di J abbiamo

$$J(x) \leq \liminf J(x_n),$$

e visto che la successione minimizzava J deduciamo che $J(x) = \inf_X J$ e dunque x è un punto di minimo. \square

Si osservi come questo risultato è molto generale ma ha ipotesi abbastanza difficili da verificare; o meglio, è abbastanza difficile per un funzionale verificare contemporaneamente entrambe le ipotesi. Si ha infatti la grande libertà di scegliere una qualsiasi topologia sullo spazio X ; si ricordi però che più una topologia è forte più è difficile che le successioni convergano. Di conseguenza, una topologia forte rende più facile che il funzionale sia semicontinuo inferiore, perché ci sono poche successioni su cui verificare la disuguaglianza di \liminf , ma rende più difficile la

sequenziale compattezza degli insiemi, appunto perché le successioni convergenti sono poche. Analogamente, una topologia debole favorisce la relativa sequenziale compattezza ma ostacola la semicontinuità. Si potrà applicare dunque questo metodo solo quando si riesce a trovare una topologia che bilanci i due effetti garantendo contemporaneamente entrambe le condizioni. Di solito, si usano i seguenti casi particolari del risultato appena mostrato.

Corollario 0.7. *Sia X è uno spazio normato e sia τ una topologia su X , non necessariamente quella data dalla norma, con la proprietà che le palle (secondo la norma) sono relativamente sequenzialmente compatte (secondo la topologia τ). Possiamo dire che esiste un minimo ad un funzionale $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando J è semi-continuo inferiore (rispetto a τ) e coercivo (cioè $J(x) \rightarrow +\infty$ se $\|x\| \rightarrow \infty$).*

Proof. Possiamo applicare direttamente il Metodo Diretto: la semicontinuità inferiore di J è vera per ipotesi; d'altra parte per coercività ogni sottolivello di J è contenuto in una palla sufficientemente grande, e dunque è sequenzialmente relativamente compatto per ipotesi. \square

Corollario 0.8. *Sia X' il duale di uno spazio di Banach separabile; allora ammette minimo ogni funzionale $J : X' \rightarrow \mathbb{R}$ debolmente* semicontinuo inferiore e coercivo.*

Proof. Applicheremo il Corollario 0.7 usando la topologia debole*. Visto che J è per ipotesi debolmente* semi-continuo inferiore ed è coercivo, dobbiamo solo verificare che le palle siano relativamente sequenzialmente compatte in topologia debole*. Il Teorema di Banach–Alaoglu–Bourbaki 0.1 assicura che gli insiemi limitati, quindi in particolare le palle, sono relativamente compatti in topologia debole*; d'altra parte, visto che X è separabile, le palle sono debolmente* metrizzabili grazie al Teorema 0.2, e quindi sulle palle la compattezza e la compattezza sequenziale coincidono, e allora le palle sono relativamente sequenzialmente compatte debole*. \square

Quasi sempre si utilizza questo ultimo corollario, piuttosto che sforzarsi di intuire una topologia particolare. Si noti che non si potrà mai sperare di far funzionare il Metodo Diretto usando la topologia forte su uno spazio di Banach: infatti la palla unitaria in uno spazio di Banach non è mai compatta in topologia forte, a meno che lo spazio non sia finito-dimensionale.

Capitolo 1

Distribuzioni

In questo capitolo ci occupiamo dei concetti basilari teoria delle distribuzioni, un importante strumento dell'Analisi sostanzialmente introdotto, in maniera formale, da L. Schwartz.

1.1 Definizione di $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$

Cominciamo subito a fissare alcune notazioni basilari.

Definizione 1.1. Dato un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale formato dalle funzioni C^∞ da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} aventi un supporto compatto e contenuto in Ω .

Prima di tutto vogliamo dotare $\mathcal{D}(\Omega)$ di una struttura topologica, che ci servirà principalmente per poter passare ai limiti. Daremo quindi la seguente nozione.

Definizione 1.2. Si dice che la successione $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (brevemente, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$) se e solo se esiste $K \subseteq \Omega$ compatto tale che i supporti di tutte le funzioni φ_k sono contenuti in K , e le funzioni φ_k e le loro derivate di qualsiasi ordine tendono uniformemente a φ e alle sue derivate.

Ovviamente un concetto di convergenza non è significativo se non è indotto da qualche topologia, quindi dobbiamo verificare che effettivamente esista una topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$ che induca la nozione di convergenza appena presentata; lo vediamo in una breve parentesi apposita.

1.1.1 La topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$

Prima di tutto scegliamo un'eshaustione di compatti K_m per Ω ; ossia,

$$K_m \subseteq K_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m.$$

Dotiamo ora lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ delle (semi-)norme $\|\cdot\|_{m,k}$, le norme del sup di tutte le derivate in $K_{m+1} \setminus K_m$ fino all'ordine k , cioè

$$\|\varphi\|_{m,k} := \max \left\{ |D^\alpha \varphi(x)| : |\alpha| \leq k, x \in K_{m+1} \setminus K_m \right\}.$$

Finalmente, diamo una base della topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$ come segue: presa una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, una successione di interi $\mathbb{N} \ni m \mapsto k(m) \in \mathbb{N}$, ed una successione reale positiva $\mathbb{N} \ni m \mapsto \lambda(m) \in \mathbb{R}^+$, definiamo l'aperto

$$\mathcal{D}_{\varphi, k, \lambda} := \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \forall m \in \mathbb{N}, \|\psi - \varphi\|_{m, k(m)} < \lambda(m) \right\};$$

la base è data dall'insieme dei $\mathcal{D}_{\varphi, k, \lambda}$ al variare della funzione φ e delle successioni $k(m)$ e $\lambda(m)$.

Che questa sia la base di una topologia è chiaro, in quanto si osserva molto facilmente che le intersezioni finite di elementi del tipo $\mathcal{D}_{\varphi, k, \lambda}$ sono unioni di oggetti dello stesso tipo; dobbiamo allora solo verificare che la nozione di convergenza indotta da questa topologia sia proprio quella introdotta dalla Definizione 1.2.

Prima di tutto, osserviamo che se $\varphi_j \rightarrow \varphi$ secondo la topologia appena introdotta, allora deve esistere un compatto K_m che contenga i supporti di tutte le funzioni φ_j : infatti, se non fosse così, l'insieme $\mathbb{N}' = \{m \in \mathbb{N} : \exists j(m), \|\varphi_{j(m)} - \varphi\|_{m, 0} > 0\}$ sarebbe infinito; definendo allora $\lambda(m) = 1$ per $m \notin \mathbb{N}'$, e

$$\lambda(m) := \frac{\|\varphi_{j(m)} - \varphi\|_{m, 0}}{2}$$

per $m \in \mathbb{N}'$, si avrebbe per definizione che $\varphi_{j(m)} \notin \mathcal{D}_{\varphi, 0, \lambda}$ per ogni $m \in \mathbb{N}'$. D'altra parte, visto che ogni φ_j sta in $\mathcal{D}(\Omega)$ e quindi ha supporto compatto in Ω , la successione $\mathbb{N}' \ni m \mapsto j(m) \in \mathbb{N}$ è divergente, e quindi si hanno infiniti indici j per cui φ_j non appartiene all'intorno $\mathcal{D}_{\varphi, 0, \lambda}$ di φ , il che è contro all'ipotesi che φ_j converga a φ secondo la nuova topologia.

Allora, date una successione $\{\varphi_j\}$ ed una φ in $\mathcal{D}(\Omega)$, il fatto che tutte le funzioni siano supportate in un unico compatto K_m è una condizione necessaria per la convergenza di φ_j a φ sia secondo la nuova topologia che secondo la Definizione 1.2; a questo punto, per concludere è sufficiente osservare che tra le funzioni supportate in K_m la nuova topologia è generata semplicemente dalle palle secondo le norme $\|\cdot\|_{m, k}$ al variare di k , e quindi la nuova convergenza coincide effettivamente con la convergenza uniforme di tutte le derivate di qualsiasi ordine e dunque coincide con la convergenza introdotta nella Definizione 1.2.

Chiusa la parentesi, possiamo adesso definire lo spazio delle distribuzioni come segue.

Definizione 1.3. Si definisce spazio delle distribuzioni il duale $\mathcal{D}'(\Omega)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$, ossia l'insieme di tutti i funzionali lineari e continui da $\mathcal{D}(\Omega)$ a \mathbb{R} .

Si noti che lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ che stiamo considerando è molto piccolo e con una topologia molto fine; per quanto osservato nell'introduzione, ci dobbiamo quindi aspettare che lo spazio delle distribuzioni sia estremamente vasto. In effetti $\mathcal{D}'(\Omega)$ contiene in maniera naturale tutti gli spazi di funzioni e tutte le misure, come vediamo subito.

Lemma 1.4. Ogni funzione L^p ed ogni misura corrispondono in modo naturale ad una distribuzione.

Proof. Sia $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$: è allora definito in modo ovvio un funzionale da $\mathcal{D}(\Omega)$ ad \mathbb{R} come $\varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi d\mu$. Che questo funzionale sia lineare è chiaro, quindi dobbiamo solo verificare che sia continuo. Per farlo, grazie appunto alla linearità, basta prendere una successione $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ e controllare che $\int_{\Omega} \varphi d\mu \rightarrow 0$. Ma in effetti, visto che $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, in particolare $\|\varphi_j\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$, e quindi $\langle \mu, \varphi_j \rangle := \int \varphi_j d\mu \rightarrow 0$.

Consideriamo ora, invece, una $f \in L^p(\Omega)$. Definendo il funzionale $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f\varphi$, che è chiaramente lineare, ci riduciamo come prima a verificare la sua continuità in 0. Se quindi $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, si ha anche che le norme $L^{p'}$ delle φ_j tendono a 0, visto che le φ_j tendono a zero uniformemente in un qualche compatto. Si ha quindi $\int f\varphi_j dx \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j\|_{L^{p'}} \rightarrow 0$, da cui segue la tesi. \square

D'ora in poi diremo allora semplicemente che una misura, o una funzione sommabile, o una C^∞ , sono delle distribuzioni, invece di dire che *corrispondono* a delle distribuzioni, e indicheremo con lo stesso simbolo le distribuzioni a cui corrispondono quando questo non generi ambiguità. E' fondamentale notare che, se una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è tale che

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

per ogni funzione $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ e per un certo $1 < p \leq +\infty$, allora per densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$ possiamo dedurre che $T \in (L^{p'})' \approx L^p$. Allo stesso modo, se

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \|f\|_{\text{sup}},$$

allora $f \in C_b(\Omega)'$ e quindi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Esempio 1.5. Un caso particolare di distribuzione è la *Delta di Dirac*, cioè la misura δ tale che $\langle \delta, f \rangle := f(0)$ per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Un altro esempio è la *funzione di Heaviside*, la funzione $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ definita come

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

si tratta di una distribuzione e si ha $\langle H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$. Un altro esempio è il *dipolo*, la distribuzione δ' definita come $\langle \delta', \varphi \rangle := -\varphi'(0)$ (vedremo subito il motivo della scelta del simbolo δ' , così come del segno “-” nella definizione).

Per adesso le distribuzioni non sembrano aggiungere molto allo spazio, già piuttosto esteso, delle misure; tutti gli esempio di distribuzioni che abbiamo visto finora erano misure tranne il dipolo (che il dipolo non sia generato da nessuna misura è un semplice esercizio). Vediamo adesso un risultato che esprime quali distribuzioni siano misure.

Lemma 1.6. *Ogni distribuzione positiva è localmente una misura (positiva).*

Prima di mostrare questo risultato, discutiamone brevemente il significato: una distribuzione positiva è una $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $\langle T, f \rangle \geq 0$ per ogni $f \geq 0$; inoltre, dire che T sia localmente una misura vuol dire che dato un aperto $A \subset\subset \Omega$ (cioè A compattamente contenuto in Ω , ossia \bar{A} è un compatto contenuto in Ω), esiste una misura $\mu_A \in \mathcal{M}^+(A)$ tale che $\langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f d\mu_A$ per ogni $f \in \mathcal{D}(A)$.

Proof. (del Lemma 1.6): Si prendano una distribuzione positiva T e un aperto $A \subset\subset \Omega$; per quanto osservato prima, si ottiene la tesi se si trova una costante C tale che

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \|f\|_{\text{sup}}$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(A)$. Si supponga che questo non sia vero: è allora possibile trovare funzioni $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\|f_n\|_{\text{sup}} = 1$ per ogni n e con $\langle T, f_n \rangle \geq n$. Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ una funzione positiva tale che $\varphi \equiv 1$ su \overline{A} , cosa possibile grazie all'esistenza di funzioni cut-off: per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $\varphi - f_n$ è positiva, ma

$$\langle T, \varphi - f_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T, f_n \rangle \leq \langle T, \varphi \rangle - n,$$

e quindi $\langle T, \varphi - f_n \rangle < 0$ per n sufficientemente grande. \square

Osservazione 1.7. *Si noti che la tesi è valida solo per aperti compattamente contenuti in Ω , ma non per l'intero Ω : ad esempio, la somma di numerabili Delti di Dirac posizionate in punti che convergono al bordo di Ω definisce una distribuzione che non corrisponde ad una misura; oppure, il funzionale $f \mapsto \int_{\Omega} f dx$ è chiaramente una distribuzione positiva, ma corrisponde ad una misura solo se Ω è di misura finita; più in generale, se g è una funzione su Ω positiva, regolare ma con integrale illimitato, allora $f \mapsto \int_{\Omega} gf dx$ è una distribuzione positiva ma non corrisponde ad una misura.*

Osservazione 1.8. *Si osservi infine che l'utilità del Lemma 1.6 non è limitata solo alle misure positive: dal momento che una misura generica è sempre la differenza tra due misure positive, possiamo rinunciare il lemma dicendo che una distribuzione che sia differenza di due distribuzioni positive è localmente una misura.*

1.2 Derivate e ordine di una distribuzione

Nella sezione precedente abbiamo usato il simbolo δ' per esprimere la distribuzione che a φ associa $-\varphi'(0)$; più in generale, visto che gli elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ sono infinitamente derivabili, per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo definire una distribuzione come

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle := (-1)^k \varphi^{(k)}(0). \quad (1.1)$$

Si ricordi ora che, prese due funzioni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avendo queste supporto compatto si ha, integrando successivamente per parti,

$$\int_{\Omega} \psi^{(k)} \varphi = (-1)^k \int_{\Omega} \psi \varphi^{(k)};$$

considerando le due funzioni regolari ψ e $\psi^{(k)}$ come distribuzioni come al solito, possiamo riscrivere la formula precedente come

$$\langle \psi^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \psi, \varphi^{(k)} \rangle. \quad (1.2)$$

Osservando la (1.1) e la (1.2) e passando al caso n -dimensionale nel modo ovvio, ci viene in mente la seguente ovvia definizione di derivate per una distribuzione.

Definizione 1.9. Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, definiamo la derivata α -esima di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come la distribuzione $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ data da

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Il fatto che $D^\alpha T$ sia una distribuzione è ovvio grazie al significato di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$, ed è altresì ovvio che in tutti i casi in cui T corrisponda ad una funzione derivabile, il concetto di derivata α -esima corrisponde con quello usuale. Osserviamo subito che, visto che le derivate di funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$ sono ancora in $\mathcal{D}(\Omega)$, si ha banalmente la seguente proprietà.

Lemma 1.10. Se $T_k \xrightarrow{*} T$ su $\mathcal{D}'(\Omega)$, allora per ogni multi-indice α si ha

$$D^\alpha T_k \xrightarrow{*} D^\alpha T.$$

Esempio 1.11. Le derivate della Delta di Dirac corrispondono a quanto definito in (1.1); la derivata della funzione di Heaviside è la Delta di Dirac.

A questo punto, risulta abbastanza intuitivo il concetto di ordine di una distribuzione: in base agli esempi che abbiamo visto, vorremo dire che una distribuzione ha ordine m se “coinvolge” solo le prime m derivate di una funzione; ad esempio, la derivata k -esima della Delta di Dirac dovrà avere ordine k . La definizione formale è dunque la seguente.

Definizione 1.12. Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ha ordine m se m è il minimo intero per cui esiste una costante C tale che

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D_i f\|_{\text{sup}} \right).$$

Se una distribuzione non ha ordine m per nessun $m \in \mathbb{N}$ si dice che ha ordine infinito.

Si noti che una misura è una distribuzione di ordine 0; più in generale, una distribuzione di ordine m dipende solo da f e dalle sue prime m derivate, e quindi si può estendere univocamente in modo continuo ad un funzionale su $C^m(\Omega)$. Esistono distribuzioni con ordine infinito, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.13. Definiamo

$$T := \sum_{m \in \mathbb{N}} \delta_{x_m}^{(m)},$$

dove x_m è una successione in Ω che tende al bordo (o che si allontani dall'origine se Ω è illimitato). E' chiaramente una distribuzione, visto che gli elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ hanno supporto compatto, ma altrettanto chiaramente non ha ordine finito.

Si noti che siamo stati capaci di costruire una distribuzione di ordine infinito, però solo allontanandoci dall'origine, oppure avvicinandoci al bordo; effettivamente questo è l'unico modo di avere ordine infinito, come mostriamo adesso.

Lemma 1.14. *Ogni distribuzione ha ordine localmente finito sui compatti. Ossia, data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e dato $K \subset \subset \Omega$, esiste m tale che T ha ordine m su K .*

Proof. Effettuando la costruzione della topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$ abbiamo già osservato che sui compatti questa è generata semplicemente dalle norme del sup delle diverse derivate. Sia allora m un intero tale che $K \subseteq K_m$: se per assurdo T avesse ordine infinito su K , allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ potremmo trovare una funzione $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\text{spt}(\varphi_k) \subseteq K$ e tale che

$$\|\varphi_k\|_{m,k} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \langle T, \varphi_k \rangle \geq 1.$$

L'assurdo si ottiene notando che $\varphi := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ ma per linearità $\langle T, \varphi \rangle = +\infty$. \square

Si può anche definire un prodotto tra funzioni regolari e distribuzioni: se φ e u sono elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$, si ha chiaramente

$$\langle u\varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} u\varphi\psi = \langle \varphi, u\psi \rangle;$$

definiamo allora il prodotto tra la funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e la distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come la distribuzione $\varphi T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ data da

$$\langle \varphi T, \psi \rangle := \langle T, \varphi\psi \rangle;$$

si osservi che non era essenziale, per dare la definizione, che φ fosse a supporto compatto: se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ la definizione funziona ugualmente bene.

Si può subito mostrare che continuano a valere la formula di Leibniz.

Lemma 1.15 (Formula di Leibniz). *Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, si ha*

$$D^\alpha(\varphi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha - \beta} T,$$

dove $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

Proof. La formula segue con un'ovvia induzione, come nel risultato classico, a partire dal caso $|\alpha| = 1$. Studiamo dunque $\frac{\partial(\varphi T)}{\partial x_i}$: per ogni funzione $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\varphi T)}{\partial x_i}, \psi \right\rangle &= -\left\langle \varphi T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial(\varphi \psi)}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} T, \psi \right\rangle, \end{aligned}$$

e dunque segue la tesi. \square

Concludiamo sottolineando la strategia che abbiamo usato in questo lemma, e cioè scaricare le derivate sulle funzioni regolari; in generale, quasi sempre per dimostrare i risultati sulle distribuzioni converrà “scaricare tutti i problemi” sulle funzioni C^∞ .

1.3 Convoluzione

In questa sezione definiamo la convoluzione nell'ambito delle distribuzioni e studiamo le sue principali proprietà.

1.3.1 Convoluzione per funzioni

Prima di tutto, ricordiamo le definizioni e le proprietà della convoluzione tra funzioni: per cominciare, date $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si pone

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy; \quad (1.3)$$

è immediato notare che la convoluzione è un'operazione lineare, commutativa e associativa (basta usare l'ovvio cambio di variabile ed il Teorema di Fubini). Si scopre anche subito che è possibile definire $f * g$ purché f e g siano in L^1 , e inoltre $f * g$ appartiene ad L^1 in questo caso.

Lemma 1.16. *Se $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.4)$$

*Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora è possibile definire $f * g$, sempre tramite la (1.3), e la (1.4) continua a valere.*

Proof. E' immediato osservare che $f * g$ sia continua (in realtà, come vedremo, è anche molto meglio) ed a supporto compatto, quindi non c'è dubbio che sia $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sia allora $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$: si trova subito che

$$\begin{aligned} \int_x f * g(x)h(x) dx &= \int_x \left(\int_y f(y)g(x-y) dy \right) h(x) dx = \int_y f(y) \left(\int_x g(x-y)h(x) dx \right) dy \\ &\leq \int_y |f(y)| \|g\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)} dy \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)} ; \end{aligned} \quad (1.5)$$

visto che per il Teorema di Hahn-Banach è possibile trovare $h \in L^\infty$ con $\|h\|_{L^\infty} = 1$ e in modo che

$$\int (f * g)h = \|f * g\|_{L^1},$$

la disuguaglianza (1.4) segue.

Supponiamo ora invece che f e g siano soltanto in $L^1(\mathbb{R}^n)$: usando la (1.3) come definizione, in linea di principio non è immediato osservare che $f * g$ sia ben definito. Definiamo allora f_h come la f troncata ad h , ossia

$$f_h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq h; \\ h & \text{se } f(x) > h; \\ -h & \text{se } f(x) < -h. \end{cases}$$

E' evidente che $f_h \rightarrow f$ in norma L^1 , ed inoltre $f_h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per definizione. Ma allora la (1.3) definisce senza problemi una funzione $f_h * g$, che sta peraltro chiaramente in L^∞ . Inoltre, la stima (1.5) funziona senza problemi ed assicura che $f_h * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|f_h * g\|_{L^1} \leq \|f_h\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} .$$

Per concludere, basta allora osservare che la successione $\{f_h\}$ è di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$, e per linearità della convoluzione la stima appena trovata assicura che anche $f_h * g$ è una successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da cui scopriamo che effettivamente la definizione (1.3) definisce una funzione $f * g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ che verifichi la stima (1.4). \square

In realtà la definizione (1.3) di convoluzione si può dare anche in casi leggermente più generali di $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$; ad esempio, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ è evidente che (1.3) è ben definita in ogni punto. Senza troppe difficoltà, usando opportunamente le disuguaglianze di Hölder, si può generalizzare come segue il Lemma 1.16.

Lemma 1.17 (Disuguaglianza di Young). *Date $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \geq 1,$$

*la formula (1.3) definisce una funzione $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, e inoltre*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} ;$$

in particolare, per $q = 1$ si ha

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.6}$$

Questo risultato ci assicura che, in un certo senso, la convoluzione ha un effetto “regolarizzante”, visto che $f * g$ risulta avere una sommabilità migliore sia di quella di f che di quella di g . In effetti, questo vale anche per quanto riguarda la continuità e la derivabilità, grazie al seguente risultato.

Lemma 1.18. *Se $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$; se poi inoltre $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $Df \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, allora è anche $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $1 \leq i \leq n$ vale*

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g. \tag{1.7}$$

Corollario 1.19. *Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$; se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^m(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in C^{k+m}(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. (del Lemma 1.18): Supponiamo per cominciare che g abbia un supporto K compatto.

Per mostrare che $f * g$ sia continua in x , allora, osserviamo che f è uniformemente continua nel compatto $B(x - K, 1)$ (che è l'insieme degli $z \in \mathbb{R}^n$ tali che esista $y \in K$ con $|(x - y) - z| \leq 1$).

Fissato dunque $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \leq 1$ tale che per ogni coppia di punti $x', x'' \in B(x - K, 1)$ con $|x' - x''| \leq \delta$ si ha $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$. Abbiamo allora che, per ogni \tilde{x} con $|x - \tilde{x}| \leq \delta$, è

$$|f * g(x) - f * g(\tilde{x})| = \left| \int_y g(y) (f(x - y) - f(\tilde{x} - y)) dy \right| \leq \varepsilon \int_y |g(y)| dy = \varepsilon \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.8)$$

e dunque la continuità di $f * g$ segue (si noti che g appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ visto che sta in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e per il momento stiamo supponendo che abbia supporto compatto).

Se poi $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, sia $1 \leq i \leq n$ e cerchiamo di mostrare la (1.7). Come fatto prima, fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$ ed utilizziamo l'uniforme continuità di $\partial f / \partial x_i$ nel compatto $B(x - K, 1)$ per dedurre che per ogni ε esista un $\delta \leq 1$ tale che per ogni scelta di $x', x'' \in B(x - K, 1)$ con $|x' - x''| \leq \delta$ si ha $|\partial f / \partial x_i(x') - \partial f / \partial x_i(x'')| \leq \varepsilon$. Si può allora osservare che, dato $\sigma > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{f * g(x + \sigma e_i) - f * g(x)}{\sigma} &= \int_y g(y) \frac{f(x - y + \sigma e_i) - f(x - y)}{\sigma} dy \\ &= \int_y g(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + t e_i) dy, \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove $t = t(y)$ è una funzione compresa tra 0 e σ . Supponendo allora che $\sigma < \delta$, la continuità uniforme di $\partial f / \partial x_i$ ci assicura che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + t e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| \leq \varepsilon$$

per ogni $y \in K$, e dunque che

$$\begin{aligned} \varepsilon \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\geq \left| \int_y g(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + t e_i) dy - \int_y g(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) dy \right| \\ &= \left| \int_y g(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + t e_i) dy - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x) \right|. \end{aligned}$$

Inserendo questa stima nella (1.9) deduciamo che per ogni $\sigma \leq \delta$ si ha

$$\left| \frac{f * g(x + \sigma e_i) - f * g(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x) \right| \leq \varepsilon \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.10)$$

e dunque si ottiene subito che $f * g \in C^1$ ed in particolare la validità della (1.7). Abbiamo quindi completato la tesi nel caso in cui g sia a supporto compatto.

Nel caso generale, d'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$ esistono chiaramente un compatto K e due funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$, g_1 e g_2 , con le proprietà che

$$g = g_1 + g_2, \quad \text{spt } g_1 \subseteq K, \quad \|g_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Per mostrare allora che $f * g$ sia continua, iniziamo con l'osservare che

$$\|f * g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.11)$$

il che segue immediatamente osservando che

$$|f * g_2(x)| \leq \int_y |g_2(y)| |f(x - y)| dy \leq \|g_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Applichiamo allora il ragionamento della prima parte della dimostrazione a g_1 , che ha supporto compatto: sfruttando la (1.8) otteniamo che, purché $|x - \tilde{x}| \leq \delta$, si ha

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(\tilde{x})| &\leq |f * g_1(x) - f * g_1(\tilde{x})| + |f * g_2(x) - f * g_2(\tilde{x})| \\ &\leq \varepsilon \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2 \|f * g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \left(\|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2 \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \right), \end{aligned}$$

e quindi la continuità di $f * g$ segue anche nel caso generale.

Per quanto riguarda la validità della (1.7), e quindi l'appartenenza di $f * g$ a $C^1(\mathbb{R}^n)$, si può ragionare esattamente nello stesso modo: in maniera perfettamente analoga alla (1.11) si ottiene che per ogni $\sigma > 0$ vale

$$\left\| \frac{f * g_2(\cdot + \sigma e_i) - f * g_2(\cdot)}{\sigma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Infatti, ragionando in maniera simile a quanto fatto nella (1.9), si ottiene per Fubini

$$\begin{aligned} \left| \frac{f * g_2(x + \sigma e_i) - f * g_2(x)}{\sigma} \right| &= \left| \frac{1}{\sigma} \int_y g_2(y) (f(x - y + \sigma e_i) - f(x - y)) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sigma} \int_y g_2(y) \left(\int_{\tau=0}^{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + \tau e_i) d\tau \right) dy \right| \\ &= \left| \int_{\tau=0}^{\sigma} \left(\int_y g_2(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + \tau e_i) dy \right) d\tau \right| \\ &\leq \int_{\tau=0}^{\sigma} \|g_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} d\tau \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.12}$$

A questo punto per concludere basta di nuovo applicare l'argomento della prima parte della dimostrazione a g_1 : più precisamente, utilizzando la (1.10) con g_1 al posto di g , la (1.12) e la (1.11) con $\partial f / \partial x_i$ al posto di f , si ottiene che, per σ abbastanza piccolo, è

$$\begin{aligned} \left| \frac{f * g(x + \sigma e_i) - f * g(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x) \right| &\leq \left| \frac{f * g_1(x + \sigma e_i) - f * g_1(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g_1(x) \right| \\ &\quad + \left| \frac{f * g_2(x + \sigma e_i) - f * g_2(x)}{\sigma} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} * g_2(x) \right| \\ &\leq \varepsilon \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2\varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

e quindi anche la validità della (1.7) segue pure nel caso generale. \square

Osservazione 1.20. *Si osservi che, nella dimostrazione appena conclusa, l'ipotesi che f e Df fossero in $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ è stata usata solo nel caso in cui g non fosse a supporto compatto. Tra le ipotesi del Lemma 1.18, quindi, si può anche chiedere soltanto che f stia in $C(\mathbb{R}^n)$ oppure in $C^1(\mathbb{R}^n)$, senza richiedere l'appartenenza di f o di Df ad $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, nel caso in cui g sia presa a supporto compatto.*

Possiamo ora discutere la possibilità di approssimare funzioni sommabili con funzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; siano infatti ρ_ε dei mollificatori, già introdotti nell'Esempio 0.3, e per ogni funzione

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con un esponente $1 \leq p < +\infty$ indichiamo $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$. Le funzioni f_ε sono ovviamente C^∞ per il Corollario 1.19; vediamo ora come f_ε converga fortemente a f in $L^p(\mathbb{R}^n)$, e la convergenza sia anche uniforme nel caso in cui f sia uniformemente continua.

Lemma 1.21. *Se f è una funzione uniformemente continua su \mathbb{R}^n , allora $f * \rho_\varepsilon =: f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente.*

Proof. Ricordando le proprietà (0.1) dei mollificatori, si può subito calcolare

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y) dy - f(x) \right| = \left| \int_{B(0,\varepsilon)} (f(x-y) - f(x))\rho_\varepsilon(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)|\rho_\varepsilon(y) dy \\ &\leq \max \{ |f(x-y) - f(x)|, x \in \mathbb{R}^n, |y| \leq \varepsilon \} = \omega(\varepsilon) \end{aligned}$$

essendo ω il modulo di continuità della funzione f . Visto che f è uniformemente continua, per definizione $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, e questo ci assicura la convergenza uniforme delle f_ε ad f . \square

Proposizione 1.22. *Sia $1 \leq p < +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$; allora, chiamando $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$, si ha che le f_ε sono funzioni C^∞ e*

$$f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f.$$

Proof. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fissata; per mostrare che $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ passeremo attraverso il Lemma 1.21, quindi ci serve poter approssimare f con una funzione continua. Per prima cosa prendiamo una funzione a scala φ_ε , cioè una funzione del tipo

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^k C_i \chi_{K_i}$$

con un numero naturale $k \in \mathbb{N}$, delle costanti $C_i \in \mathbb{R}$ e degli insiemi compatti a due a due disgiunti $K_i \subseteq \mathbb{R}^n$, in modo che

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon; \quad (1.13)$$

si osservi adesso quanto segue: data una costante $C \in \mathbb{R}$ ed un compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, le funzioni

$$x \mapsto C(1 - M \text{dist}(x, K))^+$$

sono, al variare di $M \in \mathbb{R}$, delle funzioni continue, che per $M \rightarrow +\infty$ tendono fortemente a $C\chi_K$ in L^p per qualsiasi $1 \leq p < +\infty$. Sommando allora k funzioni di questo tipo avendo scelto $M \gg 1$ sufficientemente grande, troviamo una funzione $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ continua (e ovviamente a supporto compatto) tale che

$$\|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon. \quad (1.14)$$

Grazie al Lemma 1.21, le funzioni $\tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta$ convergono uniformemente a $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ per $\delta \rightarrow 0$; essendo $\tilde{\varphi}_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^n)$, ovviamente la convergenza vale a maggior ragione in L^p ; dunque, purché $\delta \leq \bar{\delta}(\varepsilon)$ si ha

$$\|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon. \quad (1.15)$$

Mettendo allora insieme (1.13), (1.14) e (1.15), e ricordando (1.6), si ha

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(\tilde{\varphi}_\varepsilon - f) * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\|f - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon \leq 5\varepsilon; \end{aligned}$$

dal momento che questa disuguaglianza è valida purché δ sia minore di una costante che dipende solo da ε , si conclude la tesi. \square

Corollario 1.23. *L'insieme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$.*

Proof. Le funzioni f_ε sono funzioni C^∞ che convergono fortemente ad f in $L^p(\mathbb{R}^n)$, però non sono a supporto compatto; tuttavia, ricordando la costruzione delle funzioni φ_ε nella Proposizione 1.22, con un procedimento triangolare possiamo trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$ in modo che

$$\varphi_\varepsilon * \rho_\delta \xrightarrow{L^p} f,$$

e visto che le $\varphi_\varepsilon * \rho_\delta$ sono a supporto compatto si conclude. \square

Osservazione 1.24. *Se $p = +\infty$, la Proposizione ed il Corollario non sono veri; come si può facilmente notare, il problema è che le funzioni continue non approssimano le funzioni a scala in L^∞ , mentre lo fanno in tutti gli L^p come utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 1.22.*

1.3.2 Distribuzioni a supporto compatto

E' possibile definire il supporto di una distribuzione T in un modo ovvio, che coincide con l'usuale concetto di supporto nel caso in cui T sia una funzione o una misura.

Definizione 1.25. *Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, diremo che il supporto di T è il complementare del più grande aperto $E \subseteq \Omega$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ si ha $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Diamo adesso le seguenti ulteriori definizioni.

Definizione 1.26. *Lo spazio $C^\infty(\Omega)$ di tutte le funzioni C^∞ su Ω con supporto non necessariamente compatto verrà denotato con $\mathcal{E}(\Omega)$; diremo che $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$ se su ogni compatto contenuto in Ω vi è convergenza uniforme delle φ_k e delle loro derivate a φ e alle sue derivate. Il duale di $\mathcal{E}(\Omega)$ verrà chiamato $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

E' immediato notare che la topologia su \mathcal{E} può essere costruita con un procedimento analogo a quanto fatto su \mathcal{D} , e che tutti i risultati trovati su \mathcal{D} e su \mathcal{D}' si estendono con dimostrazioni identiche ad \mathcal{E} e ad \mathcal{E}' . Si ha poi quanto segue.

Lemma 1.27. *Lo spazio $\mathcal{E}'(\Omega)$ coincide con lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto.*

Proof. Prima di tutto notiamo che ovviamente $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ è denso, e dunque $\mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ è composto da distribuzioni. Inoltre, è chiaro che se una distribuzione è a supporto compatto definisce un funzionale su $\mathcal{E}(\Omega)$, usando opportunamente funzioni cut-off fuori dal supporto della

distribuzione. Infine, se una distribuzione T non è a supporto compatto, ragionando in modo del tutto analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Lemma 1.14 è facile costruire funzioni $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ in modo che $\varphi_k \rightarrow \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)$ ma $\langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow +\infty$: questo assicura che $T \notin \mathcal{E}'(\Omega)$. \square

Corollario 1.28. *Gli elementi di $\mathcal{E}'(\Omega)$ hanno ordine finito.*

Proof. Visto che gli elementi di $\mathcal{E}'(\Omega)$ sono le distribuzioni a supporto compatto, si conclude grazie al Lemma 1.14. \square

1.3.3 Convoluzione per distribuzioni

Possiamo finalmente passare a generalizzare il concetto di convoluzione, dato per le funzioni nella Sezione 1.3.1, al caso delle distribuzioni. Per fare questo fissiamo per comodità un paio di abbreviazioni.

Definizione 1.29. *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, denotiamo con $\tau_x : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ la traslazione “all’indietro” di x e con $\bar{\cdot} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ il ribaltamento, ossia*

$$\tau_x \varphi(y) := \varphi(y - x), \quad \bar{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

Visto che ovviamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \varphi) \psi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tau_{-x} \psi,$$

definiamo la *traslazione di distribuzioni* come $\tau_x : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ data da

$$\langle \tau_x T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-x} \varphi \rangle.$$

Inoltre, ricordando che la convoluzione tra due funzioni $f * g$ è

$$f * g(x) = \int f(y)g(x - y) dy = \int f \tau_x \bar{g},$$

definiamo la *convoluzione tra una distribuzione ed una funzione* C^∞ come $* : \mathcal{D}' \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ data da

$$T * \varphi(x) := \langle T, \tau_x \bar{\varphi} \rangle;$$

notiamo che per adesso $T * \varphi$ è solo una funzione continua, visto che $\tau_{x_n} \bar{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tau_x \bar{\varphi}$ se $x_n \rightarrow x$; il fatto che si tratti di una funzione C^∞ verrà mostrato nel Lemma 1.31. Prima, però, osserviamo una proprietà immediata.

Lemma 1.30. *Se $S, T \in \mathcal{D}'$ sono tali che $S * \varphi = T * \varphi$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, allora $S = T$.*

Proof. Fissiamo $\varphi \in \mathcal{D}$: allora

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \bar{\bar{\varphi}} \rangle = T * \bar{\varphi}(0) = S * \bar{\varphi}(0) = \langle S, \varphi \rangle.$$

\square

Lemma 1.31. Per ogni multi-indice α e per ogni $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} D^\alpha(T * \varphi) &= T * (D^\alpha \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi, \\ T * (\varphi * \psi) &= (T * \varphi) * \psi \end{aligned}$$

Proof. Per quanto riguarda la prima proprietà, ovviamente è sufficiente mostrare la tesi con una singola derivata e poi agire ricorsivamente; calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T * \varphi)}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T * \varphi(x) - (T * \varphi)(x - \varepsilon e_i)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle T, \tau_x \bar{\varphi} \rangle - \langle T, \tau_{x - \varepsilon e_i} \bar{\varphi} \rangle}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle T, \tau_x \bar{\varphi} \rangle - \langle T, \tau_x \tau_{-\varepsilon e_i} \bar{\varphi} \rangle}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle T, \tau_x \bar{\varphi} \rangle - \langle T, \tau_x \overline{\tau_{\varepsilon e_i} \varphi} \rangle}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T, \frac{\tau_x (\varphi - \tau_{\varepsilon e_i} \varphi)}{\varepsilon} \rangle = \langle T, \tau_x \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \rangle = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} * \varphi(x) &= \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tau_x \bar{\varphi} \rangle = -\langle T, \frac{\partial \tau_x \bar{\varphi}}{\partial x_i} \rangle = -\langle T, \tau_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \rangle = -\langle T, \tau_x \left(-\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \right) \rangle \\ &= \langle T, \tau_x \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \rangle = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x); \end{aligned}$$

la prima formula è quindi mostrata.

Per quanto riguarda la seconda, prima di tutto è necessario osservare quanto segue: date $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, si ha

$$\langle T, \int f(\cdot, y) dy \rangle = \int \langle T, f(\cdot, y) \rangle dy : \quad (1.16)$$

questo fatto è ovvio se la dipendenza di f dalla seconda variabile è a scala, e il caso generale si raggiunge per densità. Utilizzando la (1.16), si ha

$$\begin{aligned} (T * (\varphi * \psi))(x) &= \langle T, \tau_x \overline{\varphi * \psi} \rangle = \langle T, \varphi * \psi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \int \psi(y) \varphi(x - \cdot - y) dy \rangle \\ &= \langle T, \int \psi(y) \tau_{x-y} \bar{\varphi}(\cdot) dy \rangle = \int \langle T, \psi(y) \tau_{x-y} \bar{\varphi}(\cdot) \rangle dy \\ &= \int \langle T, \tau_{x-y} \bar{\varphi}(\cdot) \rangle \psi(y) dy = \int T * \varphi(x - y) \psi(y) dy = ((T * \varphi) * \psi)(x). \end{aligned}$$

□

Esempio 1.32. La Delta di Dirac ha la peculiarità che $\delta * \varphi = \varphi$; inoltre $1 * \varphi \equiv \int \varphi$: ossia, chiamando 1 la distribuzione corrispondente alla funzione che vale identicamente 1 –che ovviamente è L^1_{loc} quindi una distribuzione– si ottiene che la convoluzione tra 1 e φ è la funzione costante di valore $\int \varphi$. Un altro esempio si ottiene con la funzione di Heaviside, trovando $H * \varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi$. Questo ci dà anche un esempio riguardo al Lemma appena mostrato: $(H * \varphi)' = \varphi = \delta * \varphi = H' * \varphi$.

Ripassando il funzionamento della convoluzione tra funzioni, avevamo già notato che la convoluzione acquista tutte le proprietà di regolarità della migliore tra le due funzioni; in altre parole, la sommabilità di $f * g$ è almeno la sommabilità migliore tra f e g , così come le proprietà di continuità e di derivabilità. Osserviamo allora che lo stesso fenomeno accade in pieno anche con le distribuzioni: facendo la convoluzione tra gli oggetti più regolari che ci siano –le funzioni C^∞ a supporto compatto– e quelli meno regolari possibili –le distribuzioni– si ottengono ancora funzioni C^∞ .

Passiamo ora a definire convoluzioni tra due distribuzioni: ricordiamo che se $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, allora $T * \varphi \in \mathcal{E}$; oppure, chiaramente, se $T \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha $T * \varphi \in \mathcal{D}$ (e il supporto di $T * \varphi$ è contenuto nella somma dei due supporti di T e di φ , esattamente come accade tra le funzioni). Possiamo allora applicare una nuova distribuzione S a $T * \varphi$ purché almeno una tra S e T sia a supporto compatto. Prima di utilizzare questa osservazione per definire $S * T$, osserviamo cosa succede nel caso delle funzioni: se $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{D}$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \varphi * \psi, \rho \rangle &= \int_x \varphi * \psi(x) \rho(x) dx = \int_x \left(\int_y \varphi(y) \psi(x-y) dy \right) \rho(x) dx \\ &= \int_y \varphi(y) \left(\int_x \rho(x) \psi(x-y) dx \right) dy = \int_y \varphi(y) \left(\int_x \bar{\rho}(-x) \psi(-y - (-x)) dx \right) dy \\ &= \int_y \varphi(y) \psi * \bar{\rho}(-y) dy = \langle \varphi, \overline{\psi * \bar{\rho}} \rangle. \end{aligned}$$

Allo stesso modo, siano $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$: prima di tutto osserviamo che

$$\varphi * \psi = \int \psi(-y) \varphi(\cdot + y) dy = \int \bar{\psi}(y) \bar{\varphi}(-\cdot - y) dy = \int \bar{\psi}(y) \tau_y \bar{\varphi}(-\cdot) dy,$$

e quindi

$$\overline{\varphi * \psi} = \int \bar{\psi} \tau_y \bar{\varphi}(\cdot) dy;$$

a questo punto, calcoliamo

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \int T * \varphi(y) \psi(y) dy = \int \langle T, \tau_y \bar{\varphi} \rangle \psi(y) dy = \langle T, \int \tau_y \bar{\varphi}(\cdot) \psi(y) dy \rangle = \langle T, \overline{\varphi * \bar{\psi}} \rangle.$$

E' a questo punto indubbiamente sensato dare la seguente definizione per $S * T$.

Definizione 1.33. *Siano S e T due distribuzioni, almeno una delle quali a supporto compatto; definiamo allora $S * T \in \mathcal{D}'$ come*

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S, \overline{T * \bar{\varphi}} \rangle;$$

*si noti che, nel caso in cui sia S che T siano a supporto compatto, anche $S * T$ lo è.*

Possiamo concludere con lo studio delle proprietà di simmetria e associatività del prodotto di convoluzione.

Lemma 1.34. *Date tre distribuzioni T_1, T_2 e T_3 di cui almeno due a supporto compatto, data $\varphi \in \mathcal{D}$, e dato un multi-indice α , si ha*

$$\begin{aligned}(T_1 * T_2) * \varphi &= T_1 * (T_2 * \varphi); \\ T_1 * T_2 &= T_2 * T_1; \\ (T_1 * T_2) * T_3 &= T_1 * (T_2 * T_3); \\ D^\alpha(T_1 * T_2) &= (D^\alpha T_1) * T_2.\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad ((T_1 * T_2) * \varphi)(x) &= \langle T_1 * T_2, \tau_x \overline{\varphi} \rangle = \langle T_1, \overline{T_2 * \tau_x \overline{\varphi}} \rangle = \langle T_1, \overline{T_2 * \tau_{-x} \overline{\varphi}} \rangle \\ &= \langle T_1, \overline{\tau_{-x}(T_2 * \varphi)} \rangle = \langle T_1, \tau_x \overline{(T_2 * \varphi)} \rangle = (T_1 * (T_2 * \varphi))(x),\end{aligned}$$

usando il fatto che

$$(T * \tau_z \varphi)(\cdot) = \langle T, \tau \overline{\tau_z \overline{\varphi}} \rangle = \langle T, \tau \tau_{-z} \overline{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_{-z} \overline{\varphi} \rangle = (T * \varphi)(\cdot - z) = (\tau_z(T * \varphi))(\cdot).$$

(ii) Prese $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, si ha

$$\begin{aligned}((T_1 * T_2) * \varphi) * \psi &= (T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) = T_1 * (T_2 * (\varphi * \psi)) = T_1 * ((T_2 * \varphi) * \psi) \\ &= T_1 * (\psi * (T_2 * \varphi)) = (T_1 * \psi) * (T_2 * \varphi).\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo,

$$((T_2 * T_1) * \varphi) * \psi = (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\psi * \varphi) = (T_2 * \varphi) * (T_1 * \psi).$$

Dunque, usando varie volte la commutatività della convoluzione tra funzioni, abbiamo stabilito che

$$((T_1 * T_2) * \varphi) * \psi = ((T_2 * T_1) * \varphi) * \psi;$$

visto che $\psi \in \mathcal{D}$ è generica, dal Lemma 1.30 deduciamo

$$(T_1 * T_2) * \varphi = (T_2 * T_1) * \varphi;$$

infine, visto che $\varphi \in \mathcal{D}$ è generica, ancora dal Lemma 1.30 deduciamo

$$T_1 * T_2 = T_2 * T_1.$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \quad ((T_1 * T_2) * T_3) * \varphi &= (T_1 * T_2) * (T_3 * \varphi) = T_1 * (T_2 * (T_3 * \varphi)) \\ &= T_1 * ((T_2 * T_3) * \varphi) = (T_1 * (T_2 * T_3)) * \varphi,\end{aligned}$$

e visto che $\varphi \in \mathcal{D}$ è generica si ottiene la tesi come prima.

$$\begin{aligned}\text{(iv)} \quad (D^\alpha(T_1 * T_2)) * \varphi &= (T_1 * T_2) * D^\alpha \varphi = T_1 * (T_2 * D^\alpha \varphi) = T_1 * (D^\alpha T_2 * \varphi) \\ &= (T_1 * D^\alpha T_2) * \varphi,\end{aligned}$$

che ricordando ancora il Lemma 1.30 e la commutatività della convoluzione conclude la tesi. \square

Esempio 1.35. Per una qualunque distribuzione T si ha $\delta * T = T$: infatti, $(\delta * T) * \varphi = (T * \delta) * \varphi = T * (\delta * \varphi) = T * \varphi$.

Osservazione 1.36. Ovviamente si può definire un prodotto di convoluzione tra un numero qualunque di distribuzioni purché tutte tranne al più una siano a supporto compatto.

Osservazione 1.37. Così come accade con le funzioni, può capitare che si possa definire il prodotto di convoluzione tra distribuzioni anche se due o più di loro hanno supporto non compatto; in questo caso, tuttavia, non è detto che valga la proprietà associativa. Ad esempio

$$\begin{aligned} 1 * (\delta' * H) &= 1 * (\delta * H') = 1 * (\delta * \delta) = 1 * \delta = 1; \\ (1 * \delta') * H &= (1' * \delta) * H = 0 * H = 0; \\ (1 * H) * \delta' &\text{ non è definito.} \end{aligned}$$

1.4 Soluzioni fondamentali

Consideriamo un operatore differenziale

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (1.17)$$

di ordine finito (in realtà molte cose andrebbero bene per operatori di ordine anche solo localmente finito). Si può allora considerare l'applicazione $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ dall'ovvio significato, ma anche, se gli a_α sono regolari, l'applicazione $L : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$, visto che si possono derivare le distribuzioni; in particolare,

$$\langle L(T), \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha T, a_\alpha \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle = \langle T, L^* \varphi \rangle,$$

dove l'operatore L^* è definito nel modo naturale applicando le formule di Leibniz per esprimere le derivate $D^\alpha (a_\alpha \varphi)$ come somme di funzioni regolari per derivate di φ ; in particolare, se i coefficienti a_α sono costanti, si ha

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha.$$

E' quindi possibile considerare equazioni differenziali che abbiano come termini delle distribuzioni, ossia cercare di trovare una distribuzione T che risolva $L(T) = S$ con $S \in \mathcal{D}'$ assegnata. Osserviamo adesso una cosa: se $L(T) = S$ e $U \in \mathcal{D}'$, allora

$$L(T * U) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha (T * U) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha T \right) * U = L(T) * U = S * U.$$

Tutto questo ci spinge a introdurre il concetto di soluzioni fondamentali come segue.

Definizione 1.38. Dato un'operatore differenziale L come in (1.17), diciamo che $E \in \mathcal{D}'$ è una soluzione fondamentale se $L(E) = \delta$.

Ad esempio, in dimensione 1 la funzione di Heaviside è una soluzione fondamentale per $\partial/\partial x$. Il motivo della scelta della distribuzione δ nella definizione appena data è molto semplice, come illustra il seguente risultato.

Lemma 1.39. *Se E è una soluzione fondamentale per l'operatore L , allora per ogni $S \in \mathcal{D}'$ una soluzione al problema $L(T) = S$ è data da $T = E * S$.*

Proof. Questo è davvero ovvio: se $L(E) = \delta$, allora

$$L(E * S) = L(E) * S = \delta * S = S.$$

□

Non è dunque azzardato parlare di soluzione “fondamentale”: se conosciamo una soluzione fondamentale per un operatore, possiamo trovare immediatamente soluzioni per tutte le equazioni differenziali relative allo stesso operatore, semplicemente applicando una convoluzione. La soluzione fondamentale è più o meno quello che viene chiamato “funzione di Green”, anche se nel caso delle funzioni di Green ci si preoccupa fundamentalmente di soluzioni con dati al bordo opportuni su ben determinati insiemi. In ogni caso, come ci si può facilmente aspettare non è affatto semplice trovare soluzioni fondamentali, anzi è possibile trovarne solo in casi molto particolari; un risultato positivo al riguardo, sia pure a livello puramente teorico, è il seguente.

Teorema 1.40 (Malgrange–Ehrenpreis). *Se i coefficienti a_α in (1.17) sono costanti, esiste sempre una soluzione fondamentale.*

Concludiamo con due esempi di espressione esplicita di una soluzione fondamentale per il Laplaciano nel caso $n = 2$ e $n > 2$ rispettivamente.

Lemma 1.41. *Su \mathbb{R}^2 , una soluzione fondamentale del Laplaciano è data da*

$$u(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x|.$$

Proof. Innanzitutto notiamo che $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, visto che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e che, integrando con coordinate polari,

$$\int_{B_r} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \rho \log(\rho) d\rho d\theta \rightarrow 0;$$

di conseguenza, è vero che $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Notiamo ora che, fuori dall'origine, si ha

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2},$$

e quindi un semplice conto assicura che $\Delta u(x) = 0$ in senso classico per ogni $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Applicando ora il Teorema della Divergenza sull'aperto ${}^c B_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ troviamo

$$\int_{{}^c B_\varepsilon} u \Delta \varphi = \int_{{}^c B_\varepsilon} u \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \int_{\partial({}^c B_\varepsilon)} u \nabla \varphi \cdot \nu - \int_{{}^c B_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi,$$

e allo stesso modo

$$\int_{{}^c B_\varepsilon} \varphi \Delta u = \int_{\partial({}^c B_\varepsilon)} \varphi \nabla u \cdot \nu - \int_{{}^c B_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \varphi;$$

possiamo dedurre, allora,

$$\int_{{}^c B_\varepsilon} u \Delta \varphi - \varphi \Delta u = \int_{C_\varepsilon} (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \cdot \nu, \quad (1.18)$$

denotando la circonferenza di raggio ε come $C_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Valutiamo ora i diversi pezzi di (1.18): prima di tutto, visto che su ${}^c B_\varepsilon$ si ha $\Delta u \equiv 0$, il termine $\int \varphi \Delta u$ si annulla; in secondo luogo, si ha $\|\nabla \varphi\|_{\text{sup}} \leq M$ per cui

$$\left| \int_{\partial({}^c B_\varepsilon)} u \nabla \varphi \cdot \nu \right| \leq M \int_{C_\varepsilon} |u| d\mathcal{H}^1 = M\varepsilon \log(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Possiamo ora calcolare

$$\int_{C_\varepsilon} \nabla u \cdot \nu = \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2} \cdot \frac{-x}{|x|} = - \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi|x|} = - \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\varepsilon} = -1,$$

visto che la normale uscente da ${}^c B_\varepsilon$ è $\nu = -x/|x|$. Poiché φ è continua, se $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha, allora,

$$\int_{C_\varepsilon} -\varphi \nabla u \cdot \nu \rightarrow \varphi(0).$$

Infine, si ha chiaramente che $\int_{{}^c B_\varepsilon} u \Delta \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} u \Delta \varphi$, visto che $u \in L^1_{\text{loc}}$ e $\Delta \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Raccolgendo tutto, da (1.18) si deduce

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} u \Delta \varphi = \varphi(0)$$

□

Quanto appena mostrato assicura che per risolvere su \mathbb{R}^2 il problema $\Delta \varphi = f$, è sufficiente prendere $\varphi = u * f$; questo funziona sempre tra le distribuzioni, e in particolare troviamo una soluzione L^1_{loc} ogni volta che si può fare la convoluzione $u * f$ nel senso delle funzioni, ad esempio per $f \in L^1$ a supporto compatto; in questo caso si ha

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log(|y-x|) f(y) dy. \quad (1.19)$$

Lemma 1.42. *Su \mathbb{R}^n con $n > 2$, una soluzione fondamentale del Laplaciano è data da*

$$u(x) := -\frac{1}{n\omega_n(n-2)|x|^{n-2}},$$

dove ω_n è il volume della palla unitaria n -dimensionale.

Proof. E' assolutamente identico al caso bi-dimensionale, si deve solo verificare che u sia in L^1_{loc} , che abbia laplaciano nullo in senso classico lontano dall'origine, applicare il Teorema della Divergenza trovando (1.18) con significato n -dimensionale, e passare al limite come prima. □

Ovviamente valgono gli stessi discorsi appena fatti nel caso bidimensionale riguardo alla possibilità di trovare soluzioni distribuzionali o L^1_{loc} , e l'analogo della (1.19) sarà

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{n\omega_n(n-2)|y-x|^{n-2}} f(y) dy.$$

Ovviamente in questo modo non abbiamo risolto tutti i problemi col laplaciano: di solito quello che interessa non è trovare una soluzione su \mathbb{R}^n del problema $\Delta u = f$, ma anche che sul bordo di un assegnato dominio il comportamento sia preassegnato (ad esempio da condizioni di Neumann o Dirichlet); per ottenere questo chiaramente servirà un lavoro ulteriore.

Capitolo 2

Trasformata di Fourier

Subito dopo il capitolo sulle distribuzioni presentiamo rapidamente la trasformata di Fourier, uno strumento molto utile e potente nello studio delle equazioni a derivate parziali.

2.1 Definizioni

Lo spazio adatto per presentare la trasformata di Fourier non è né \mathcal{D} né \mathcal{E} , bensì uno spazio intermedio, lo spazio di Schwartz.

Definizione 2.1. Si definisce spazio di Schwartz lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni C^∞ che decrescono all'infinito con tutte le loro derivate più rapidamente di ogni potenza. Ossia, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se per ogni coppia di multi-indici α e β si ha

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0.$$

Diremo poi che $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ se per ogni coppia di multi-indici α e β si ha che $x^\beta D^\alpha \varphi_k$ tende uniformemente a $x^\beta D^\alpha \varphi$.

Ovviamente si hanno le inclusioni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$, e visto che sono inclusioni dense si hanno le corrispondenti $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$; le distribuzioni che appartengono a \mathcal{S}' vengono dette *distribuzioni temperate*. Si noti che la densità di \mathcal{D} in \mathcal{S} è facile, ma non è automatica dal fatto che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ e \mathcal{D} è denso in \mathcal{E} ! In generale, infatti, si possono trovare insiemi $A \subseteq B \subseteq C$ in modo che l'inclusione $A \subseteq C$ e l'inclusione $B \subseteq C$ siano dense ma $A \subseteq B$ no; infatti, la topologia su \mathcal{D} e su \mathcal{S} non è quella data dall'inclusione in \mathcal{E} .

Pur essendo ovvio, risulta spesso utile il seguente risultato.

Lemma 2.2. Sia $\varphi \in \mathcal{E}$; allora $\varphi \in \mathcal{S}$ se e solo se per ogni intero m e ogni multi-indice α la funzione

$$(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$$

è limitata.

Presentiamo subito la definizione della trasformata di Fourier su \mathcal{S} .

Definizione 2.3. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$; allora $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è definita da

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx. \quad (2.1)$$

2.2 Prime proprietà

Per com'è costruita, la trasformata di Fourier ha ovviamente un significato complesso, e in effetti quando si lavora con la trasformata di Fourier si lavora implicitamente con funzioni a valori complessi; tuttavia, i risultati che si ottengono sono particolarmente interessanti ed utili anche avendo in mente solo funzioni a valori reali. Il nostro primo scopo è verificare che $\widehat{\cdot} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sia un'applicazione lineare e continua: studiamo dunque prima la continuità, poi la derivabilità di $\widehat{\varphi}$.

Lemma 2.4. Data $\varphi \in \mathcal{S}$, la sua trasformata $\widehat{\varphi}$ è uniformemente continua.

Proof. Fissato ε , scegliamo R tale che $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} \leq \varepsilon$, e valutiamo

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi + \eta) - \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) dx \\ &= \int_{B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) dx. \end{aligned}$$

Ora,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) dx \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\varphi(x)| dx \leq 2\varepsilon;$$

d'altra parte, ovviamente esiste un $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $x \in B_R$ e per ogni $|\eta| \leq \bar{\eta}$ si ha

$$|e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1| \leq \varepsilon,$$

da cui

$$\left| \int_{B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) dx \right| \leq \int_{B_R} \varepsilon |\varphi(x)| dx \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}.$$

In conclusione, purché $|\eta| \leq \bar{\eta}$ si ha

$$|\widehat{\varphi}(\xi + \eta) - \widehat{\varphi}(\xi)| \leq \varepsilon(2 + \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}),$$

e dunque abbiamo stabilito l'uniforme continuità di $\widehat{\varphi}$. □

Lemma 2.5. Date $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\|\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^1}.$$

Proof. Basta semplicemente prendere $\xi \in \mathbb{R}^n$ e notare che

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\psi}(\xi)| &= \left| \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) - \psi(x) dx \right| \leq \int |e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) - \psi(x)| dx \\ &= \int |\varphi(x) - \psi(x)| dx = \|\varphi - \psi\|_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.6. Date $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, si ha $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}$.

Proof. Anche questo è un immediato conto:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_x e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi * \psi(x) dx = \int_x e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_y \varphi(y) \psi(x - y) dy \right) dx \\ &= \int_x \int_y e^{-2\pi i y \cdot \xi} \varphi(y) e^{-2\pi i x - y \cdot \xi} \psi(x - y) dy dx = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

□

Passiamo ora a studiare il problema di derivare una trasformata di Fourier, visto che abbiamo in mente di mostrare che anche una trasformata sta in \mathcal{S} .

Lemma 2.7. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$; allora si ha

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \xi_i}(\xi) = -2\pi i \widehat{x_i \varphi}(\xi), \quad \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x_i}(\xi) = 2\pi i \xi_i \widehat{\varphi}(\xi). \quad (2.2)$$

Proof. Dal momento che $\varphi \in \mathcal{S}$, e dunque sia φ che $\partial\varphi/\partial x_i$ sono limitate e tendono a zero più velocemente dei polinomi, si può portare la derivata sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \xi_i}(\xi) &= \partial \left(\int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx \right) / \partial \xi_i = \int \frac{\partial (e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x))}{\partial \xi_i} dx \\ &= \int -2\pi i e^{-2\pi i x \cdot \xi} x_i \varphi(x) dx = -2\pi i \widehat{x_i \varphi}(\xi), \end{aligned}$$

e la prima identità è mostrata. Per quanto riguarda la seconda, supponiamo per un momento che φ sia a supporto compatto: allora integrando per parti si ha semplicemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x_i}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int \frac{\partial e^{-2\pi i x \cdot \xi}}{\partial x_i} \varphi(x) dx = \int 2\pi i \xi_i e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= 2\pi i \xi_i \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Nel caso generale, è sufficiente prendere una successione $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ con $\varphi_k \in \mathcal{D}$ (cosa possibile perché abbiamo già notato che l'inclusione $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ è densa). Grazie al Lemma 2.5, abbiamo convergenza uniforme (e quindi anche puntuale!) di $\widehat{\varphi}_k$ a $\widehat{\varphi}$ e di $\frac{\partial \widehat{\varphi}_k}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x_i}$, quindi deduciamo la seconda identità in generale. □

Con una banale induzione si ottiene il seguente

Corollario 2.8. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$; allora per ogni multi-indice α si ha

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi), \quad \widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi).$$

Di conseguenza, l'applicazione $\widehat{\cdot}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è lineare e continua.

2.3 La formula di inversione

Il motivo per cui abbiamo deciso di studiare la trasformata di Fourier sullo spazio di Schwartz diventa chiaro in vista della possibilità di invertire la trasformata. Si può infatti considerare la cosiddetta *antitrasformata*, che porta φ in

$$\check{\varphi}(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Si mostra subito che l'antitrasformata è proprio l'inversa della trasformata. Prima di tutto, ci fa comodo calcolare la trasformata in un caso particolare.

Esempio 2.9. Detta $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, si ricordi che è

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = (2\pi)^{n/2}.$$

Si ha allora, tramite il cambio di variabili $y = x + 2\pi i \xi$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-2\pi^2 |\xi|^2} dy = (2\pi)^{n/2} e^{-2\pi^2 |\xi|^2}.$$

Lemma 2.10. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$; allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\varphi(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi, \tag{2.3}$$

ossia $(\widehat{\widehat{\varphi}})^\vee = \varphi$.

Proof. Iniziamo osservando che, per ogni coppia di funzioni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, si ha la *identità debole di Parseval*, che asserisce

$$\int \varphi(x) \widehat{\psi}(x) dx = \int \widehat{\varphi}(x) \psi(x) dx : \tag{2.4}$$

per mostrare questo fatto basta esprimere $\widehat{\psi}$ nel primo membro dell'uguaglianza in forma integrale e poi cambiare l'ordine di integrazione. Un altro conto banale a partire dalla definizione della trasformata assicura poi che

$$\widehat{\varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)}(\xi) = \lambda^n \widehat{\varphi}(\lambda \xi).$$

Allora dall'identità di Parseval (2.4) deduciamo che

$$\int \widehat{\psi}(x) \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int \psi(x) \widehat{\varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)}(x) dx = \int \psi(x) \lambda^n \widehat{\varphi}(\lambda x) dx = \int \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{\varphi}(x) dx;$$

mandando λ all'infinito, essendo φ e ψ in \mathcal{S} otteniamo

$$\frac{\int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi}{\varphi(0)} = \frac{\int \widehat{\psi}(\xi) d\xi}{\psi(0)}; \quad (2.5)$$

dunque il rapporto $\int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi/\varphi(0)$ è lo stesso per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$; si può quindi verificare il valore di questo rapporto su una qualunque funzione “comoda”. In particolare, visto che nell'Esempio 2.9 abbiamo già calcolato la trasformata per la gaussiana, con $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ si ha

$$\frac{\int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi}{\varphi(0)} = \int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{n/2} \int e^{-2\pi^2|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy = 1$$

con il cambio di variabili $y = 2\pi\xi$: deduciamo quindi che il rapporto $\int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi/\varphi(0)$ è pari ad 1 per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, e dunque in particolare

$$\varphi(0) = \int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int e^{2\pi i 0 \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi,$$

cioè la formula (2.3) è verificata per $x = 0$; per verificarla per qualunque altro x , è sufficiente operare una traslazione di $-x$ a φ ed applicare quanto appena trovato. \square

In effetti, la presenza del 2π nella definizione di trasformata non serve a nient'altro se non ad ottenere appunto che il rapporto (2.5) sia uguale ad 1 e dunque che non compaiano costanti nella definizione dell'antitrasformata. Questo fra un attimo ci farà dedurre l'identità forte di Parseval senza costanti aggiuntive ed in particolare il Corollario 2.13 ci assicurerà che la trasformata sia un'isometria nel senso di L^2 (il che ovviamente è molto più elegante piuttosto che dire che la trasformata moltiplica sempre la norma per un fattore costante di una potenza di $2\pi \dots$).

Corollario 2.11. *La trasformata di Fourier $\widehat{\cdot}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è un'applicazione lineare, biunivoca e bicontinua \mathcal{S} in sé.*

Proof. Il fatto che \mathcal{S} sia lineare e continua è assicurato dal Corollario 2.8; il fatto che l'antitrasformata sia proprio l'inversa della trasformata, come appena mostrato, assicura la bi-univocità; infine, il fatto che l'antitrasformata sia lineare è ovvio dalla definizione, e la sua continuità può essere mostrata esattamente nello stesso modo in cui abbiamo trovato la continuità della trasformata –trovando quindi formule del tutto analoghe alle (2.2). \square

Lemma 2.12 (Identità forte di Parseval). *Date φ, ψ in \mathcal{S} , si ha*

$$\int \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi,$$

indicando con \bar{z} il coniugato di un qualunque numero $z \in \mathbb{C}$.

Proof. Visto che la trasformata è invertibile, e visto che $\overline{\psi}$ ovviamente sta in \mathcal{S} , esiste una funzione $f \in \mathcal{S}$ tale che $\widehat{f} = \overline{\psi}$; l'identità debole di Parseval (2.4) assicura allora che

$$\int \varphi \overline{\psi} = \int \varphi \widehat{f} = \int \widehat{\varphi} f;$$

d'altra parte, osserviamo che per la formula (2.3) dell'antitrasformata

$$f(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \overline{\psi(\xi)} d\xi = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \overline{\psi(\xi)} d\xi = \overline{\widehat{\psi}(x)},$$

e dunque abbiamo ottenuto la tesi. □

Corollario 2.13. *Data $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha*

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}.$$

Proof. Basta applicare l'identità forte di Parseval ricordando che

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \int \varphi^2 = \int \varphi \overline{\varphi}.$$

□

2.4 La trasformata di Fourier in L^1 e in L^2

Occupiamoci adesso di estendere la definizione di trasformata di Fourier a spazi un po' più generali di \mathcal{S} ; prima di tutto, osserviamo che la formula (2.1) ha senso anche per $\varphi \in L^1$, visto che la funzione $e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ è in L^∞ ; possiamo quindi usare esattamente la stessa formula e definire la trasformata di Fourier per funzioni in L^1 . Un primo risultato interessante è la regolarità della trasformata, nel senso del seguente lemma.

Lemma 2.14 (Lemma di Riemann–Lebesgue). *Se $\varphi \in L^1$, allora $\widehat{\varphi}$ è una funzione uniformemente continua che tende a 0 all'infinito.*

Proof. Intanto osserviamo che se $\varphi_k \in \mathcal{S}$ e $\varphi_k \xrightarrow{L^1} \varphi$, allora $\widehat{\varphi}_k$ tende uniformemente a $\widehat{\varphi}$ grazie al Lemma 2.5; allora dal Lemma 2.4 deduciamo che $\widehat{\varphi}$ è uniformemente continua, visto che il limite uniforme di funzioni uniformemente continue è uniformemente continuo. Allo stesso modo, il limite uniforme di funzioni che tendono a 0 all'infinito tende anch'esso a 0 all'infinito. □

In generale è facile osservare che non si può sperare in una maggiore regolarità per trasformate di funzioni L^1 ; tuttavia, si può dire molto di più nel caso di funzioni L^1 a supporto compatto.

Lemma 2.15. *Se $\varphi \in L^1$ è a supporto compatto, allora $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}$.*

Proof. Si ricordi la formula (2.2) per la derivata delle trasformate di funzioni in \mathcal{S} . Approssimando ancora φ in L^1 con funzioni di Schwartz, deduciamo che la formula per $\partial\widehat{\varphi}/\partial\xi_i$ è ancora valida purché $x_i\varphi$ sia ancora in L^1 . Dunque, la funzione $\widehat{\varphi}$ è infinitamente derivabile purché $x^\alpha\varphi$ sia in L^1 per ogni multi-indice α , cosa che in particolare è sicuramente vera se φ è a supporto compatto. \square

Osservazione 2.16. *Si osservi che, se $\varphi \in L^1 \setminus \mathcal{S}$ è a supporto compatto, allora è vero che $\widehat{\varphi}$ sta in \mathcal{E} , ma non sarà mai vero che $\widehat{\varphi}$ sia a supporto compatto; più in generale, non potrà essere $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, visto che altrimenti grazie all'antitrasformata dedurremmo che $\varphi \in \mathcal{S}$. Più in generale, si osservi che nel passaggio da una funzione alla sua trasformata vi è una sorta di "dualità" tra la regolarità e la decadenza all'infinito, nel senso che una delle due proprietà per φ assicura l'altra per $\widehat{\varphi}$.*

Concludiamo questa sezione osservando che la trasformata si può definire anche per funzioni in L^2 : infatti, grazie al Corollario 2.13, se $\varphi_k \in \mathcal{S}$ e $\varphi_k \xrightarrow{L^2} \varphi$, allora $\widehat{\varphi}_k$ è una successione di Cauchy in L^2 , ed è quindi sensato definire (in modo univoco!) il suo limite *trasformata di Fourier di $\varphi \in L^2$* . Tuttavia, in questo caso *non* vale la formula (2.1), visto che per una generica funzione in L^2 l'integrale a destra può tranquillamente non essere definito. Pur non essendo definita da una formula chiusa ma solo per densità, la trasformata di Fourier in L^2 è molto utile soprattutto grazie al seguente risultato.

Teorema 2.17 (Plancharel). *La trasformata di Fourier è un'isometria su L^2 .*

Proof. E' evidente grazie al Corollario 2.13. \square

Si osservi dunque che la trasformata manda \mathcal{S} in sé in modo biunivoco e bicontinuo, e lo stesso accade –per di più con un'isometria!– con L^2 . La stessa cosa *non* accade né con L^1 , né con \mathcal{D} , né tantomeno con \mathcal{E} , visto che su \mathcal{E} la trasformata di Fourier non si può definire.

2.5 La trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate

Un'ultima estensione della trasformata di Fourier può essere data su \mathcal{S}' , ossia lo spazio delle distribuzioni temperate. In effetti, grazie all'identità debole di Parseval, è evidente che possiamo definire una trasformata su \mathcal{S}' (che estende quella usuale nel senso dell'inclusione $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$) come segue.

Definizione 2.18. *Sia $T \in \mathcal{S}'$. Si definisce allora $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$ come*

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Possiamo subito generalizzare le formule (2.2) anche alle trasformate di Fourier su \mathcal{S}' .

Lemma 2.19. *Data una distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$, si ha*

$$\frac{\partial \widehat{T}}{\partial \xi_i} = -2\pi i \widehat{x_i T}, \quad \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} = 2\pi i \xi_i \widehat{T}. \quad (2.6)$$

Proof. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$; allora, usando la formula (2.2) possiamo valutare

$$\begin{aligned} \langle \widehat{x_i T}, \varphi \rangle &= \langle x_i T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, x_i \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \frac{1}{2\pi i} \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \langle T, \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \langle \widehat{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \langle \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Si noti che, per mostrare la prima formula in (2.6) abbiamo usato la seconda formula in (2.2), cioè quella non corrispondente a quella che volevamo mostrare, per dualità. La seconda formula in (2.6) si mostra esattamente allo stesso modo, scaricando derivata e trasformata sulla funzione regolare ed utilizzando la prima formula in (2.2). \square

Ovviamente si possono ottenere con una banale induzione anche le formule per le derivate generiche come nel Corollario 2.8

Esempio 2.20. Usando la formula (2.6) e quanto già noto per le distribuzioni, abbiamo $\widehat{\delta} = 1$, $\widehat{1} = \delta$, $\widehat{D^\alpha \delta} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha$, e così via.

Capitolo 3

Definizione di Spazi di Sobolev

3.1 Lo spazio $W^{1,1}(I)$

Consideriamo i due semplici problemi

$$\min \left\{ \mathcal{F}(u) := \int_I (u'(t)^2 - 1)^2 dt : u \in C^1(I), u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (3.1)$$

$$\min \left\{ \mathcal{G}(u) := \int_I \left| |u'(t)| - 1 \right| dt : u \in C^1(I), u(0) = u(1) = 0 \right\} \quad (3.2)$$

essendo $I = [0, 1]$. E' molto semplice osservare che $\mathcal{F}(u) > 0$ e $\mathcal{G}(u) > 0$ per ogni $u \in C^1(I)$, ma che gli inf di \mathcal{F} e di \mathcal{G} valgono 0. Dunque i problemi non hanno soluzione. Trattiamo allora per il momento il primo problema, anche se tutto quello che diremo può essere fatto in modo identico per il secondo: consideriamo una successione minimizzante u_h , per la quale $\mathcal{F}(u_h) \rightarrow 0$, ad esempio una successione che tenda alla funzione $\bar{u}(x) = 1/2 - |x - 1/2|$ (non una qualsiasi, quella ovvia, comunque disegnata alla lavagna). Si ha ovviamente che $\bar{u} \notin C^1(I)$, e che $u_h \rightarrow \bar{u}$ puntualmente ed anche uniformemente; tuttavia visto che \mathcal{F} si interessa alle derivate prime delle funzioni, è chiaro che una convergenza delle u_h non sia abbastanza interessante. Si guardino allora le derivate u'_h , e si noti che in effetti anche \bar{u} ammette derivata dovunque tranne nel punto $1/2$; possiamo allora prendere la funzione che vale 1 tra 0 e $1/2$ e -1 tra $1/2$ ed 1, che “avrebbe voglia” di essere la derivata di \bar{u} , ed indichiamola come \bar{u}' . La funzione \bar{u}' è chiaramente in $L^1(I)$, ed inoltre si ha che $u'_h \xrightarrow{L^1} \bar{u}'$: se avesse senso parlare di $\mathcal{F}(\bar{u})$, sarebbe verosimile che $\mathcal{F}(\bar{u}) = 0$ e che quindi \bar{u} fosse un minimo. Possiamo allora dotare $C^1(I)$ della norma, che chiamiamo $W^{1,1}$ senza commentare per adesso il nome, definita come segue.

$$\|u\|_{W^{1,1}(I)} = \|u\|_{L^1(I)} + \|u'\|_{L^1(I)}. \quad (3.3)$$

E' immediato osservare che $\|\cdot\|_{W^{1,1}(I)}$ sia una norma su $C^1(I)$, ma anche che lo spazio $C^1(I)$ non sia completo rispetto a questa norma (ad esempio, la successione u_h definita sopra è di Cauchy ma non converge).

Definiamo allora $W^{1,1}(I)$ come il completamento dello spazio normato $C^1(I)$ con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,1}(I)}$ nel senso della Sezione 0.5. Abbiamo quindi uno spazio normato completo, che per il momento è scomodo da usare perché i suoi elementi sono successioni di Cauchy di funzioni C^1 . Tuttavia, si può osservare subito quanto segue.

Lemma 3.1. *Dato $\{u_h\} \in W^{1,1}(I)$, esistono due funzioni $u, u' \in L^1(I)$ tali che $u_h \rightarrow u$ e $u'_h \rightarrow u'$ in $L^1(I)$, ed inoltre $\|\{u_h\}\|_{W^{1,1}(I)} = \|u\|_{L^1(I)} + \|u'\|_{L^1(I)}$. Inoltre, date $\{u_h\}$ e $\{v_h\}$ in $W^{1,1}(I)$, se si ha $u = v$ e $u' = v'$ in $L^1(I)$ allora $\{u_h\} = \{v_h\}$ in $W^{1,1}(I)$.*

Proof. La prima parte è praticamente ovvia visto che u_h e u'_h sono successioni di Cauchy nello spazio completo $L^1(I)$. Per quanto riguarda la seconda parte, se $u = v$ e $u' = v'$ allora $u_h - v_h$ e $u'_h - v'_h$ sono successioni che tendono a 0 in $L^1(I)$, e quindi $\{u_h - v_h\} = 0$ in $W^{1,1}(I)$. \square

Grazie al risultato appena mostrato, vi è un'ovvia inclusione di $W^{1,1}(I)$ in $(L^1(I))^2$, e quindi possiamo considerare gli elementi di $W^{1,1}(I)$ non come classi di equivalenza di funzioni C^1 ma come coppie di funzioni L^1 (che indicheremo per comodità con (u, u')), il che è molto più maneggevole; tra l'altro, come abbiamo appena visto, la formula (3.3) continua ad essere valida in tutto $W^{1,1}(I)$. Questa identificazione è sensata dal momento che vale quanto segue.

Osservazione 3.2. *Si noti che l'inclusione di $W^{1,1}(I)$ in $(L^1(I))^2$ che discende dal Lemma 3.1 è una immersione, ossia è un omomorfismo che è un isomorfismo con l'immagine; in particolare, è anche un'isometria se si usa come norma in $(L^1(I))^2$ la somma delle norme nei due spazi. E' quindi sensato anche a livello di spazi di Banach considerare $W^{1,1}(I)$ come sottoinsieme di $(L^1(I))^2$.*

In realtà, si può mostrare qualcosa di più preciso.

Lemma 3.3. *Siano (u, u') e (v, v') due elementi di $W^{1,1}(I)$ tali che $u = v$ in $L^1(I)$. Allora anche $v = v'$ in $L^1(I)$.*

Alla dimostrazione di questo lemma premettiamo un semplice risultato tecnico.

Lemma 3.4. *Se $u \in L^1(I)$ e per ogni $\varphi \in C_0^1(I)$ si ha $\int_I u\varphi = 0$, allora $u = 0$.*

Proof. Prendiamo $u \neq 0$ in $L^1(I)$; deve allora esistere un intervallo $(a, b) \subset\subset I$ tale che

$$\int_{(a,b)} u = \lambda > 0$$

a meno di cambiare di segno u , e per l'assoluta continuità delle funzioni L^1 esiste inoltre un $\varepsilon > 0$ tale che se $A \subseteq I$ ha misura minore di ε allora

$$\int_A |u| \leq \frac{\lambda}{3};$$

possiamo supporre ovviamente che $0 < a - \varepsilon < b + \varepsilon < 1$. Prendiamo allora una funzione φ di classe C^1 , che si annulli fuori dall'intervallo $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, che valga 1 nell'intervallo (a, b) , e che abbia un valore compreso tra 0 e 1 in tutto l'intervallo $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Si ha chiaramente

$$\int_I u\varphi = \int_{a-\varepsilon}^a u\varphi + \int_a^b u\varphi + \int_b^{b+\varepsilon} u\varphi \geq - \int_{a-\varepsilon}^a |u| + \int_a^b u - \int_b^{b+\varepsilon} |u| \geq \frac{\lambda}{3} > 0,$$

ed essendo $\varphi \in C_0^1(I)$ si è mostrata la tesi. \square

Proof. (del Lemma 3.3): Per linearità, possiamo supporre che $u = v = 0$, e quindi ci siamo ricondotti a mostrare che se $(0, u') \in W^{1,1}(I)$ allora deve essere $u' = 0$ in $L^1(I)$. Per il Lemma 3.4 è sufficiente prendere una funzione $\varphi \in C_0^1(I)$ e verificare che $\int_I u' \varphi = 0$. Essendo $(0, u') \in W^{1,1}(I)$, sappiamo che esiste una successione $\{u_h\}$ di funzioni C^1 tali che $u_h \rightarrow 0$ e $u'_h \rightarrow u'$ in $L^1(I)$. Applicando la derivazione per parti sulle funzioni regolari u_h e φ , e ricordando che φ si annulla in 0 ed in 1 essendo a supporto compatto, abbiamo

$$\int_I u'_h \varphi = - \int_I u_h \varphi'.$$

Dal momento che φ è di classe C^1 , in particolare φ e φ' sono funzioni L^∞ , e quindi passando al limite nell'identità appena trovata con $h \rightarrow \infty$ troviamo subito

$$\int_I u' \varphi = \lim \int_I u'_h \varphi = - \lim \int_I u_h \varphi' = 0.$$

Abbiamo quindi trovato $u' = 0$ come si voleva. \square

Il risultato appena mostrato migliora ancora la situazione: lo spazio $W^{1,1}(I)$ non è solo un sottospazio di $(L^1(I))^2$, ma anche un sottospazio di $L^1(I)$! Gli elementi di $W^{1,1}(I)$, in particolare, sono particolari funzioni L^1 . Si faccia però attenzione a quanto segue, con riferimento all'Osservazione 3.2: è vero che lo spazio $W^{1,1}(I)$ è un sottospazio di $L^1(I)$, ma la sua norma *non* è equivalente alla norma di $L^1(I)$. Anzi, visto che le funzioni $C^1(I)$ sono elementi di $W^{1,1}(I)$, si ottiene subito che lo spazio $W^{1,1}(I)$ è denso in $L^1(I)$ rispetto alla norma di $L^1(I)$; non è d'altra parte vero che $W^{1,1}(I)$ sia denso in $L^1(I)$ con la sua norma, come si capisce immediatamente essendo $W^{1,1}(I)$ completo! Lo spazio $W^{1,1}(I)$ possiede quindi due norme interessanti, la sua e quella che deriva dall'inclusione in $L^1(I)$ (e sarà opportuno rendersi conto quando useremo la prima, cioè quasi sempre, e quando useremo la seconda).

Si può osservare il

Teorema 3.5. *Se $u \in W^{1,1}(I)$, allora u è uniformemente continua; in particolare, per ogni $x, y \in I$ si ha*

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t) dt. \quad (3.4)$$

Proof. Prendiamo una successione (u_h, u'_h) in $C^1(I)$ che tenda ad u nel senso di $W^{1,1}(I)$; allora per ogni $h \in \mathbb{N}$, essendo u_h una funzione regolare, sappiamo che per ogni coppia x, y vale

$$u_h(x) - u_h(y) = \int_y^x u'_h(t) dt = \langle u'_h, \chi_{[y,x]} \rangle_{L^1, L^\infty}.$$

Dal momento che u'_h converge fortemente ad u' in $L^1(I)$, si può passare al limite ottenendo

$$\lim_{h \rightarrow \infty} u_h(x) - u_h(y) = \int_y^x u'(t) dt.$$

Visto che le funzioni u_h tendono fortemente ad u in L^1 , a meno di sottosuccessioni convergono puntualmente quasi ovunque; ma allora per quasi ogni x ed y in I si ha la validità della (3.4); essendo $u' \in L^1(I)$, otteniamo che la u è uniformemente continua su un sottoinsieme denso di I , e quindi esiste una funzione uniformemente continua \bar{u} tale che $u = \bar{u}$ quasi ovunque su I e dunque $u = \bar{u}$ in L^1 . Ma allora la successione (u_h, u'_h) tende a (\bar{u}, u') nel senso di $W^{1,1}(I)$ e quindi (\bar{u}, u') è anch'esso un elemento di $W^{1,1}(I)$, e in effetti coincide con (u, u') . Abbiamo quindi ottenuto l'uniforme continuità di (un rappresentante della classe di equivalenza di) u , ed allora la formula (3.4) vale per ogni x ed y ed in particolare la tesi è ottenuta. \square

Lo spazio $W^{1,1}(I)$ è dunque uno sottospazio “molto piccolo” di $L^1(I)$, visto che contiene solo funzioni uniformemente continue. Si noti che, nel corso della dimostrazione precedente, abbiamo in particolare osservato come due funzioni che coincidano quasi ovunque sono anche uguali in $W^{1,1}(I)$, cosa non ovvia a priori. E' molto utile, adesso, osservare che la proprietà (3.4) data dal Teorema 3.5 caratterizza lo spazio $W^{1,1}(I)$, il che ci permetterà di usare funzioni di $W^{1,1}(I)$ senza bisogno di pensare ogni volta alle successioni di Cauchy che le definiscono. In effetti, come è facile immaginare basta richiedere la (3.4) nel caso $y = 0$, e poi seguirà per tutti gli y per linearità.

Proposizione 3.6. *Siano $u, v \in L^1(I)$ tali che per ogni $x \in I$ vale*

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t) dt. \quad (3.5)$$

Allora $u \in W^{1,1}(I)$ e $v = u'$.

Proof. Dalla (3.5) otteniamo subito che la funzione u è continua, e quindi è ben definita ovunque su I . Possiamo allora prendere una successione v_h di funzioni continue tali che $v_h \rightarrow v$ in $L^1(I)$, e definire poi

$$u_h(x) := u(0) + \int_0^x v_h(t) dt.$$

In questo modo, $\{u_h\}$ è una successione di funzioni in $C^1(I)$ le cui derivate sono proprio le v_h . Vogliamo dimostrare che $(u_h, v_h) \rightarrow (u, v)$ nel senso di $W^{1,1}(I)$, il che concluderà la tesi.

Il fatto che $v_h \rightarrow v$ in $L^1(I)$ è vero per costruzione; d'altra parte, per ogni $x \in I$ si ha

$$|u_h(x) - u(x)| = \left| \int_0^x v_h(t) - v(t) dt \right| \leq \int_0^x |v_h(t) - v(t)| dt \leq \|v_h - v\|_{L^1(I)}.$$

Ma allora le u_h tendono ad u addirittura uniformemente, e quindi in particolare tendono in L^1 ed abbiamo quanto cercato. \square

In pratica, il Teorema 3.5 e la Proposizione 3.6 ci assicurano che lo spazio $W^{1,1}(I)$ è caratterizzato completamente dalla (3.4); dunque potremmo definire in modo equivalente $W^{1,1}(I)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^1(I)$ che ammettono una funzione in $L^1(I)$, che chiamiamo “derivata” ed indichiamo con u' , per le quali la (3.4) vale. Notiamo che ogni funzione $u \in C^1(I)$ appartiene per costruzione a $W^{1,1}(I)$, ed u' coincide con la derivata classica.

Vediamo ora una importante conseguenza di quanto visto sopra.

Proposizione 3.7. *La convergenza $W^{1,1}(I)$ implica la convergenza uniforme; in altre parole, se $u_h \xrightarrow{W^{1,1}(I)} u$, allora $u_h \rightarrow u$ anche uniformemente.*

Proof. Ricordando la (3.5) otteniamo subito che per ogni $u, v \in W^{1,1}(I)$ si ha

$$|u(x) - v(x)| \leq |u(0) - v(0)| + \int_0^x |u'(t) - v'(t)| dt \leq |u(0) - v(0)| + \|u' - v'\|_{L^1(I)}. \quad (3.6)$$

In particolare se $u_h \xrightarrow{W^{1,1}(I)} u$ si deduce che, definendo

$$\tilde{u}_h(x) := u_h(x) + u(0) - u_h(0),$$

si ha $\|u_h - u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'_h - u'\|_{L^1(I)}$ e dunque segue la convergenza uniforme delle \tilde{u}_h alla u . Di conseguenza, la convergenza uniforme delle u_h alla u vale se e solo se $u_h(0) \rightarrow u(0)$. D'altra parte, ancora applicando la disuguaglianza triangolare nella (3.5) si ha anche che

$$|u_h(x) - u(x)| \geq |u_h(0) - u(0)| - \|u'_h - u'\|_{L^1(I)},$$

che nel caso in cui $u_h(0) \not\rightarrow u(0)$ ma $u_h \xrightarrow{W^{1,1}(I)} u$ porta ad un assurdo. \square

Corollario 3.8. *Lo spazio*

$$W_0^{1,1}(I) := \left\{ u \in W^{1,1}(I) : u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

è un ben definito sottospazio chiuso di $W^{1,1}(I)$, e dunque è anch'esso uno spazio di Banach; inoltre $W_0^{1,1}(I) \subseteq L^\infty(I)$ e per ogni $u \in W_0^{1,1}(I)$ si ha

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}, \quad \|u\|_{W^{1,1}(I)} \approx \|u'\|_{L^1(I)}. \quad (3.7)$$

Proof. Gli elementi di $W^{1,1}(I)$ sono uniformemente continui, per cui ha senso chiedere che $u(0) = u(1) = 0$ e quindi lo spazio $W_0^{1,1}(I)$ è ben definito. Visto che siamo in ambiente normato, e quindi metrico, la chiusura è equivalente alla chiusura sequenziale; di conseguenza, per verificare che $W_0^{1,1}(I)$ sia chiuso è sufficiente prendere una successione $u_h \in W_0^{1,1}(I)$ che converga ad u , e controllare che $u \in W_0^{1,1}(I)$: ma questo è immediato grazie alla convergenza uniforme mostrata nella Proposizione 3.7.

Si prenda ora $u \in W_0^{1,1}(I)$: il fatto che $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}$ discende immediatamente dalla (3.6) applicata con $v \equiv 0$. Dalla disuguaglianza di Hölder, poi, abbiamo che

$$\|u\|_{L^1(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Si ha allora

$$\|u'\|_{L^1(I)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(I)} \leq 2 \|u'\|_{L^1(I)} :$$

questo assicura che, sullo spazio $W_0^{1,1}(I)$ (ma chiaramente non su tutto $W^{1,1}(I)$!), la norma $W^{1,1}$ è equivalente alla norma L^1 della derivata, e quindi abbiamo concluso. \square

Torniamo adesso ai funzionali \mathcal{F} e \mathcal{G} dai quali eravamo partiti. Per quanto riguarda \mathcal{G} , si può osservare quanto segue.

Lemma 3.9. *La formula (3.2) definisce un funzionale continuo e coercivo $\mathcal{G} : W_0^{1,1}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ (che ovviamente coincide con il funzionale precedente su $C_0^1(I)$). Di conseguenza, se $u \in W_0^{1,1}(I)$, per ogni successione $\{u_h\} \subseteq C_0^1(I)$ per cui si abbia $u_h \xrightarrow{W^{1,1}(I)} u$, è anche $\mathcal{G}(u_h) \rightarrow \mathcal{G}(u)$. Infine, il funzionale \mathcal{G} è coercivo, continuo, ed ammette minimi assoluti su $W_0^{1,1}(I)$.*

Proof. Innanzitutto è chiaro che se $u' \in L^1(I)$ il funzionale $\mathcal{G}(u)$ risulta ben definito. Date poi u e v in $W^{1,1}(I)$, si può osservare subito che

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(v)| &= \left| \int_0^1 \left| |u'(t)| - 1 \right| - \left| |v'(t)| - 1 \right| dt \right| \leq \int_0^1 |u'(t) - v'(t)| dt = \|u' - v'\|_{L^1(I)} \\ &\leq \|u - v\|_{W^{1,1}(I)}. \end{aligned}$$

Ne consegue che il funzionale \mathcal{G} è addirittura Lipschitziano con costante 1, e dunque è anche continuo. Per quanto riguarda la coercività, si ha chiaramente $\mathcal{G}(u) \geq \|u'\|_{L^1(I)} - 1$, e quindi \mathcal{G} è coercivo rispetto alla norma $L^1(I)$; visto che su $W_0^{1,1}(I)$ la norma $L^1(I)$ delle derivate e la norma $W^{1,1}(I)$ sono equivalenti grazie alla (3.7), si ha la coercività richiesta.

Per quanto riguarda l'esistenza di minimi assoluti, visto che $\mathcal{G}(u) \geq 0$ per ogni $u \in W^{1,1}(I)$ e che chiaramente l'inf di \mathcal{G} è 0 (visto che l'inf era già zero in $C_0^1(I) \subseteq W_0^{1,1}(I)$...) è sufficiente osservare che esistano funzioni u con $\mathcal{G}(u) = 0$. E d'altra parte, questo è evidente visto che basta prendere qualunque funzione $u \in W_0^{1,1}(I)$ con $u' = \pm 1$ quasi ovunque, ad esempio $\bar{u}(x) = 1/2 - |x - 1/2|$.

E' importante osservare che l'esistenza di minimi non può essere assicurata dal Metodo Diretto: è infatti vero, come già osservato, che \mathcal{G} sia semicontinuo inferiore e coercivo, tuttavia non è vero che le palle di $W_0^{1,1}(I)$ siano sequenzialmente compatte in topologia forte, visto che questo è vero solo per spazi vettoriali finito-dimensionali! \square

Esempio 3.10. *Si può notare che lo spazio $W_0^{1,1}(I)$, essendo per definizione completo, sembra più adatto di $C_0^1(I)$ per avere minimi a funzionali "sensati"; per questo non è particolarmente sorprendente che il funzionale \mathcal{G} , che non ammette minimo su $C_0^1(I)$, lo ammetta invece su $W_0^{1,1}(I)$. E' tuttavia importante osservare che per mostrare l'esistenza di un minimo non abbiamo utilizzato il Metodo Diretto, visto che in topologia forte le palle non sono sequenzialmente relativamente compatte, e che d'altra parte il funzionale \mathcal{G} non è semicontinuo inferiormente in topologia debole. Si consideri in effetti il funzionale*

$$\min \left\{ \mathcal{H}(u) := \int_I \left| |u'(t)| - 1 \right| + |u(t)|^2 dt : u \in W_0^{1,1} \right\} :$$

anche per questo funzionale è immediato osservare la coercività e la Lipschitzianità, e non poter osservare l'esistenza di minimi col Metodo Diretto. Tuttavia, questo funzionale effettivamente non ammette minimi, dal momento che chiaramente l'inf di \mathcal{H} è 0, ma una funzione $u \in W_0^{1,1}(I)$ per cui valga $\mathcal{H}(u) = 0$ dovrebbe essere nulla ed avere derivata uguale a ± 1 quasi ovunque, mentre sappiamo che la funzione nulla ha derivata nulla nel senso debole di $W^{1,1}(I)$.

3.2 Gli spazi $W^{1,p}(I)$ con $1 < p < \infty$

Per quanto riguarda il funzionale \mathcal{F} non si può ripetere lo stesso argomento appena fatto per \mathcal{G} , in quanto se $u' \in L^1(I)$ non è detto che l'integrale in (3.1) sia finito: si capisce subito che servirebbe l'ipotesi che $u' \in L^4(I)$. Ma tutti i discorsi che abbiamo fatto su $W^{1,1}(I)$ ci possono suggerire di modificare la definizione in modo da considerare funzioni per le quali u' stia in L^4 . In particolare, per ogni $p \in (1, +\infty)$ possiamo definire la norma su $C^1(I)$ data da

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}, \quad (3.8)$$

e definire $W^{1,p}(I)$ come il completamento di $C^1(I)$ con questa norma. Ripercorrendo quanto fatto per $W^{1,1}(I)$, con le stesse identiche dimostrazioni possiamo mostrare che tutti i risultati si generalizzano. Più precisamente, vale il

Teorema 3.11. *Per ogni elemento $\{u_h\} \in W^{1,p}(I)$ esistono e sono uniche due funzioni $u, u' \in L^p(I)$ tali che $u_h \xrightarrow{L^p(I)} u$ e $u'_h \xrightarrow{L^p(I)} u'$; questo dà un'immersione di $W^{1,p}(I)$ in $(L^p(I))^2$, che è un'isometria con l'opportuna norma prodotto su $(L^p(I))^2$. La formula (3.8) vale su tutto lo spazio $W^{1,p}(I)$. Se (u, u') e (u, v') sono in $W^{1,p}(I)$ allora $u' = v'$ in $L^p(I)$. La funzione $u \in L^p(I)$ appartiene a $W^{1,p}(I)$ ed $u' \in L^p(I)$ è la sua derivata debole se e solo se per ogni $x, y \in I$ si ha la (3.4). In particolare gli elementi di $W^{1,p}(I)$ sono funzioni uniformemente continue, e si ha*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,1}(I) : u \in L^p(I), u' \in L^p(I)\}.$$

La convergenza $W^{1,p}$ assicura la convergenza uniforme e di conseguenza lo spazio

$$W_0^{1,p}(I) := \left\{ u \in W^{1,p}(I) : u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

è un ben definito sottospazio chiuso di $W^{1,p}(I)$, dunque uno spazio di Banach. Per funzioni di $W_0^{1,p}(I)$, infine, si ha

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \|u\|_{W^{1,p}(I)} \approx \|u'\|_{L^p(I)}. \quad (3.9)$$

Nel mostrare i singoli enunciati di questo teorema, si deve ricordare che per ogni $p \in (1, \infty)$ vale l'inclusione $L^p(I) \subseteq L^1(I)$ ed inoltre $\|\cdot\|_{L^1(I)} \leq \|\cdot\|_{L^p(I)}$. Questo ci permette di estendere su $W_0^{1,4}(I)$ il funzionale \mathcal{F} .

Lemma 3.12. *La formula (3.1) definisce un funzionale continuo e coercivo $\mathcal{F} : W_0^{1,4}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ (che ovviamente coincide con il funzionale precedente su $C_0^1(I)$). Di conseguenza, se $u \in W_0^{1,4}(I)$, per ogni successione $\{u_h\} \subseteq C_0^1(I)$ per cui si abbia $u_h \xrightarrow{W^{1,4}(I)} u$, è anche $\mathcal{F}(u_h) \rightarrow \mathcal{F}(u)$. Infine, il funzionale \mathcal{F} ammette minimi assoluti su $W_0^{1,4}(I)$.*

Prima di mostrare questo risultato, è utile osservare una proprietà delle funzioni L^p su un generico insieme Ω .

Lemma 3.13. *Sia $1 \leq p < +\infty$, e siano $\varphi, \psi \in L^p(\Omega)$. Si ha*

$$\| |\varphi|^p - |\psi|^p \|_{L^1(\Omega)} \leq p \left(\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \|\psi\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \right) \|\varphi - \psi\|_{L^p(\Omega)} .$$

Proof. Sia $x \in \Omega$: si ha allora, per un opportuno $\xi \in (|\varphi(x)| \wedge |\psi(x)|, |\varphi(x)| \vee |\psi(x)|)$,

$$\left| |\varphi(x)|^p - |\psi(x)|^p \right| = \left| |\varphi(x)| - |\psi(x)| \right| p \xi^{p-1} \leq p (|\varphi(x)|^{p-1} + |\psi(x)|^{p-1}) |\varphi(x) - \psi(x)| .$$

Usando ora la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned} \| (|\varphi|^{p-1} + |\psi|^{p-1})(\varphi - \psi) \|_{L^1(\Omega)} &\leq \| |\varphi|^{p-1} + |\psi|^{p-1} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|\varphi - \psi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left(\| |\varphi|^{p-1} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} + \| |\psi|^{p-1} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \right) \|\varphi - \psi\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left(\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \|\psi\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \right) \|\varphi - \psi\|_{L^p(\Omega)} , \end{aligned}$$

e quindi la tesi segue immediatamente. \square

Proof. (del Lemma 3.12): Nel caso in cui $u' \in L^4(I)$, si ha che $\int_I u'^4(t) dt < \infty$ è ben definito; visto che $L^4(I) \subseteq L^2(I)$ si ha anche la buona definizione di $\int_I u'^2(t) dt$, e dunque il funzionale $\mathcal{F}(u)$ dato dalla formula (3.1) è ben definito su $W_0^{1,4}(I)$, mentre non è ben definito su $W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < 4$. Si prendano poi $u, v \in W_0^{1,4}(I)$: usando il Lemma 3.13, e ricordando il fatto che se $\omega \in L^p(I)$ allora per ogni $q < p$ si ha $\|\omega\|_{L^q(I)} \leq \|\omega\|_{L^p(I)}$ (conseguenza banale di Hölder), si ottiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)| &\leq \int_0^1 \left| |u'|^4 - |v'|^4 \right| dt + 2 \int_0^1 \left| |u'|^2 - |v'|^2 \right| dt \\ &\leq 4 \left(\|u'\|_{L^4(I)}^3 + \|v'\|_{L^4(I)}^3 \right) \|u' - v'\|_{L^4(I)} + 4 \left(\|u'\|_{L^2(I)} + \|v'\|_{L^2(I)} \right) \|u' - v'\|_{L^2(I)} \\ &\leq 8 \left(\|u'\|_{L^4(I)}^3 + \|v'\|_{L^4(I)}^3 + 2 \right) \|u' - v'\|_{L^4(I)} \\ &\leq 8 \left(\|u'\|_{W^{1,4}(I)}^3 + \|v'\|_{W^{1,4}(I)}^3 + 2 \right) \|u - v\|_{W^{1,4}(I)} . \end{aligned}$$

Questo assicura immediatamente che \mathcal{F} è non solo continuo, ma anche localmente Lipschitziano (ma non globalmente Lipschitziano come accadeva per \mathcal{G}). Per quanto riguarda la coercività, si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_I u'^4 - 2u'^2 + 1 \geq \|u'\|_{L^4(I)}^4 - 2\|u'\|_{L^2(I)}^2 \geq \|u'\|_{L^4(I)}^4 - 2\|u'\|_{L^4(I)}^2 \\ &= \|u'\|_{L^4(I)}^2 \left(\|u'\|_{L^4(I)}^2 - 2 \right) , \end{aligned}$$

per cui \mathcal{F} è coercivo rispetto alla norma L^4 di u' , che nello spazio $W_0^{1,4}(I)$ è equivalente alla norma $W^{1,4}$ per la (3.9), e quindi si ha la coercività richiesta.

Ancora una volta, il Metodo Diretto non può assicurare l'esistenza di minimi, visto che le palle non sono sequenzialmente relativamente compatte in topologia forte, ed il funzionale \mathcal{F} non è semicontinuo inferiore in topologia debole. D'altra parte, l'inf di \mathcal{F} è chiaramente 0, e quindi i minimi esistono e sono tutte e sole le funzioni $u \in W_0^{1,4}(I)$ con derivata uguale a ± 1 quasi ovunque. Si noti che, quindi, tutti i minimi sono in particolare funzioni in $W_0^{1,1}(I)$, e sono tutti e soli i minimi di \mathcal{G} . \square

3.3 Lo spazio $W^{1,\infty}(I)$

Come nel caso degli spazi L^p , il caso $p = \infty$ risulta molto interessante anche se va trattato con cautela perché ci sono alcune differenze col generico $p \in [1, \infty)$. Innanzitutto, ricordiamo che le funzioni regolari sono dense in tutti gli spazi L^p con $p < \infty$ ma non sono dense in L^∞ , come sottolineato nell'Osservazione 1.24: possiamo quindi definire, analogamente a (3.8),

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} = \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)} \quad (3.10)$$

per ogni $u \in C^1(I)$; tuttavia, se definissimo $W^{1,\infty}(I)$ come il completamento di $C^1(I)$ rispetto a questa norma, non otterremmo quello che abbiamo in mente: lo spazio $W^{1,\infty}(I)$ sarebbe composto di sole funzioni di classe C^1 , ed anzi si avrebbe $W^{1,\infty}(I) = C^1(I)$, che chiaramente non è quello che vogliamo. Una possibilità migliore, allora, potrebbe essere di utilizzare la caratterizzazione (3.4): possiamo cioè definire $W^{1,\infty}(I)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^\infty$ per le quali esiste una funzione $u' \in L^\infty$ tale che la (3.4) vale, e verificare poi che si tratti di uno spazio di Banach con la norma data dalla (3.10). In effetti faremo una cosa equivalente, che però ci fa comodo notare adesso per il futuro: partiamo quindi dalla caratterizzazione seguente.

Lemma 3.14. *Siano u, u' due funzioni di $L^p(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora la funzione u appartiene a $W^{1,p}(I)$ ed u' è la sua derivata debole se e solo se per ogni funzione $\varphi \in C_0^1(I)$ si ha*

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = - \int_I u'(x)\varphi(x)dx. \quad (3.11)$$

Proof. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora esiste una successione $\{u_h\} \subseteq C_0^1(I)$ tale che $u_h \xrightarrow{W^{1,p}} u$. Per funzioni di classe C^1 sappiamo che vale la regola di integrazione per parti, e visto che $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ si ottiene

$$\int_I u_h(x)\varphi'(x)dx = - \int_I u'_h(x)\varphi(x)dx.$$

Quando $h \rightarrow \infty$, $u_h \xrightarrow{L^p} u$ ed $u'_h \xrightarrow{L^p} u'$, e quindi visto che φ e φ' sono chiaramente in $L^{p'}$ si può passare al limite nell'uguaglianza di sopra e si ottiene (3.11).

Per quanto riguarda l'implicazione opposta, prendiamo $u, u' \in L^p(I)$ tali che valga la (3.11): grazie alla caratterizzazione del Teorema 3.11, sappiamo che per dimostrare che $u \in W^{1,p}(I)$ e che u' sia la sua derivata debole è sufficiente controllare che u sia continua e poi prendere due generici $x, y \in [0, 1]$ e verificare che

$$u(y) = u(x) + \int_x^y u'(t) dt. \quad (3.12)$$

Cominciamo allora scegliendo due punti di Lebesgue $x < y \in (0, 1)$, e sia $\varphi_h \in C_0^1(I)$ una

funzione di classe C^1 tale che

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t \leq x - 1/h^2 \\ h(t-x) & \text{per } x \leq t \leq x + 1/h \\ 1 & \text{per } x + 1/h + 1/h^2 \leq t \leq y - 1/h - 1/h^2 \\ h(y-t) & \text{per } y - 1/h \leq t \leq y \\ 0 & \text{per } y + 1/h^2 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad |\varphi'_h(t)| \leq h \quad \forall t \in (0, 1);$$

che una tale funzione esista è immediato. Applicando la (3.11) sappiamo che per ogni h si ha

$$\int_I u(x)\varphi'_h(x)dx = - \int_I u'(x)\varphi_h(x)dx;$$

osserviamo ora che per $h \rightarrow \infty$ il termine destro tende a

$$- \int_x^y u'(x) dx :$$

per $p > 1$ questo è immediato perché $u' \in L^p(I)$ e $\varphi_h \xrightarrow{L^p(I)} \chi_{[x,y]}$; per $p = 1$ non è vero che φ_h tenda a $\chi_{[x,y]}$ in L^∞ perché il limite L^∞ di funzioni continue è continuo; tuttavia, ricordando che $u' \in L^1$ e quindi si ha l'usuale assoluta continuità, e notando che φ_h è uniformemente limitata negli intervalli sempre più piccoli $(x - 1/h^2, x + 1/h + 1/h^2)$ e $(y - 1/h - 1/h^2, y + 1/h^2)$, si deduce comunque la convergenza detta sopra.

Studiamo ora il termine sinistro, che vale chiaramente

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\frac{1}{h}} u(t) dt - \int_{y-\frac{1}{h}}^y u(t) dt + \int_{x-\frac{1}{h^2}}^x u(t)\varphi'_h(t)dt + \int_{x+\frac{1}{h}}^{x+\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}} u(t)\varphi'_h(t)dt \\ & + \int_{y-\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}}^{y-\frac{1}{h}} u(t)\varphi'_h(t)dt + \int_y^{y+\frac{1}{h^2}} u(t)\varphi'_h(t)dt. \end{aligned}$$

La costruzione fatta assicura facilmente che (a meno di passare ad una sottosuccessione) il terzo, il quarto, il quinto ed il sesto membro tendono a zero, e quindi troviamo

$$u(x) - u(y) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\int_x^{x+\frac{1}{h}} u(t) dt - \int_{y-\frac{1}{h}}^y u(t) dt \right) = - \int_x^y u'(t) dt,$$

dunque la (3.12) risulta provata per tutti i punti di Lebesgue x ed y in $(0, 1)$. Ancora l'assoluta continuità di $u' \in L^p(I) \subseteq L^1(I)$ ci assicura allora che u è uniformemente continua, e allora la (3.12) in realtà vale per tutti i punti in I e sia ha la tesi. \square

Di conseguenza possiamo dare la seguente definizione per gli spazi $W^{1,p}(I)$ con qualunque $1 \leq p \leq \infty$, e per ogni $1 \leq p < \infty$ la definizione che daremo sarà equivalente alla precedente.

Definizione 3.15. *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Si definisce Spazio di Sobolev $W^{1,p}(I)$ l'insieme delle funzioni $u \in L^p(I)$ tali che esiste una funzione di L^p , denotata con u' e detta derivata debole di u , per la quale valga la (3.11) per ogni $\varphi \in C_0^1(I)$.*

Osservazione 3.16. Lo spazio $W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach con la norma $W^{1,p}$ data da

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} ,$$

in accordo con (3.3), (3.8) e (3.10). Questo ci era già noto per $1 \leq p < \infty$; per quanto riguarda il caso $p = \infty$, è chiaro che si tratti di una norma in quanto $\|\cdot\|_{L^\infty}$ è una norma su L^∞ ; e per quanto riguarda la completezza, basta prendere una successione $\{u_h\} \in W^{1,\infty}(I)$ di Cauchy; in particolare $\{u_h\}$ ed $\{u'_h\}$ sono successioni di Cauchy nello spazio completo $L^\infty(I)$ e quindi convergono in norma L^∞ a due funzioni u ed u' . Si ha allora $u_h \xrightarrow{W^{1,\infty}} u$ purché u appartenga a $W^{1,\infty}(I)$ ed abbia derivata u' . Che questo sia effettivamente vero, grazie al Lemma 3.14, segue subito visto che ogni funzione $\varphi \in C_0^1(I)$ appartiene ad L^1 così come la sua derivata: quindi la (3.11), vera con u_h al posto di u , segue anche per u semplicemente passando al limite.

Osservazione 3.17. E' importante notare che la (3.11) assicura che le derivate deboli non sono niente altro che le derivate distribuzionali. Un modo ancora equivalente di definire lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(I)$, quindi, è quello di parlare delle funzioni di classe L^p la cui derivata distribuzionale è ancora un elemento di $L^p(I)$.

Concludiamo osservando alcune proprietà delle inclusioni tra i diversi spazi che si possono dedurre facilmente da quanto fatto finora.

Lemma 3.18. Per ogni $1 \leq p \leq q \leq \infty$ si ha l'inclusione continua $W^{1,q}(I) \subseteq W^{1,p}(I)$; per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ e per ogni $1 < q \leq \infty$ si hanno le inclusioni compatte $W^{1,q}(I) \hookrightarrow L^p(I)$ e $W^{1,q}(I) \hookrightarrow C(I)$ con la norma del sup; per $q = 1$, si hanno le inclusioni continue di $W^{1,1}(I)$ in $L^\infty(I)$ ed in $C(I)$ e le inclusioni compatte $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^p(I)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.

Proof. Prima di tutto, visto che per $p \leq q$ si ha l'inclusione $L^q(I) \subseteq L^p(I)$, la prima classe di inclusioni è ovvia, ed avendo chiaramente norma al più 1 è anche un'inclusione continua.

Sia ora $q \geq 1$: sappiamo già che le funzioni di $W^{1,q}(I)$ sono continue e quindi limitate; in particolare, sia $u \in W^{1,q}(I)$ e sia $x \in I$ tale che $u(x) = \|u\|_{L^\infty(I)}$ (a meno di cambiare il segno ad u si può supporre che tale x esista). Allora dalla (3.4) si ha immediatamente che per ogni $y \in I$ è

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t) dt \leq |u(y)| + \|u'\|_{L^1(I)} ,$$

da cui integrando in y si trova

$$\|u\|_{L^\infty(I)} = u(x) \leq \|u\|_{L^1(I)} + \|u'\|_{L^1(I)} = \|u\|_{W^{1,1}(I)} \leq \|u\|_{W^{1,q}(I)} . \quad (3.13)$$

Questo ci assicura subito che un sottoinsieme limitato in $W^{1,q}(I)$ è un insieme di funzioni su I che sono equilimitate, il che dà subito l'inclusione continua di $W^{1,q}(I)$ in $C(I)$ ed in $L^\infty(I)$. Se poi $q > 1$, le funzioni sono anche equicontinue, anzi uniformemente equi-hölderiane, dal momento che

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \int_x^y |u'(t)| dt = \|u'\|_{L^1((x,y))} \leq \|u'\|_{L^q((x,y))} \|1\|_{L^{q'}((x,y))} \leq \|u'\|_{L^q(I)} |y - x|^{1/q'} \\ &\leq \|u\|_{W^{1,q}(I)} |y - x|^{1/q'} ; \end{aligned}$$

ovviamente l'equi-hölderianità funziona perché $q' < \infty$, e quindi è essenziale che sia $q > 1$. A questo punto la relativa compattezza di un sottoinsieme limitato di $W^{1,q}(I)$ rispetto alla norma del sup in $C(I)$ è data dal Teorema di Ascoli–Arzelà. Abbiamo quindi l'inclusione compatta di $W^{1,q}(I)$ in $C(I)$; visto poi che per ogni p si ha l'inclusione continua di $C(I)$ in $L^p(I)$, si conclude anche l'inclusione compatta di $W^{1,q}(I)$ con $q > 1$ in $L^p(I)$.

Per concludere, dobbiamo solo osservare l'inclusione compatta di $W^{1,1}(I)$ in $L^p(I)$ con $1 \leq p < \infty$: per mostrarla, prendiamo una successione $\{u_h\}$ in $W^{1,1}(I)$ che sia limitata dalla costante $K > 0$, e cerchiamo di osservare che una opportuna sottosuccessione converge forte in L^p . Come già osservato nella (3.13), $\{u_h\}$ è limitata dalla costante K anche in L^∞ , e quindi a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $u_h(x) \rightarrow u(x)$ per tutti gli $x \in \mathbb{Q} \cap I$, grazie ad un processo diagonale standard, con una opportuna $u : \mathbb{Q} \cap I \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo ora $x \notin \mathbb{Q}$, e supponiamo che

$$\limsup \left\{ u(y) : y \in \mathbb{Q}, y \rightarrow x \right\} - \liminf \left\{ u(y) : y \in \mathbb{Q}, y \rightarrow x \right\} > \frac{1}{M} : \quad (3.14)$$

questo vuol dire che possiamo prendere due numeri $\mathbb{Q} \ni y_1 < x < y_2 \in \mathbb{Q}$ arbitrariamente vicini ad x in modo che per $h \gg 1$ si abbia

$$\|u'_h\|_{L^1((y_1, y_2))} \geq \left| \int_{y_1}^{y_2} u'_h(t) dt \right| > \frac{1}{M},$$

e quindi la proprietà (3.14) può capitare solo per un numero *finito* di elementi $x \in I \setminus \mathbb{Q}$ (in particolare, al più per KM numeri). Ripetendo questa osservazione per tutti gli $M \in \mathbb{N}$, si può allora definire una funzione $u \in L^\infty(I)$ in modo che per tutti i punti $x \in I \setminus \mathbb{Q}$ tranne una quantità numerabile si ha $u(y) \rightarrow u(x)$ per gli $y \in \mathbb{Q}$ che tendono ad x ; si vede a questo punto facilmente (esercizio!) che $u_h \rightarrow u$ puntualmente ovunque tranne al più in numerabili punti, quindi in particolare quasi ovunque. Fissiamo allora $\varepsilon > 0$: visto che $u_h \rightarrow u$ quasi ovunque, se $h \gg 1$ abbiamo che

$$|A_\varepsilon^h| = \left| \left\{ x : |u_h(x) - u(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon;$$

abbiamo allora

$$\|u_h - u\|_{L^p(I)} \leq \|u_h - u\|_{L^p(I \setminus A_\varepsilon^h)} + \|u_h - u\|_{L^p(A_\varepsilon^h)} \leq \varepsilon + 2K\varepsilon^{1/p},$$

dal che finalmente deduciamo che $u_h \rightarrow u$ fortemente in L^p . □

Si noti che il risultato appena mostrato è sharp, visto che una successione di funzioni in $W^{1,1}(I)$ limitata che tenda puntualmente alla funzione caratteristica di $[1/2, 1]$ offre un banale controesempio alla compattezza delle inclusioni di $W^{1,1}(I)$ in $C(I)$ ed in $L^\infty(I)$.

3.4 Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$

Conclusa la lunga parentesi dedicata al caso dell'intervallo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, passiamo adesso al caso di un generico insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Facendo tesoro delle diverse caratterizzazioni equivalenti, ed in particolare dell'Osservazione 3.17, poniamo quindi la seguente definizione.

Definizione 3.19. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Siano poi $k \in \mathbb{N}$, e $1 \leq p \leq \infty$. Si definisce Spazio di Sobolev l'insieme $W^{k,p}(\Omega)$ dato da tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che per ogni multiindice α di lunghezza $|\alpha| \leq k$ si ha che la derivata distribuzionale $D^\alpha u$ è un elemento di $L^p(\Omega)$.*

Osservazione 3.20. *Per definizione si ha immediatamente che $W^{0,p}(\Omega) = L^p$.*

Lemma 3.21. *$W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proof. Il fatto che $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ sia una norma è immediato: la 1-omoogeneità è ovvia per linearità perché ogni norma L^p di qualunque derivata è 1-omogenea; la disuguaglianza triangolare è altrettanto ovvia ancora per linearità visto che ogni norma L^p di qualunque derivata verifica la disuguaglianza triangolare; e infine la norma $W^{k,p}$ di u si annulla se e solo se sono nulle la u e tutte le sue derivate, quindi se e solo se $u = 0$ nel senso di $W^{k,p}$. Per mostrare che $W^{k,p}(\Omega)$ sia di Banach, allora, basta controllare la completezza: prendiamo una successione di Cauchy $\{u_h\}$ su $W^{k,p}(\Omega)$: allora per ogni multiindice α con $|\alpha| \leq k$ si ha che la successione $\{D^\alpha u_h\}$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$ e dunque converge ad una funzione che chiameremo $\tilde{D}^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$. Per concludere dobbiamo mostrare che $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e che per ogni α si abbia $D^\alpha u = \tilde{D}^\alpha u$. Fissiamo allora α , prendiamo una funzione $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e cerchiamo di controllare che

$$\int_{\Omega} \tilde{D}^\alpha u \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi. \quad (3.15)$$

Per ogni h , la funzione u_h sta in $W^{k,p}(\Omega)$, e quindi sappiamo già che

$$\int_{\Omega} D^\alpha u_h \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_h D^\alpha \varphi.$$

Quando $h \rightarrow \infty$, sappiamo che $u_h \xrightarrow{L^p} u$ e che $D^\alpha u_h \xrightarrow{L^p} \tilde{D}^\alpha u$; visto che φ e $D^\alpha \varphi$ sono chiaramente funzioni in $L^p(\Omega)$, passando semplicemente al limite nell'ultima uguaglianza otteniamo (3.15) e quindi la tesi. \square

Nel caso dell'intervallo $\Omega = I$ abbiamo trovato piuttosto facilmente varie proprietà interessanti: in particolare, alcune definizioni equivalenti di spazi di Sobolev, e le immersioni dei vari spazi di Sobolev in spazi di Lebesgue o di funzioni continue, con stime sulle norme. Nel caso generale è importante fare molta attenzione: la definizione che stiamo utilizzando è la Definizione 3.19, e solo quella; non sarà affatto scontato, e neppure vero in generale, che siano valide altre definizioni equivalenti del tipo di quelle viste per $\Omega = I$. I prossimi due capitoli, in effetti, saranno dedicati rispettivamente allo studio della densità o meno delle funzioni regolari

negli spazi di Sobolev, e alla dimostrazione delle immersioni valide tra i vari spazi. Prima, però, andiamo avanti con un paio di definizioni e di osservazioni correlate.

La prima definizione riguarda il caso particolare $p = 2$, che ha proprietà particolarmente utili e per questo merita un nome a parte.

Definizione 3.22. Dato $k \in \mathbb{N}$, si denota $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Osservazione 3.23. Lo spazio $H^k(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{L^2}.$$

Infatti, è immediato osservare che questo sia un prodotto scalare e che $\langle u, u \rangle \approx \|u\|_{H^k}^2$.

Si può adesso trovare una relazione molto stretta tra gli spazi $H^k(\mathbb{R}^n)$ e la trasformata di Fourier.

Lemma 3.24. Data $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si ha che $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se

$$(1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n);$$

in particolare,

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| (1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.16)$$

Proof. Il Teorema di Plancharel ci assicura che una generica funzione φ sta in $L^2(\mathbb{R}^n)$ se e solo se la sua trasformata di Fourier $\widehat{\varphi}$ sta in $L^2(\mathbb{R}^n)$; si ha poi, per ogni α , la formula

$$\widehat{(D^{\alpha} u)}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^{\alpha} \widehat{u}(\xi);$$

abbiamo quindi che $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se per ogni multi-indice α di lunghezza minore o uguale a k la funzione $\xi^{\alpha} \widehat{u}$ sta in $L^2(\mathbb{R}^n)$. In particolare, visto che il Teorema di Plancharel assicura anche l'uguaglianza tra la norma L^2 di φ e quella di $\widehat{\varphi}$, la norma in H^k di u è equivalente a

$$\left(\int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^{\alpha}|^2 \widehat{u}(\xi)^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Enunciamo ora quanto segue: esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$ tali che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1(1 + |\xi|^2)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^{\alpha}|^2 \leq C_2(1 + |\xi|^2)^k;$$

visto che è immediato come da questo segua la tesi, per concludere è sufficiente dimostrare la nostra affermazione. In effetti, si noti che i termini nello sviluppo di

$$(1 + |\xi|^2)^k = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)^k$$

sono tutti e soli i termini del tipo $\xi_1^{2\alpha_1} \xi_2^{2\alpha_2} \dots \xi_n^{2\alpha_n}$ con $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq k$, il che vuol dire esattamente tutti i termini del tipo $(\xi^{\alpha})^2$ con il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di lunghezza $|\alpha| \leq k$. Si ha dunque la tesi. \square

Come conseguenza immediata del lemma appena visto, possiamo generalizzare la definizione di $H^k(\mathbb{R}^n)$ al caso di un qualunque esponente frazionario positivo, estendendo la Definizione 3.19 nel caso di esponente naturale.

Definizione 3.25. Per ogni $s \geq 0$ definiamo lo spazio di Sobolev frazionario $H^s(\mathbb{R}^n)$ come lo spazio di tutte le funzioni $u \in L^2$ tali che $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2$; si tratta di uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

nonché di uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^k} := \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi.$$

Lemma 3.26. Lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ è separabile se $p \neq \infty$, ed è riflessivo se $p \neq 1, \infty$.

Proof. E' sufficiente ricordare che le stesse proprietà valgono per gli spazi L^p , ed osservare che l'inclusione di $W^{k,p}(\Omega)$ in $(L^p(\Omega))^N$, dove $N = \#\{\alpha : |\alpha| \leq k\}$, data da $u \mapsto \{D^\alpha u, |\alpha| \leq k\}$ è un'isometria tra $W^{k,p}(\Omega)$ ed un sottoinsieme chiuso di $(L^p(\Omega))^N$, dove la chiusura è chiara visto che $W^{k,p}(\Omega)$ è completo. Visto che la separabilità e la riflessività passano ai sottospazi chiusi, si ha la tesi. Si noti però che *non* è vero che $(W^{k,p}(\Omega))' = W^{k,p'}(\Omega)!$ Anzi, essendo $W^{k,p}(\Omega)$ incluso in $L^p(\Omega)$, ed essendo un sottospazio denso visto che lo sono anche le funzioni C^∞ a supporto compatto, lo spazio $(W^{k,p}(\Omega))'$ è più grande di $L^p(\Omega)$. \square

Per concludere, vogliamo dare la definizione di $W_0^{k,p}(\Omega)$; verrebbe voglia di definirlo come le funzioni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ che valgono 0 sul bordo $\partial\Omega$, ma questo non ha senso se non sappiamo che gli elementi di $W^{k,p}(\Omega)$ sono funzioni continue fin sul bordo (quindi ci servirebbero uniformemente continue). E in effetti, come vedremo nei prossimi capitoli, solo per alcuni particolari valori di k, p ed n si ha che $W^{k,p}(\Omega)$ è fatto di funzioni uniformemente continue: dobbiamo quindi trovare un'altra definizione. Si può osservare come la scelta più utile sia la seguente.

Definizione 3.27. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $1 \leq p < \infty$: definiamo $W_0^{k,p}(\Omega)$ come la chiusura dentro $W^{k,p}(\Omega)$ del sottospazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω .

Si osservi che $W_0^{k,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{k,p}(\Omega)$, e che per $\Omega = I$ la definizione appena data coincide con quella delle scorse sezioni. Si osservi anche che *non* stiamo definendo lo spazio $W_0^{k,\infty}(\Omega)$, per il solito problema che le funzioni regolari non possono approssimare funzioni L^∞ ; si potrebbe definire $W_0^{k,\infty}(\Omega)$ solo nei casi in cui $W^{k,\infty}(\Omega)$ sia fatto da funzioni uniformemente continue, anche se in genere si evita comunque di farlo. Vediamo un'unica proprietà semplice degli spazi $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Lemma 3.28. Si ha $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Ricordiamo che, come osservato anche nell'Esempio ??, se una funzione $u \in L^p$ è supportata a distanza strettamente positiva dal bordo di Ω allora le sue regolarizzate $u * \rho_\varepsilon$ per $\varepsilon \ll 1$

sono ben definite funzioni C^∞ e convergono in norma $L^p(\Omega)$ ad u . In particolare questo vale per qualunque funzione L^p di \mathbb{R}^n .

Prendiamo allora $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, e definiamo le funzioni $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, che sono di classe C^∞ ; inoltre, visto che per le note proprietà della convoluzione si ha per ogni $|\alpha| \leq k$ che $D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha u * \rho_\varepsilon$, le u_ε convergono ad u in norma $W^{k,p}$. Fissiamo allora $\delta > 0$: esiste un ε tale che $\|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,p}} \leq \delta/2$; consideriamo allora $N \gg 1$, e sia $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare, a supporto compatto, tale che $\eta \equiv 1$ sulla palla di centro 0 e raggio N , e che sia η che tutte le sue derivate fino all'ordine k siano ovunque minori o uguali ad 1. E' chiaro che ηu_ε è una funzione C^∞ , e che è uguale ad u_ε sulla palla di raggio N , ed è immediato osservare che per N abbastanza grande si ha

$$\|u_\varepsilon - \eta u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u_\varepsilon - \eta u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n \setminus B(0,N))} \leq \delta/2,$$

da cui si conclude la tesi. □

Osservazione 3.29. *E' invece facile osservare che se Ω è diverso da \mathbb{R}^n allora $W_0^{k,p}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}(\Omega)$: ad esempio, se Ω è limitato si capisce che la funzione costantemente 1 non può essere approssimata con funzioni a supporto compatto, e che in generale se Ω ha un po' di bordo non si può approssimare una funzione che valga 1 su un pezzo non trascurabile del bordo. Ovviamente tutto questo vale per $k \geq 1$, il caso $k = 0$ corrisponde agli usuali spazi di Lebesgue, ed in quel caso sappiamo che si possono approssimare tutte le funzioni con funzioni regolari a supporto compatto.*

Capitolo 4

Risultati preliminari sugli spazi di Sobolev

4.1 Teoremi di approssimazione

Nel considerare gli spazi di Sobolev sull'intervallo I , era stato piuttosto semplice osservare come fosse equivalente la definizione che richiede le derivate distribuzionali in L^p e la definizione per densità delle funzioni regolari. Entrambe le caratterizzazioni sono molto utili, ed ovviamente farebbe parecchio comodo averle entrambe; purtroppo in generale non è così facile passare dall'una all'altra. In questo capitolo, quindi, cercheremo di capire quando sia possibile approssimare funzioni di $W^{k,p}(\Omega)$ con funzioni regolari. Dal momento che sappiamo già che le funzioni regolari non possono approssimare neppure funzioni di L^∞ , non tenteremo nemmeno di considerare il caso $p = \infty$ nei nostri risultati di approssimazione. Per inciso, osserviamo che le funzioni regolari sono senz'altro dense in tutti gli spazi $W_0^{k,p}(\Omega)$, per costruzione!

Cominciamo allora ricordando un risultato che già conosciamo e che abbiamo anche già citato, ma del quale può fare comodo ricordare rapidamente la dimostrazione.

Lemma 4.1. *Per ogni $1 \leq p < \infty$ ed ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

Proof. Fissiamo $u \in L^p(\Omega)$ ed $\eta > 0$; dal momento che gli insiemi aperti $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \overline{B(x, \delta)} \subseteq \Omega\}$ riempiono Ω per $\delta \rightarrow 0$, possiamo trovare δ tale che, chiamando \tilde{u} la restrizione di u ad Ω_δ si abbia $\|u - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta$. A questo punto basta prendere tutti gli $\varepsilon < \delta$, definire $u_\varepsilon = \tilde{u} * \rho_\varepsilon$ con dei mollificatori ρ_ε , e già sappiamo dall'esempio ?? che le u_ε sono funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω che tendono in norma L^p ad \tilde{u} . Per l'arbitrarietà di η abbiamo concluso. \square

Si può osservare immediatamente come lo schema di dimostrazione appena visto per L^p non può funzionare allo stesso modo per $W^{k,p}(\Omega)$: infatti, restringendo la u ad un sottoinsieme si introducono dei salti, il che è ininfluenza in norma L^p della funzione ma è molto costoso in

norma L^p della derivata! Le funzioni \tilde{u} viste sopra, quindi, sono molto vicine ad u in norma L^p , ma non lo sono affatto –in generale– in norma $W^{k,p}$. Quello che è vero, in effetti, è che con la procedura vista sopra si riesce a convergere in norma $W^{k,p}$ non su tutto Ω ma su un qualsiasi $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Teorema 4.2 (Friedrichs). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\Omega' \subset\subset \Omega$; allora per ogni $1 \leq p < \infty$ lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega')$; più precisamente, dati $p < \infty$ ed una funzione $u \in W^{k,p}(\Omega)$, esiste una successione $\{u_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tale che per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ si ha $\|u_h - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow \infty$.*

Proof. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme aperto $\Omega_h = \{x \in \Omega : \overline{B(x, 1/h)} \subseteq \Omega\}$: è chiaro che si abbia $\Omega_h \subseteq \Omega_{h+1}$, ed in particolare $B(\Omega_h, 1/h - 1/(h+1)) \subseteq \Omega_{h+1}$. Consideriamo allora gli $\varepsilon < 1/h - 1/(h+1)$, e definiamo \tilde{u}_h la restrizione di u ad Ω_{h+1} e $v_\varepsilon^h = \tilde{u}_h * \rho_\varepsilon$. Visto che per ogni multi-indice α di lunghezza minore o uguale a k la funzione \tilde{u}_h ammette derivate distribuzionali uguali a $D^\alpha u$ in $B(\Omega_h, \varepsilon) \subseteq \Omega_{h+1}$, sappiamo che per ogni α ed in Ω_h si ha

$$D^\alpha v_\varepsilon^h = D^\alpha u * \rho_\varepsilon \quad \text{e} \quad D^\alpha v_\varepsilon^h \xrightarrow{L^p(\Omega_h)} D^\alpha u;$$

definiamo allora $u_h = v_\varepsilon^h$ con una scelta di $\varepsilon = \varepsilon(h)$ in modo che

$$\|u - u_h\|_{W^{k,p}(\Omega_h)} \leq \frac{1}{h}.$$

Abbiamo così dato una successione $\{u_h\}$ di funzioni appartenenti a $C_0^\infty(\Omega)$; sia ora $\Omega' \subset\subset \Omega$: deve esistere un \bar{h} tale che $\Omega' \subseteq \Omega_{\bar{h}}$, e allora per ogni $h \geq \bar{h}$ si avrà

$$\|u - u_h\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq \|u - u_h\|_{W^{k,p}(\Omega_h)} \leq \frac{1}{h},$$

e dunque in effetti $u_h \rightarrow u$ fortemente in $W^{k,p}(\Omega')$. □

Osservazione 4.3. *Si osservi che la convergenza delle u_h alla u nella dimostrazione precedente, grazie a quanto visto nel Lemma 4.1, vale in particolare forte in $L^p(\Omega)$. Si noti altresì che la successione $\{u_h\}$ non ha alcun motivo di convergere in $W^{k,p}(\Omega)$ ad u : in primo luogo, perché essendo le u_h a supporto compatto un loro eventuale limite in $W^{k,p}(\Omega)$ deve appartenere a $W_0^{k,p}$; ed in secondo luogo perché, come si vede facilmente dalla costruzione, può benissimo succedere addirittura che la successione $\{u_h\}$ non sia limitata in $W^{k,p}(\Omega)$: basta considerare un insieme Ω di misura finita ma con perimetro infinito, prendere come u la funzione costantemente 1, che sta chiaramente in $W^{k,p}$, ed osservare che la norma delle u_h costruite nel Teorema di Friedrichs diverge per $h \rightarrow \infty$.*

Cerchiamo adesso di ottenere la convergenza piena in $W^{k,p}(\Omega)$: non possiamo ovviamente sperare di averla con funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω perché per definizione quella si ha esattamente per le funzioni di $W_0^{k,p}(\Omega)$; bisognerà quindi trovare funzioni regolari che arrivino fino al bordo di Ω . Questo è possibile, ma solo grazie ad una costruzione molto precisa.

Teorema 4.4 (Meyers-Serrin). *Lo spazio $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$ per ogni $p < \infty$.*

Proof. Per prima cosa prendiamo una ricoprimento numerabile di Ω fatto da aperti Ω_h a chiusura compatta in Ω . Sia poi η_h una partizione dell'unità C^∞ corrispondente a questo ricoprimento: ossia, ogni η_h è una funzione regolare da Ω in $[0, 1]$ con $\eta_h = 0$ fuori da Ω_h , per ogni x si ha $\sum_{h \in \mathbb{N}} \eta_h(x) = 1$, e la serie $\sum_{h \in \mathbb{N}} \eta_h$ è localmente una somma finita, cioè per ogni x esiste un intorno A di x ed un insieme finito $I \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\eta_h(z) = 0$ per ogni $z \in A$ e $h \notin I$. Che questo sia possibile è una proprietà ben nota delle partizioni dell'unità.

Fissiamo adesso $u \in W^{k,p}(\Omega)$, e scegliamo $\varepsilon > 0$: per ogni $h \in \mathbb{N}$, consideriamo la funzione $\eta_h u$; si tratta chiaramente di una funzione in $W^{k,p}(\Omega)$ che si annulla fuori da Ω_h , quindi in particolare possiamo considerare le funzioni $(\eta_h u) * \rho_\delta$ purché $2\delta < \text{dist}(\Omega_h, \Omega^c)$. Queste funzioni, come ben sappiamo, convergono in norma $W^{k,p}(B(\Omega_h, \delta))$ ad $\eta_h u$; ma visto che su $\Omega \setminus B(\Omega_h, \delta)$ si annulla sia $\eta_h u$ che ciascuna delle funzioni, la convergenza in effetti è nella norma $W^{k,p}(\Omega)$! Possiamo quindi chiamare $u_h = (\eta_h u) * \rho_\delta$ per un $\delta = \delta(h)$ che tenda a 0 per $h \rightarrow \infty$, ed abbastanza piccolo in modo che

$$\|u_h - \eta_h u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^h}; \quad (4.1)$$

finalmente, definiamo

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{h \in \mathbb{N}} u_h.$$

In linea di principio potremmo preoccuparci che la somma abbia senso, trattandosi di una serie di funzioni; in realtà, ricordando che $\sum \eta_h$ è una somma localmente finita e che $\delta(h) \rightarrow 0$, si ha immediatamente che anche $\sum u_h$ è una somma localmente finita di funzioni C^∞ , e dunque $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Si osservi poi che in generale $C^\infty(\Omega)$ non è incluso in $W^{k,p}(\Omega)$, quindi per il momento non sappiamo nemmeno che $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$. Fissiamo però $\bar{h} \in \mathbb{N}$: visto che

$$\cup_{h \leq \bar{h}} \Omega_h$$

è un aperto a chiusura compatta dentro Ω , la restrizione di φ_ε a questo insieme sta in $C^\infty \cap W^{k,p}$; inoltre, per le proprietà delle partizioni dell'unità già usate esiste un \hat{h} tale che per $k \geq \hat{h}$ si ha $u_k \equiv \eta_k \equiv 0$ in $\cup_{h \leq \bar{h}} \Omega_h$. Deduciamo, per la (4.1), che

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\cup_{h \leq \bar{h}} \Omega_h)} &= \left\| \sum_{h=1}^{\hat{h}} u_h - \eta_h u \right\|_{W^{k,p}(\cup_{h \leq \bar{h}} \Omega_h)} \leq \sum_{h=1}^{\hat{h}} \|u_h - \eta_h u\|_{W^{k,p}(\cup_{h \leq \bar{h}} \Omega_h)} \\ &\leq \sum_{h=1}^{\hat{h}} \|u_h - \eta_h u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{h=1}^{\hat{h}} \frac{\varepsilon}{2^h} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dal momento che questo vale per ogni \bar{h} e che la stima appena trovata non dipende da \bar{h} , deduciamo al tempo stesso che $\varphi_\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega)$ e che

$$\|\varphi_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon;$$

abbiamo quindi la tesi. \square

Il risultato appena visto è estremamente elegante ed interessante; tuttavia, si può capire rapidamente che molto spesso non sia sufficiente ai nostri scopi. Le funzioni regolari su Ω ,

infatti, hanno di positivo che sono regolari, ma di negativo che sono definite solo su Ω , che potrebbe essere un aperto anche molto brutto: e molto spesso, invece, le funzioni approssimanti regolari sono davvero utili solo se sono definite su tutto \mathbb{R}^n . Questo si vede in modo particolare nella dimostrazione di vari teoremi, che sono più semplici da dimostrare su tutto \mathbb{R}^n : per passare poi da \mathbb{R}^n ad un aperto Ω , dovremo approssimare funzioni definite su Ω con funzioni definite su tutto \mathbb{R}^n . Nel capitolo scorso, quando ci interessavamo al caso dell'intervallo, non ci eravamo preoccupati di questo problema: e in effetti, qualunque funzione di classe C^1 sull'intervallo chiuso I si può estendere senza fatica ad una funzione di classe C^1 , anche a supporto compatto, su tutto \mathbb{R} . Si ha, quindi, che gli spazi $W^{k,p}(I)$ con $p < \infty$ si potrebbero anche definire come il completamento, nella norma $W^{1,p}(I)$, delle funzioni C^∞ su \mathbb{R} . Ed in molte situazioni il fatto di avere funzioni definite su \mathbb{R} , anche se poi la norma $W^{1,p}(I)$ non si interessa a quello che succede su $\mathbb{R} \setminus I$, è indispensabile. Il fatto che per un aperto generico Ω le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ non siano dense in $W^{k,p}(\Omega)$ è molto semplice da vedere, già con un esempio mono-dimensionale.

Esempio 4.5. Sia $\Omega = \{0 < |x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}$: le funzioni $C^1(\mathbb{R})$ non sono dense in $W^{1,1}(\Omega)$ con la norma di $W^{1,1}(\Omega)$, e quindi il completamento di $C^1(\mathbb{R})$ rispetto alla norma $W^{1,1}(\Omega)$ non è tutto $W^{1,1}(\Omega)$. Per vederlo, si consideri la funzione

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -1 < x < 0; \\ 0 & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Visto che una funzione in $C_0^1(\Omega)$ è sempre la somma di una funzione in $C_0^1((-1, 0))$ ed una in $C_0^1((0, 1))$, è immediato osservare che la derivata distribuzionale di u in Ω è la funzione nulla, e dunque $u \in W^{1,1}(\Omega)$ con $u' \equiv 0$. D'altra parte, è chiaro che se $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e $\|\varphi - u\|_{L^1(\Omega)} \approx 0$, allora $\|\varphi' - u'\|_{L^1(\Omega)} = \|\varphi'\|_{L^1(\Omega)} \gtrsim 1$, quindi $\|\varphi - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \gtrsim 1$ per ogni $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e si ha la non densità di cui parlavamo.

L'esempio appena dato assicura che in generale non si può sperare di approssimare funzioni in $W^{k,p}(\Omega)$ con funzioni regolari su \mathbb{R}^n ; si capisce tuttavia che, in questo esempio, la "colpa" è della cattiva regolarità del bordo topologico di Ω . In altre parole, non riusciamo ad approssimare con funzioni regolari su \mathbb{R}^n ma il problema non è tanto la regolarità quanto la definizione su tutto \mathbb{R}^n : infatti, in quell'esempio le funzioni $W^{k,p}(\Omega)$ non si riescono ad approssimare con funzioni di Sobolev su tutto \mathbb{R}^n , non solo con funzioni regolari! Per chiarire cosa intendiamo con questa osservazione è molto utile una definizione.

Definizione 4.6. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e dati $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, definiamo operatore di estensione un'applicazione lineare e continua $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che $E(u)|_\Omega = u$.

E' molto intuitivo capire che se Ω è un insieme "bello" allora ci sono operatori di estensione per ogni k ed ogni p , ovviamente non unici. Nella prossima sezione ci occuperemo dell'esistenza di tali operatori, mentre per adesso osserviamo che, se esiste un operatore di estensione, allora in effetti le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ed in particolare le $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, approssimano tutti gli elementi di $W^{k,p}(\Omega)$.

Proposizione 4.7. *Se esiste un operatore di estensione per $W^{k,p}(\Omega)$, allora le funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono dense in $W^{k,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$.*

Proof. Si prenda $u \in W^{k,p}(\Omega)$, e si consideri $E(u) \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$; grazie al Lemma 3.28 sappiamo che esiste una successione $\{\varphi_h\}$ di funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ che convergono in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ad $E(u)$. Ma visto che per ogni h si ha

$$\left\| \varphi_{h|\Omega} - u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \varphi_{h|\Omega} - E(u) \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left\| \varphi_h - E(u) \right\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)},$$

la tesi segue immediatamente. \square

4.2 Operatori di estensione

Grazie all'Esempio 4.5 e alla Proposizione 4.7 è abbastanza chiaro che la questione se si riescano o meno ad approssimare gli elementi di $W^{k,p}(\Omega)$ con funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si è ridotta essenzialmente allo studio dell'esistenza o meno di operatori di estensione. Vediamo allora il caso più semplice ma fondamentale in cui si riesce a costruire un operatore di estensione: chiamiamo $x \equiv (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ il generico elemento di \mathbb{R}^n , ed indichiamo con $\mathbb{R}_+^n = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n : y > 0\}$.

Lemma 4.8. *Per ogni $1 \leq p \leq \infty$ esiste un operatore di estensione $E : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ di norma 2.*

Proof. L'operatore è molto semplice da definire, e cioè semplicemente

$$E(u)(y, z) = u(|y|, z).$$

Come si può intuire, vorremmo mostrare che per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si abbia

$$D_i(E(u))(y, z) = \begin{cases} D_i(|y|, z) & \text{se } i \geq 2 \\ -D_i(|y|, z) & \text{se } i = 1 \end{cases}; \quad (4.2)$$

sapendo questo, la tesi seguirebbe in maniera ovvia.

Per mostrare la (4.2), prendiamo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e fissiamo $i \geq 2$: notiamo allora che

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(-y, z) \right) dx; \quad (4.3)$$

ovviamente non possiamo scaricare le derivate perché anche se φ è a supporto compatto in \mathbb{R}^n la sua restrizione a \mathbb{R}_+^n può non essere a supporto compatto in \mathbb{R}_+^n ! Sia allora $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $\eta_\varepsilon(y) = 1$ per $y \geq \varepsilon$ e $\eta_\varepsilon(y) = 0$ per $y \leq \varepsilon/2$: visto che $\varphi(y, z)\eta_\varepsilon(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ e che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(y, z)\eta_\varepsilon(y) \frac{\partial u}{\partial x_i}(y, z) dx &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(y, z)\eta_\varepsilon(y) \right) u(y, z) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y, z)\eta_\varepsilon(y) u(y, z) dx, \end{aligned}$$

ricordando che $i \geq 2$. Visto che φ è regolare, quindi appartengono ad $L^{p'}$ sia lei che le sue derivate, possiamo passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nell'uguaglianza di sopra, trovando

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(y, z) \frac{\partial u}{\partial x_i}(y, z) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y, z) u(y, z) dx,$$

ed allo stesso modo

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(-y, z) \frac{\partial u}{\partial x_i}(y, z) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(-y, z) u(y, z) dx.$$

Sostituendo nella (4.3) troviamo allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y, z) (\varphi(y, z) + \varphi(-y, z)) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(|y|, z) \varphi(y, z) dx,$$

da cui segue la (4.2) con $i \geq 2$.

Occupiamoci adesso del caso $i = 1$: definiamo su \mathbb{R}_+^n la funzione regolare $\psi(y, z) = \varphi(y, z) - \varphi(-y, z)$, e notiamo che allora la formula (4.2) da dimostrare diventa

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u(y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(y, z) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y, z) \psi(y, z) dx.$$

Prendiamo le funzioni η_ε già usate prima, e notiamo che possiamo supporre che $|\eta'_\varepsilon(y)| \leq 3/\varepsilon$ con $\varepsilon/2 \leq y \leq \varepsilon$, mentre all'esterno dell'intervallo $[\varepsilon/2, \varepsilon]$ per definizione $\eta'_\varepsilon \equiv 0$. Visto che nuovamente le $\eta_\varepsilon \psi$ sono funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, sappiamo che

$$- \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_1} \eta_\varepsilon \psi = \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial \eta_\varepsilon \psi}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}_+^n} u \eta_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \int_{\mathbb{R}_+^n} u \psi \eta'_\varepsilon; \quad (4.4)$$

ma il termine a sinistra tende, per $\varepsilon \rightarrow 0$, a

$$- \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_1} \psi,$$

mentre il primo pezzo del termine a destra tende a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial \psi}{\partial x_1};$$

la tesi sarà allora conclusa se mostreremo che il secondo pezzo del termine a destra converge a 0. Ma in effetti la funzione ψ è una funzione regolare che, per definizione, vale 0 sul piano $\{y = 0\}$; ne segue che esiste una costante $C = C(\varphi)$ tale che su ciascuna striscia $\{\varepsilon/2 \leq y \leq \varepsilon\}$ si ha $|\psi| \leq C\varepsilon$; si ha allora

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u \psi \eta'_\varepsilon = \int_{\{\varepsilon/2 \leq y \leq \varepsilon\}} u \psi \eta'_\varepsilon \leq 3C \int_{\{\varepsilon/2 \leq y \leq \varepsilon\}} |u|;$$

e quest'ultimo termine tende a 0 visto che $u \in L^p(\mathbb{R}_+^n) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^n)$. \square

E' chiaro che ci aspetteremmo operatori di estensione per $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ non solo con $k = 1$ ma con qualunque k . In effetti è quello che succede anche se è molto più seccante dimostrarlo: l'operatore E definito nella dimostrazione precedente, infatti, può rendere discontinua la derivata prima e può quindi portare funzioni in $W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$ in funzioni che *non* sono in $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Avendo un po' più di cura, comunque, si può mostrare il seguente risultato.

Teorema 4.9. *Per ogni $1 \leq p \leq \infty$ esiste un operatore di estensione $E : W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ di norma finita.*

Proof. Come nel Lemma 4.8 vogliamo definire $E(u)$ tramite una riflessione, ma saremo costretti ad operare una riflessione più "accurata": definiremo infatti $E(u)(y, z) = u(y, z)$ per $y > 0$ (e questo non possiamo certo sceglierlo!) ed invece per $y < 0$ porremo

$$E(u)(y, z) = -3u(-y, z) + 4u(-y/2, z). \quad (4.5)$$

Supponiamo per il momento che $u \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$: è allora immediato osservare che $E(u) \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{y = 0\})$, e che su $\{y < 0\}$ e per ogni $i, j \geq 2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(u)}{\partial x_i}(y, z) &= -3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(-y, z) + 4 \frac{\partial u}{\partial x_i}(-y/2, z), \\ \frac{\partial E(u)}{\partial x_1}(y, z) &= 3 \frac{\partial u}{\partial x_1}(-y, z) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(-y/2, z), \\ \frac{\partial^2 E(u)}{\partial x_i \partial x_j}(y, z) &= -3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(-y, z) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(-y/2, z), \\ \frac{\partial^2 E(u)}{\partial x_1 \partial x_i}(y, z) &= 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}(-y, z) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}(-y/2, z), \\ \frac{\partial^2 E(u)}{\partial x_1^2}(y, z) &= -3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(-y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(-y/2, z). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ma allora tutte le derivate prime si estendono con continuità su $\{y = 0\}$, ed anche tutte le derivate seconde tranne eventualmente l'ultima. Questo assicura che $E(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ed inoltre che $E(u)$ ammette tutte le derivate seconde continue tranne quella fatta due volte nella direzione x_1 . Vogliamo mostrare che allora $E(u) \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, e per fare questo bisogna vedere che tutte le derivate distribuzionali fino al second'ordine siano in $L^p(\mathbb{R}^n)$: per le derivate prime, così come per tutte le derivate seconde tranne quella due volte in direzione x_1 , non c'è problema visto che la formula (4.6) ci dà le derivate distribuzionali in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ed addirittura continue. Per dire tutto questo stiamo usando varie volte il fatto che se una funzione ammette derivata classica in \mathbb{R}_+^n ed in \mathbb{R}_-^n e le due derivate si incollano con continuità su $\{y = 0\}$, allora l'estensione continua è la derivata classica su tutto \mathbb{R}^n , il che è in effetti banale da osservare.

Per concludere anche con la derivata $D_{11}u$, abbiamo intenzione di dimostrare che la formula data in (4.6) per $D_{11}u$ dà in effetti la derivata distribuzionale della u , che può ovviamente non essere continua. Visto che per la prima derivata non c'è problema, la tesi seguirà immediatamente dal seguente risultato, ponendo $v = \partial u / \partial x_1$.

Claim: *Sia $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana tale che $v \in C^1(\mathbb{R}_+^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $v \in$*

$C^1(\mathbb{R}_-^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_-^n)$. Allora $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

La dimostrazione di questo claim (la cui stesura formale è lasciata per *utile* esercizio!) è molto simile alla dimostrazione del caso $i = 1$ nel Lemma 4.8: l'unica differenza è che stavolta $v(y, z)$ non coincide con $v(-y, z)$; questo sostanzialmente porta, nell'equazione (4.4), a dover sostituire l'ultimo termine a destra con

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(v(y, z)\varphi(y, z) - v(-y, z)\varphi(-y, z) \right) \eta'_\varepsilon(y) dx;$$

se v fosse simmetrica come nel Lemma 4.8 questo integrale varrebbe

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} v(y, z) \left(\varphi(y, z) - \varphi(-y, z) \right) \eta'_\varepsilon(y) dx,$$

e quindi tenderebbe a zero perché $(\varphi(y, z) - \varphi(-y, z))\eta'_\varepsilon(y)$ è limitata da una costante ed il suo dominio è sempre più piccolo. Altrimenti, dobbiamo suddividere l'integrale come segue:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} v(y, z) \left(\varphi(y, z) - \varphi(-y, z) \right) \eta'_\varepsilon(y) dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(-y, z) \left(v(y, z) - v(-y, z) \right) \eta'_\varepsilon(y) dx;$$

per quanto riguarda il primo integrale, abbiamo già osservato che tende a 0; per quanto riguarda il secondo, tende anch'esso a zero perché la funzione integranda ha un dominio di volume infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$ ed inoltre la φ è limitata, $\eta'_\varepsilon(y)$ si limita con $3/\varepsilon$ come abbiamo già usato, ed infine essendo v Lipschitziana si stima $v(y, z) - v(-y, z)$ con $2L\varepsilon$, per cui la funzione integranda è limitata.

Abbiamo quindi definito il funzionale $E : C^2(\mathbb{R}_+^n) \cap W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, e grazie alla (4.5) ed alla formula (4.6) per le derivate sappiamo che per ogni $u \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$ si ha

$$\|E(u)\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K \|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)};$$

possiamo allora concludere che il funzionale E si estende in modo continuo a tutto $W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$ grazie alla linearità di E e alla densità delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ in $W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$ data dal Teorema di Meyers e Serrin 4.4, ed in particolare continuano a valere le formule (4.5) e (4.6) per $E(u)$ e per le derivate deboli di $E(u)$.

Questo ragionamento ovviamente non funziona per il caso $p = \infty$, per il quale il Teorema di Meyers e Serrin non vale; si può tuttavia superare questo ostacolo: definiamo infatti il funzionale $E : W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ usando la (4.5); sosteniamo che le formule (4.6) danno le derivate distribuzionali del primo e del secondo ordine per $E(u)$, ed ovviamente se questo è vero in effetti E è un funzionale continuo su $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Per mostrare che le (4.6) funzionino, dobbiamo prendere una funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed un multi-indice α di lunghezza al più 2 e verificare che la derivata α -esima si possa scaricare. Dobbiamo quindi in pratica verificare che due integrali abbiano lo stesso valore: ma entrambi gli integrali devono essere fatti non su tutto \mathbb{R}^n , ma solo su una palla centrata nell'origine di raggio sufficientemente grande da contenere il supporto di φ ; restringendoci a questa palla, allora, si ha che u ed $E(u)$ appartengono in effetti a $W^{2,p}$ per qualunque $p < \infty$, e visto che la definizione di E non dipende da p conosciamo già la validità della formula che vogliamo dimostrare in quanto il teorema per $p < \infty$ è già stato mostrato. \square

Per concludere con \mathbb{R}_+^n , dimostriamo il risultato di estensione per qualunque $k \geq 3$.

Teorema 4.10. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $1 \leq p \leq \infty$ esiste un operatore di estensione $E : W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ di norma finita.*

Proof. Si può fare la stessa identica costruzione del Teorema 4.9, con la sola accortezza di fare un sistema di riflessioni ancora più preciso in modo da preservare le prime $k - 1$ derivate in modo continuo. Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 4.9, infatti, è facile capire che basta definire

$$E(u)(y, z) = \sum_{j=1}^k \lambda_j u(-y/j, z),$$

avendo scelto le costanti λ_j in modo che per ogni $l = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ si abbia

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{-1}{j} \right)^l \lambda_j = 1.$$

Infine, che questa sia possibile è un semplice esercizio di algebra lineare, in quanto si tratta solo di risolvere l'equazione $(A)(\lambda) = (v)$ dove (v) è il vettore con k entrate tutte pari ad 1, (λ) è il vettore con k entrate incognite pari a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, ed (A) è la matrice la cui l -esima riga è fatta dal vettore $j \mapsto 1/(-j)^l$; e si deve quindi solo controllare che la matrice A sia invertibile. \square

Vediamo adesso un immediato corollario che ci sarà molto utile per mostrare l'esistenza di operatori di estensione su aperti regolari. Chiameremo $Q = (-1, 1)^n$ il cubo unitario, e $Q_+ = (0, 1) \times (-1, 1)^{n-1}$ il semi-cubo positivo.

Corollario 4.11. *Esiste un operatore di estensione $E : W^{k,p}(Q_+) \rightarrow W^{k,p}(Q)$. In particolare, se il supporto di u è contenuto compattamente in Q (in Q , non in Q_+ !) allora lo stesso vale per $E(u)$.*

Proof. E' sufficiente notare che la costruzione per riflessioni fatta su \mathbb{R}_+^n ed \mathbb{R}^n funziona perfettamente anche nel caso di Q_+ e Q ; dalla costruzione, poi, si ottiene immediatamente anche quanto enunciato per il supporto. \square

Ricordiamo ora la definizione di aperti di classe C^k e poi mostriamo che sugli aperti di classi C^k si hanno operatori di estensione fino all'ordine k .

Definizione 4.12. *Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^n . Si dice che Ω è di classe C^k (o che Ω ha bordo di classe C^k) se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno A di x in \mathbb{R}^n ed una funzione biunivoca $\tau : A \rightarrow Q$ tale che $\tau(x) = 0$, τ e τ^{-1} sono di classe C^k , e $\tau(A \cap \Omega) = Q_+$ e $\tau(A \cap \partial\Omega) = \{x \equiv (y, z) \in Q : y = 0\}$.*

Proposizione 4.13. *Se Ω è di classe C^k e $\partial\Omega$ è compatto, allora esiste un operatore di estensione per $W^{k,p}(\Omega)$.*

Proof. Per compattezza possiamo prendere un numero finito di intorni A_i come nella definizione, con $1 \leq i \leq N$, e degli aperti $B_i \subset\subset A_i$ a chiusura compatta negli A_i in modo che i B_i ricoprano $\partial\Omega$. Chiamiamo allora $\tilde{A} = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B_i}$, ed avremo quindi che \tilde{A} è ad una distanza strettamente positiva da ${}^c\Omega$, ed inoltre gli A_i ed \tilde{A} ricoprono completamente Ω . Più precisamente, chiamiamo

$$\tilde{\Omega} = \left(\cup_{i=1}^N A_i \right) \cup \tilde{A} :$$

si tratta di un aperto che contiene strettamente Ω , e ovviamente gli A_i ed \tilde{A} sono un ricoprimento di $\tilde{\Omega}$. Prendiamo ora una partizione dell'unità C^∞ associata a questo ricoprimento, le cui funzioni chiameremo ψ_i e $\tilde{\psi}$ rispettivamente. Sia ora $u \in W^{k,p}(\Omega)$, e fissiamo $1 \leq i \leq N$: la funzione $\psi_i u|_{A_i \cap \Omega}$ appartiene a $W^{k,p}(A_i \cap \Omega)$ per la regola di Leibniz (che vale per distribuzioni) ed ha inoltre supporto compatto in A_i (ma non in $A_i \cap \Omega!$). Chiamando $\tau_i : A_i \rightarrow Q$ la mappa data dalla definizione di aperto di classe C^k , si può allora considerare la funzione $\tilde{u}_i := \psi_i u \circ \tau_i^{-1} : Q_+ \rightarrow \mathbb{R}$; sapendo la formula di derivazione per funzione composta e approssimando la $\psi_i u$ in norma $W^{1,1}(A_i \cap \Omega)$ con funzioni regolari (cosa possibile per il Teorema di Meyer e Serrin e perché siamo in un aperto a chiusura compatta quindi $\psi_i u$ sta in $W^{1,1}$), osserviamo facilmente che $\tilde{u}_i \in W^{k,p}(Q_+)$, e che le sue derivate fino all'ordine k sono tutte date applicando formalmente k derivate secondo la regola di derivazione per funzioni composte. Qui ovviamente serve usare il fatto che le τ_i sono derivabili k volte, da cui è chiaro che non possiamo sperare di avere un operatore di estensione in $W^{\bar{k},p}(\Omega)$ se Ω è di classe C^k con $k < \bar{k}$. Grazie al Corollario 4.11 possiamo considerare \hat{u}_i , un'estensione di \tilde{u}_i in $W^{k,p}(Q)$. Inoltre, visto che \tilde{u}_i è a supporto compatto in Q , anche se non in Q_+ , sappiamo che anche \hat{u}_i è a supporto compatto in Q . Infine, allora, $u_i := \hat{u}_i \circ \tau_i$ sta in $W^{k,p}(A_i)$ ed è a supporto compatto. Un semplice esercizio con le funzioni cut-off assicura che se $U \subseteq V$ sono due aperti ed una funzione sta in $W^{k,p}(U)$ ed ha supporto ad una distanza strettamente positiva da cU (ad esempio la funzione può essere a supporto compatto in U), allora la sua estensione a 0 fuori da U sta in $W^{k,p}(V)$, ed ha le stesse derivate in U e derivate nulle in $V \setminus U$. Dunque, estendendo a 0 su $\mathbb{R}^n \setminus A_i$, si ha che $u_i \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, e c'è per costruzione una costante C_i tale che

$$\|u_i\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_i \|\psi_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} ;$$

si noti anche che $u_i \equiv \psi_i u$ in $A_i \cap \Omega$. Dobbiamo anche considerare la funzione $\tilde{\psi}u$: si tratta di una funzione che sta in $W^{k,p}(\Omega)$ ed il suo supporto è contenuto in \tilde{A} , dunque è ad una distanza strettamente positiva da ${}^c\Omega$: perciò, estendendola a 0, si ha anche che $\tilde{\psi}u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, ed è pure

$$\|\tilde{\psi}u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C} \|\tilde{\psi}u\|_{W^{k,p}(\Omega)} ;$$

per fare questa asserzione dovremmo controllare che la funzione $\tilde{\psi}$ e le sue derivate fino all'ordine k -esimo siano limitate, cosa non ovvia visto che se Ω non è limitato allora $\tilde{\psi}$ è regolare ma non a supporto compatto. Tuttavia si noti che $\tilde{\psi}$ deve valere costantemente 1 sul complementare dell'unione degli A_i , e dunque la zona su cui non vale 1 è a chiusura compatta: perciò, effettivamente tutte le derivate della $\tilde{\psi}_i$ sono limitate e dunque abbiamo quanto asserito. Possiamo

finalmente definire $E(u)$ la somma di tutte le u_i e di $\tilde{\psi}u$: per costruzione e per disuguaglianza triangolare, esiste una costante C che dipende dalle ψ_i e dagli A_i (ma non da u !) tale che

$$\|E(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} ;$$

dalla costruzione, è anche chiaro che $E(u) \equiv u$ su Ω , e che la mappa E sia lineare. Abbiamo dunque trovato l'estensione cercata. \square

Un interessante esercizio può essere il seguente.

Esempio 4.14 (Brezis). Per ogni k ed ogni p esiste un operatore di estensione per il cubo aperto Q , che ovviamente *non* è un aperto neppure di classe C^1 .

4.3 Alcune utili proprietà

Vediamo adesso alcuni importanti risultati riguardanti gli spazi di Sobolev. Iniziamo con l'osservare il rapporto che c'è fra funzioni Lipschitziane e funzioni di classe $W^{1,\infty}$.

Proposizione 4.15. *Per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, le funzioni Lipschitziane su Ω sono elementi di $W^{1,\infty}(\Omega)$, e la migliore costante di Lipschitz è pari almeno alla norma L^∞ della derivata. Per $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, in particolare, lo spazio delle funzioni Lipschitziane coincide con $W^{1,\infty}(I)$.*

Proof. Step I. Estensione delle funzioni Lipschitz.

Sia u una funzione Lipschitziana su Ω di costante L : vediamo subito come si possa estendere ad una funzione Lipschitziana di costante L su tutto \mathbb{R}^n . Definiremo semplicemente l'estensione $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega; \\ \inf \{u(y) + L|y - x| : y \in \Omega\} & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

E' immediato osservare che \tilde{u} è ben definita: infatti, se per semplicità pensiamo $0 \in \Omega$, si ha banalmente $\tilde{u}(x) \leq u(0) + L|x| < +\infty$; d'altra parte per ogni $y \in \Omega$ si ha $u(y) \geq u(0) - L|y|$ e quindi $u(y) + L|y - x| \geq u(0) - L|x|$ e allora passando all'inf $u(x) \geq u(0) - L|x| > -\infty$. Si ha anche banalmente che \tilde{u} è Lipschitziana ancora con costante L ; prendiamo infatti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$: se i punti sono entrambi in Ω o entrambi in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ allora si ha direttamente per ipotesi o per costruzione che $|\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. Se invece $x_1 \in \Omega$ e $x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, si ha da una parte che

$$u(x_2) - u(x_1) \leq \left(u(x_1) + L|x_1 - x_2| \right) - u(x_1) \leq L|x_1 - x_2|;$$

d'altra parte, visto che esattamente come osservato prima per ogni $y \in \Omega$ si ha $u(y) \geq u(x_1) - L|y - x_1|$, si ha anche $u(y) + L|y - x_2| \geq u(x_1) - L|x_1 - x_2|$: allora, passando all'inf si trova

$$u(x_2) - u(x_1) \geq \left(u(x_1) - L|x_1 - x_2| \right) - u(x_1) \geq -L|x_1 - x_2|.$$

In conclusione, siamo in grado di estendere qualunque funzione Lipschitz su Ω a tutto \mathbb{R}^n , mantenendola Lipschitz con la stessa costante.

Step II. *Le funzioni Lipschitz su \mathbb{R}^n sono in $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Prendiamo una funzione u limitata dalla costante M e Lipschitziana con migliore costante di Lipschitz L su \mathbb{R}^n , e definiamo le sue regolarizzate $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ come al solito; notiamo subito che anche u_ε è limitata dalla costante M ed è Lipschitziana di costante L ; la prima proprietà è banale, mentre per quanto riguarda la seconda, presi $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| &= \left| \int_{B_\varepsilon} (u(x-t) - u(y-t)) \rho_\varepsilon(t) dt \right| \leq \int_{B_\varepsilon} |u(x-t) - u(y-t)| \rho_\varepsilon(t) dt \\ &\leq L|x-y| \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(t) dt = L|x-y|. \end{aligned}$$

Per le funzioni regolari sappiamo che la costante di Lipschitz coincide con la norma L^∞ della derivata, e dunque le derivate di u_ε sono limitate in modulo da L . Le successioni delle derivate $D_i u_\varepsilon$, quindi, sono n successioni limitate in norma L^∞ ; come sappiamo, per un'opportuna successione $\varepsilon_i \rightarrow 0$ si ha allora che le derivate $D_i u_\varepsilon$ convergono debole* su L^∞ a delle funzioni che chiamiamo $D_i u$, di norma L^∞ pari al più ad L . Asseriamo che le $D_i u$ sono effettivamente le derivate deboli di u : in effetti, preso qualunque i e qualunque $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \varphi,$$

e visto che φ e la sua derivata i -esima stanno in $L^1(\mathbb{R}^n)$ si passa al limite trovando la formula cercata. Per inciso, essendo la funzione u una funzione fissata e visto che le derivate deboli se esistono sono uniche, questo ci assicura che in effetti le u_ε convergono alla u in senso debole* L^∞ sulle funzioni e sulle derivate non solo per una successione opportuna ma anche globalmente con $\varepsilon \rightarrow 0$. Dunque la u sta in effetti in $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ed ha norma della derivata pari al più ad L (che poi sia proprio L è in effetti molto facile da osservare).

Step III. *Il caso $\Omega = (0, 1)$.*

Nel caso in cui $\Omega = (0, 1)$, in particolare, vale anche l'altra implicazione, ossia tutte le funzioni $W^{1,\infty}$ sono anche Lipschitziane. Questo è immediato da osservare ricordando che per ogni $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ si ha che u è uniformemente continua ed in particolare

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t) dt. \quad (3.4)$$

quindi ovviamente $|u(x) - u(y)|$ si stima con $|y - x|$ per la norma L^∞ di u' . □

Osservazione 4.16. *In effetti si può capire facilmente l'equivalenza fra funzioni di $W^{1,\infty}$ e funzioni Lipschitziane non solo su $(0, 1)$ ma su qualunque intervallo, visto che per qualunque intervallo si ha la validità della formula (3.4) per funzioni localmente in $W^{1,1}$, quali ad esempio le funzioni $W^{1,\infty}$; in particolare, l'equivalenza vale per $\Omega = \mathbb{R}$. Se invece $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, ma non è un intervallo, bisogna fare attenzione: dal momento che le funzioni $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ sono Lipschitziane, la Lipschitzianità delle funzioni in $W^{1,\infty}(\Omega)$ si deduce immediatamente per tutti gli aperti Ω*

per i quali esiste un'estensione di $W^{1,\infty}(\Omega)$. Si osservi però che in questo caso la costante di Lipschitz si stima non con la norma L^∞ della derivata, ma con essa moltiplicata per la norma dell'estensione, che può anche essere molto grande, ad esempio se Ω è dato da due intervalli disgiunti ma vicini. In generale, se non esiste un'estensione, possono tranquillamente esistere funzioni in $W^{1,\infty}(\Omega)$ che non sono Lipschitziane, come la solita funzione costante a pezzi su $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$. Infine, nel caso di dimensione $n \geq 2$, è ancora vero che le funzioni $W^{1,\infty}(\Omega)$ sono tutte e sole le Lipschitziane purché Ω sia sufficientemente regolare, come vedremo nell'Osservazione 5.15.

Passiamo adesso a notare che la chain rule continua a valere anche in ambito di funzioni di Sobolev, cosa che come si può intuire è di estrema importanza.

Teorema 4.17 (Chain rule). *Sia $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, e si abbia che $G(0) = 0$ oppure che Ω ha misura finita. Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e per ogni $1 \leq p \leq \infty$, si ha anche $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$; se poi $G(0) = 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, anche $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Vale inoltre la chain rule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u)(x) = \begin{cases} G'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{se } G'(u(x)) \text{ esiste in senso classico;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Prima di riuscire a mostrare questo teorema, avremo bisogno di alcuni risultati preliminari tecnici. Prima di tutto osserviamo che essendo G una funzione Lipschitziana, quindi in $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, la derivata G' esiste quasi ovunque in senso classico: infatti, grazie alla (3.4), otteniamo subito che $G'(t)$ è definita in senso classico in tutti i punti t di Lebesgue per G' . Più in generale, il Teorema di Rademacher assicura che una funzione Lipschitziana su un qualunque aperto di \mathbb{R}^n è quasi ovunque differenziabile in senso classico. Dunque $G'(t)$ non è ben definito solo su un insieme trascurabile di $t \in \mathbb{R}$. Tuttavia, anche per molti x può accadere che $u(x)$ stia in questo insieme trascurabile: ad esempio $u(x)$ potrebbe valere costantemente un numero t per cui $G'(t)$ non esiste in senso classico! L'informazione che $G \circ u$ abbia derivate parziali nulle quasi ovunque negli x per i quali $G'(u(x))$ non esiste in senso classico, quindi, è tutt'altro che poco interessante: se gli x che vanno in questi punti sono trascurabili, in effetti, l'informazione delle derivate in quei punti è irrilevante, visto che le derivate deboli sono comunque definite solo quasi ovunque; ma in caso contrario, sapere che $G \circ u$ ha derivate nulle è molto importante e tutt'altro che banale. Cominciamo con un fondamentale risultato, dovuto a Stampacchia, la cui dimostrazione è piuttosto complessa ed è stata messa a parte nella prossima sezione.

Lemma 4.18 (Stampacchia). *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$; sia poi $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme trascurabile. Allora $\partial u / \partial x_i = 0$ quasi ovunque sull'insieme $\{x : u(x) \in A\}$.*

Proof. (del Teorema 4.17):

Step I. *Il caso $G \in C^1(\mathbb{R})$, $p < \infty$.*

Se G è di classe C^1 e $p < \infty$, cominciamo con l'osservare che per la L -Lipschitzianità di G si ha

$$|G \circ u(x)| \leq |G(0)| + L|u(x)|,$$

e dunque $G \circ u$ sta in $L^p(\Omega)$ purché Ω sia limitato oppure $G(0) = 0$. D'altra parte, si ha anche che

$$G'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \in L^p(\Omega),$$

e questa funzione è quella che vorremmo fosse la derivata lungo la direzione x_i di $G \circ u$. Approssimiamo adesso u con funzioni regolari u_k nel senso del Teorema di Friedrichs, ossia le funzioni u_k sono in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_k \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$, e le derivate di u_k tendono alle derivate di u in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$. Sia anche $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e si noti che il supporto di φ sta dentro ad un opportuno aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$, sul quale si ha convergenza forte in senso $W^{1,p}$ di u_k ad u . Visto che G ed u_k sono regolari, sappiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G \circ u_k(x) = G'(u_k(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x);$$

abbiamo quindi che

$$\int_{\Omega} G \circ u_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) G'(u_k(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx. \quad (4.8)$$

Cerchiamo di passare al limite in questa uguaglianza: per quanto riguarda $G \circ u_k$ basta notare che

$$|G(u_k(x)) - G(u(x))| \leq L|u_k(x) - u(x)|,$$

e quindi $G \circ u_k \rightarrow G \circ u$ in L^p ed allora per il primo termine nella (4.8) si ha subito la convergenza

$$\int_{\Omega} G \circ u_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} G \circ u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx. \quad (4.9)$$

Per quanto riguarda il secondo termine, ricordiamo che $\partial u_k / \partial x_i$ converge a $\partial u / \partial x_i$ forte in L^p sull'aperto Ω' . Possiamo allora stimare

$$G' \circ u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - G' \circ u \frac{\partial u}{\partial x_i} = G' \circ u_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(G' \circ u_k - G' \circ u \right). \quad (4.10)$$

Il primo termine a destra tende a 0 in $L^p(\Omega')$, visto che $G' \circ u_k$ è limitata da L e $\partial u_k / \partial x_i \rightarrow \partial u / \partial x_i$ in $L^p(\Omega')$. Per quanto riguarda il secondo termine, notiamo che $\partial u / \partial x_i$ è un'assegnata funzione in $L^p(\Omega')$, mentre $G' \circ u_k - G' \circ u$ è senz'altro limitato da $2L$, per cui il secondo termine è limitato da una fissata funzione in $L^p(\Omega')$; d'altra parte, visto che $u_k \rightarrow u$ fortemente in L^p , a meno di sottosuccessioni abbiamo convergenza puntuale di u_k ad u e dunque di $G' \circ u_k$ a $G' \circ u$: per il Teorema della Convergenza Dominata, allora, il secondo termine a destra in (4.10) (e quindi anche il termine a sinistra) tende fortemente a 0 in $L^p(\Omega')$. Ne deduciamo, per il secondo termine della (4.8), la stima

$$\int_{\Omega} \varphi(x) G'(u_k(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi(x) G'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (4.11)$$

Mettendo insieme (4.8), (4.9) e (4.11), abbiamo così ottenuto la chain rule nel caso di G di classe C^1 e per $p < \infty$.

Step II. *Il caso G Lipschitziana, $p < \infty$.*

Supponiamo adesso che G sia soltanto Lipschitziana, e dunque per la Proposizione 4.15 $G \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Grazie alle solite convoluzioni, otteniamo una successione G_n di funzioni regolari tali che $G_n \xrightarrow{W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R})} G$, e quindi in particolare G_n converge a G localmente uniformemente e quindi di certo puntualmente. Visto poi che come già osservato nella dimostrazione della Proposizione 4.15 anche le G_n sono L -Lipschitziane, abbiamo che

$$|G_n(u(x))| \leq L|u(x)| + G_n(0);$$

si osservi che in generale $G_n(0)$ converge a $G(0)$, ma se vogliamo possiamo anche tranquillamente supporre che $G_n(0) = G(0)$ per ogni n e questo non inficia la convergenza $W_{\text{loc}}^{1,1}$. Si ha quindi che con Ω limitato oppure con $G(0) = 0$ le $G_n \circ u$ sono tutte funzioni limitate da una stessa funzione L^p ; la convergenza puntuale di G_n a G , e quindi di $G_n \circ u$ a $G \circ u$, ci assicura allora che $G_n \circ u \rightarrow G \circ u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. A meno di sottosuccessioni, la convergenza di G'_n a G' in L^1_{loc} ci assicura anche la convergenza puntuale quasi ovunque; per questo e per quanto osservato subito dopo l'enunciato della chain rule, allora, sono trascurabili i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} :

$$A = \{t \in \mathbb{R} : G'_n(t) \not\rightarrow G'(t)\}, \quad B = \{t \in \mathbb{R} : G'(t) \text{ non esiste in senso classico}\}.$$

Per ogni n sappiamo, grazie allo Step I, che vale quasi ovunque la relazione

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G_n \circ u)(x) = G'_n(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x);$$

ora, se $u(x) \notin A$ allora sappiamo che $G'_n(u(x)) \rightarrow G'(u(x))$, e per la limitatezza delle G'_n e di G' data dalla Lipschitzianità e usando ancora la convergenza dominata otteniamo che

$$G'_n(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow G'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

nella convergenza forte di $L^p(u^{-1}(\mathbb{R} \setminus A))$. D'altra parte, visto che A è trascurabile, per il Lemma di Stampacchia sappiamo che $\partial u / \partial x_i(x) = 0$ quasi ovunque in $u^{-1}(A)$. Ne deduciamo che $G'_n(u(x)) \partial u / \partial x_i$ converge fortemente a v in $L^p(\Omega)$, dove

$$v(x) = \begin{cases} G'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{se } x \in u^{-1}(\mathbb{R} \setminus A); \\ 0 & \text{se } x \in u^{-1}(A). \end{cases} \quad (4.12)$$

Usando come al solito le convergenze in L^p e scaricando le derivate per le approssimanti su una funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, otteniamo allora che $G \circ u$ stia in $W^{1,p}(\Omega)$ e che le sua derivata i -esima debole è v : per concludere la tesi, dobbiamo verificare che v sia in accordo con la (4.7), ossia dobbiamo riuscire a sostituire A con B nella (4.12). In effetti, però, visto che A e B sono trascurabili, su $A \setminus B$ e su $B \setminus A$ si ha che per quasi ogni x è $\partial u / \partial x_i = 0$, e quindi in effetti si ha quanto desiderato.

Step III. *Il caso $p = \infty$.*

Per concludere è sufficiente considerare il caso $p = \infty$. Ma se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, su ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$

si ha che $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e quindi otteniamo che $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega')$ e che la formula (4.7) vale in Ω' . Ma questo assicura in particolare che $G \circ u \in W^{1,\infty}(\Omega')$, e visto che questo si ha su ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ si conclude la tesi. \square

Corollario 4.19. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$, e si ha che $\partial|u|/\partial x_i = \partial u/\partial x_i$ su $\{u(x) > 0\}$, $\partial|u|/\partial x_i = -\partial u/\partial x_i$ su $\{u(x) < 0\}$, e $\partial|u|/\partial x_i = 0$ su $\{u(x) = 0\}$.*

Osservazione 4.20. *E' immediato osservare che, in particolare, il risultato sulla chain rule ci dice che se $G(0) = 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$: basta approssimare u con funzioni u_m in $C_0^\infty(\Omega)$ ed osservare che allora anche $G \circ u_m$ si annulla fuori da un compatto dentro Ω . Si conclude quindi grazie al Lemma 4.21 seguente e grazie alla chiusura di $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Concludiamo infine con alcuni risultati riguardanti le funzioni di $W_0^{k,p}(\Omega)$, che vanno nella direzione dell'intuizione visto che ci piacerebbe pensare gli elementi di $W_0^{k,p}(\Omega)$ come le funzioni di $W^{k,p}(\Omega)$ che valgono 0 su $\partial\Omega$.

Lemma 4.21. *Sia $1 \leq p < \infty$; se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $u = 0$ su $\Omega \setminus \Omega'$ per un $\Omega' \subset\subset \Omega$, allora $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Più in generale, possiamo dire che $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ che si annulla fuori da Ω' purché $\text{dist}(\Omega', {}^c\Omega) > 0$.*

Proof. Prendiamo una successione u_h di funzioni in $C^\infty(\Omega)$ che tendono ad u in $W^{k,p}(\Omega)$, grazie al Teorema di Meyers e Serrin. Sia poi η una funzione cut-off regolare che vale 1 su Ω' e si annulla fuori da un opportuno $\Omega'' \subset\subset \Omega$: le funzioni ηu_h sono ovviamente funzioni in $C_0^\infty(\Omega)$, dunque la prima parte della tesi sarà ottenuta pur di osservare che $\eta u_h \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$. Visto che η vale 1 su Ω' , è chiaro che

$$\|\eta u_h - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = \|u_h - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \longrightarrow 0.$$

D'altra parte, visto che tutte le derivate fino all'ordine k di η sono limitate, esiste una costante K tale che

$$\|\eta u_h - u\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega')} = \|\eta u_h\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega')} \leq K \|u_h\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega')} = K \|u_h - u\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega')} \longrightarrow 0.$$

Per quanto riguarda la seconda parte della tesi (che peraltro implica la prima, ed infatti la prima parte della dimostrazione poteva essere omessa ed è stata aggiunta solo in quante utile ragionamento "standard"), partiamo definendo $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ essendo ρ_ε dei mollificatori standard ed essendo $2\varepsilon < 2\bar{\varepsilon} := \text{dist}(\Omega', {}^c\Omega)$: sappiamo allora che le u_ε convergono forte in $W^{k,p}(B(\Omega', \bar{\varepsilon}))$ ad u , e d'altra parte ogni u_ε è nulla fuori da $B(\Omega', \varepsilon)$ e dunque la sua estensione a 0 fuori da $B(\Omega', \bar{\varepsilon})$ è C^∞ su tutto Ω . Abbiamo dunque che le funzioni regolari u_ε , tutte supportate in $B(\Omega', \bar{\varepsilon})$, convergono su tutto $W^{k,p}(\Omega)$ ad u . Prendiamo ora un ricoprimento di Ω fatto con gli aperti

$$\Omega_h := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < h, \text{dist}(x, {}^c\Omega) > \frac{1}{h} \right\} :$$

si tratta ovviamente di aperti a chiusura compatta, inscatolati, e che riempiono Ω ; siano adesso $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $\varphi(t) = 1$ per $t \leq 1/4$, e $\varphi(t) = 0$ per $t \geq 3/4$, e

$\psi_h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $\psi_h(t) = 0$ in un intorno di $\{t : t \leq 1/(h+1)\}$ e $\psi_h(t) = 1$ per $t \geq 1/h$. Definiamo finalmente delle funzioni cut-off η_h come segue:

$$\eta_h(x) = \varphi(|x| - h)\psi_h(\text{dist}(x, {}^c\Omega));$$

è immediato notare dalla definizione che η_h vale 1 su Ω_h ed ha supporto compatto contenuto in Ω_{h+1} ; tuttavia, visto che la distanza da un chiuso è una funzione continua ma non necessariamente regolare, le η_h sono solo continue. Ciò nonostante, consideriamo le funzioni $u_\varepsilon\eta_h$ con $h > 1/\varepsilon$: per definizione ψ_h vale costantemente 1 dove $u_\varepsilon \neq 0$, e dunque in effetti $\eta_h(x) = \varphi(|x| - h)$ su $\tilde{\Omega} := \{u_\varepsilon \neq 0\}$. E' molto semplice notare che esiste una costante K tale che la funzione $\varphi(|x| - h)$ e tutte le sue derivate fino all'ordine k sono limitate da K , con K che *non* dipende da h , e quindi η_h è regolare ed ha tutte le derivate fino all'ordine k limitate da K sull'insieme $\tilde{\Omega}$. Di conseguenza, le funzioni $u_\varepsilon\eta_h$ sono funzioni in $C_0^\infty(\Omega)$, che coincidono con u_ε in un intorno di Ω_h ma hanno supporto compatto contenuto in Ω_{h+1} . Fissiamo allora ε ed osserviamo cosa succede per $h \rightarrow \infty$: usando il fatto che per ogni p ed ogni $f \in L^p(A \cup B)$ si ha $\|f\|_{L^p(A \cup B)} \leq \|f\|_{L^p(A)} + \|f\|_{L^p(B)}$, e ricordando la formula di Leibniz, si ottiene

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_\varepsilon\eta_h\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \|u_\varepsilon - u_\varepsilon\eta_h\|_{W^{k,p}(\Omega_h)} + \|u_\varepsilon - u_\varepsilon\eta_h\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega_h)} \\ &= \|u_\varepsilon(1 - \eta_h)\|_{W^{k,p}((\Omega \setminus \Omega_h) \cap \tilde{\Omega})} \leq C_1 \|u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega_h)} \|1 - \eta_h\|_{W^{k,\infty}(\tilde{\Omega})} \\ &\leq C_1 C_2 K \|u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega \setminus \Omega_h)} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti che dipendono solo da n e da k , ma non da ε , h od Ω . Finalmente, per ogni ε possiamo scegliere un $h = h(\varepsilon)$ tale che

$$\|\eta_{h(\varepsilon)}u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq 2 \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

ottenendo quindi la tesi. □

Un esercizio interessante può essere il seguente.

Osservazione 4.22. *Usando una strategia simile a quella della dimostrazione appena conclusa, si dimostri che il Teorema di Friedrichs può essere enunciato non solo per gli $\Omega' \subset\subset \Omega$, ma anche per gli Ω' per i quali $\text{dist}(\Omega', {}^c\Omega) > 0$.*

Lemma 4.23. *Se $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, e $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Proof. Supponiamo per il momento che Ω sia limitato: per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$G_\varepsilon(t) := \begin{cases} t - \varepsilon & \text{se } t \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{se } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \\ t + \varepsilon & \text{se } t \leq -\varepsilon; \end{cases}$$

si tratta di una funzione 1-Lipschitziana che si annulla tra $-\varepsilon$ ed ε e la cui derivata è pari ad 1 su $\{|t| > \varepsilon\}$ e a 0 su $\{|t| < \varepsilon\}$. Grazie alla chain rule, allora, la funzione $G_\varepsilon \circ u$ appartiene a

$W^{1,p}(\Omega)$, ed in particolare per quasi ogni x si ha

$$\frac{\partial G_\varepsilon \circ u}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{se } |u(x)| \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{se } |u(x)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Si ha allora che $|G_\varepsilon \circ u| \leq |u|$, e che $|\partial(G_\varepsilon \circ u)|/\partial x_i| \leq |\partial u/\partial x_i|$, per cui se mostriamo la convergenza puntuale di $G_\varepsilon \circ u$ e di $\partial(G_\varepsilon \circ u)/\partial x_i$ ad u e $\partial u/\partial x_i$ otteniamo che $G_\varepsilon \circ u \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u$. In effetti, la convergenza puntuale di $G_\varepsilon \circ u$ ad u è ovvia: per ogni x , $G_\varepsilon \circ u(x) = u(x)$ per $\varepsilon < |u(x)|$ se $u(x) \neq 0$, e addirittura per ogni ε altrimenti! Per quanto riguarda la convergenza puntuale delle derivate parziali, invece, si ha che le derivate parziali di $G_\varepsilon \circ u$ convergono puntualmente a quelle di u sull'insieme $\{u(x) \neq 0\}$. Nell'insieme $\{u(x) = 0\}$, d'altra parte, le derivate parziali di tutte le $G_\varepsilon \circ u$ sono nulle, ma grazie al Lemma di Stampacchia sappiamo anche che le derivate parziali di u sono nulle quasi ovunque: la convergenza puntuale quasi ovunque quindi segue.

Per concludere nel caso di Ω limitato, basta notare che per ogni ε la funzione $G_\varepsilon \circ u$ ha supporto a distanza strettamente positiva da ${}^c\Omega$, e dunque $G_\varepsilon \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ grazie al Lemma 4.21; visto poi che $W_0^{1,p}(\Omega)$ è chiuso, la convergenza delle $G_\varepsilon \circ u$ ci assicura che anche $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dobbiamo adesso ridurci al caso in cui Ω sia limitato: per fare questo, definiamo delle funzioni $\eta_h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tali che $\eta_h(x) = 1$ se $|x| \leq h$ ed $\eta_h(x) = 0$ se $|x| \geq h + 1$; come osservato nel Lemma 4.21, queste funzioni hanno tutte le derivate prime limitate in modo indipendente da h . Allora le funzioni $u_h = \eta_h u$ sono continue, si annullano su $\partial\Omega$, e stanno in $W^{1,p}(\Omega)$, ed inoltre le loro derivate sono dominate da una funzione L^p , essendo

$$\left| \frac{\partial u_h}{\partial x_i}(x) \right| \leq \left| \frac{\partial \eta_h}{\partial x_i}(x) u(x) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \eta_h(x) \right| \leq K \left(|u(x)| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \right);$$

visto che si ha convergenza puntuale di u_h e delle sue derivate ad u ed alle sue derivate, abbiamo che u_h tende ad u in $W^{k,p}(\Omega)$. D'altra parte, se chiamiamo Ω_h l'aperto su cui u_h è diverso da 0, u_h è una funzione continua su $\overline{\Omega_h} \subseteq \overline{\Omega}$, sta in $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega_h)$, e si annulla su $\partial\Omega_h$ per definizione; per quanto già dimostrato e visto che Ω_h è limitato, allora, $u_h \in W_0^{1,p}(\Omega_h)$; visto poi che u_h è nulla su $\Omega \setminus \Omega_h$, si vede subito (e lo faremo fra un momento nel Lemma 4.26) che in effetti $u_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e quindi grazie nuovamente alla chiusura di $W_0^{1,p}(\Omega)$ otteniamo la tesi. \square

Lasciamo ora altri due esercizi utili.

Osservazione 4.24. *Si osservi come il risultato appena dato non è valido per $W_0^{k,p}(\Omega)$ con $k > 1$: si mostri come invece andrebbe bene l'ipotesi che $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$ con $D^\alpha u \equiv 0$ su $\partial\Omega$ per tutti gli α di lunghezza al più $k - 1$.*

Osservazione 4.25. *Si scriva un'altra dimostrazione del lemma appena dato, valida con l'ipotesi aggiuntiva che u sia Lipschitziana, senza utilizzare la chain rule: non si potrà approssimare u con funzioni del tipo $G_\varepsilon \circ u$, ma andrà approssimata con funzioni del tipo $\eta_\varepsilon u$; come suggerimento, si consideri prima il caso in cui Ω è limitato.*

Lemma 4.26. *Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, allora l'estensione di u a 0 fuori da Ω sta in $W^{k,p}(\Omega')$ per ogni $\Omega' \supseteq \Omega$.*

Proof. Per definizione, esiste una successione $u_h \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $u_h \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$; se definiamo la funzione $\tilde{u}_h : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ estendendo la u_h a 0 fuori da Ω , visto che la u_h ha supporto compatto in Ω si ha subito che \tilde{u}_h è una funzione di classe C^∞ , e che tutte le derivate della \tilde{u}_h si annullano fuori da Ω . Definiamo ora, per ogni α di lunghezza al più k , $\widetilde{D^\alpha u}$ come l'estensione di $D^\alpha u$ a 0 fuori da Ω : è chiaro che ogni $\widetilde{D^\alpha u}$ è una funzione di $L^p(\Omega')$, ed inoltre le $D^\alpha \tilde{u}_h$ convergono fortemente in $L^p(\Omega')$ a $\widetilde{D^\alpha u}$. Sia allora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$: essendo le \tilde{u}_h regolari sappiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha(\tilde{u}_h)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_h D^\alpha \varphi;$$

se mandiamo come al solito $h \rightarrow \infty$, dal momento che \tilde{u}_h e $D^\alpha \tilde{u}_h$ convergono fortemente in $L^p(\Omega')$ ad \tilde{u} , l'estensione di u a 0 fuori da Ω , e a $\widetilde{D^\alpha u}$, e che φ e $D^\alpha \varphi$ sono funzioni in $L^{p'}(\Omega')$, otteniamo

$$\int_{\Omega'} \widetilde{D^\alpha u} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega'} \tilde{u} D^\alpha \varphi :$$

questo ci assicura che \tilde{u} sta in $W^{k,p}(\Omega')$ e che le sue derivate deboli sono le $\widetilde{D^\alpha u}$, ovvero le estensioni delle derivate deboli di u a 0 fuori da Ω . \square

4.4 La dimostrazione del Lemma di Stampacchia

Vediamo adesso la dimostrazione del Lemma di Stampacchia.

Proof. (del Lemma 4.18): Iniziamo supponendo che Ω sia un aperto limitato, poi alla fine toglieremo l'ipotesi di limitatezza. Prendiamo quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e sia

$$F := \left\{ x \in \Omega : u(x) \in A, Du(x) \neq 0 \right\},$$

in modo che la tesi consista nel dimostrare che F è trascurabile. Dividiamo la dimostrazione in alcuni passaggi.

Step I. *Definizione delle costanti e degli insiemi.*

Fissiamo, nell'ordine, prima due numeri strettamente positivi K e δ (rispettivamente molto grande e molto piccolo); poi un numero piccolo $\eta > 0$; poi un numero piccolo ρ ; ed infine un numero piccolo σ .

Chiamiamo adesso

$$F_\delta = \left\{ x \in F : |Du(x)| \geq \delta \right\},$$

in modo che gli insiemi F_δ siano inscatolati e riempiano tutto F per $\delta \searrow 0$. Si osservi che quasi ogni punto di F_δ è un punto di Lebesgue per u e per Du , e quindi per quasi ogni $x \in F_\delta$ si ha

$$\int_{B_r(x)} |Du(z) - Du(x)| dz \leq \eta \tag{4.13}$$

purché r sia abbastanza piccolo (in maniera che dipende da x , da δ e da η). Consideriamo adesso l'insieme

$$F_{\delta,\eta,\rho} := \left\{ x \in F_\delta : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \sqrt{n}\rho \text{ e la (4.13) vale per ogni } r \leq \sqrt{n}\rho \right\} :$$

ovviamente, fissati δ ed η , gli insiemi $F_{\delta,\eta,\rho}$ sono inscatolati e riempiono tutto F_δ quando $\rho \searrow 0$.

A questo punto, scegliamo numerabili intervalli disgiunti I_i , ciascuno di lunghezza σ_i , in modo che $A_\sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ abbia misura totale $\sum_i \sigma_i \leq \sigma$ e che $A \subseteq A_\sigma$.

Step II. *Stima locale per gli $x \in F_{\delta,\eta,\rho}$.*

Fissiamo un punto $x \in F_{\delta,\eta,\rho}$, supponiamo per comodità che $Du(x) = D e_1$ con $D \geq \delta$, ed indichiamo con Q_ρ il cubo di lato ρ con i lati paralleli agli assi coordinati e centrato in x . Sia inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega) - \sqrt{n}\rho$, $u_\varepsilon : Q_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, cioè la convoluzione di u con un mollificatore standard (la funzione u_ε è ben definita su Q_ρ , come al solito). Sappiamo già che, se $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε converge forte a u in $W^{1,1}(Q_\rho)$; per un'opportuna successione $\varepsilon_i \searrow 0$, inoltre, si ha anche che u_ε e Du_ε convergono puntualmente quasi ovunque a u ed a Du . Di conseguenza, se ε è abbastanza piccolo (in maniera che dipende dalla scelta di x , di δ , di η e di ρ) si avrà

$$\int_{Q_\rho} |Du_\varepsilon(z) - D e_1| dz \leq \int_{B_{\sqrt{n}\rho}(x)} |Du_\varepsilon(z) - D e_1| dz \leq 2\eta \omega_n n^{n/2} \rho^n. \quad (4.14)$$

Indicando il generico punto di \mathbb{R}^n come $z = (w, y)$, essendo w la prima coordinata ed y le altre $n-1$, e chiamando Q_ρ^{n-1} il cubo $(n-1)$ -dimensionale di lato ρ che si ottiene proiettando Q_ρ su \mathbb{R}_y^{n-1} , dalla (4.14) si ha subito che

$$|C| \leq \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \rho^{n-1},$$

dove

$$C = C(K, \delta, \eta, \rho, x, \varepsilon) := \left\{ y \in Q_\rho^{n-1} : \int_{-\rho/2}^{\rho/2} |Du_\varepsilon(w, y) - D e_1| dw \geq K\eta\rho \right\}.$$

Prendiamo adesso $y \notin C$: questo vuol dire, in pratica, che la u_ε è molto vicina ad una funzione lineare con pendenza D nel segmento dei punti (y, w) con $w \in (-\rho/2, \rho/2)$. Si può allora facilmente osservare (si faccia come semplice esercizio!) che esistono numerabili intervalli disgiunti J_i in $(-\rho/2, \rho/2)$ tali che

$$u_\varepsilon(\cdot, y)^{-1}(A_\sigma) \subseteq \bigcup_i J_i, \quad u_\varepsilon(\partial J_i) \subseteq \partial I_i \quad \forall i.$$

Per ciascuno di questi intervalli, detto

$$\alpha_i := \int_{J_i} |Du_\varepsilon(w, y) - D e_1| dw,$$

per costruzione si ha che certamente

$$|J_i| \leq \frac{\sigma_i + \alpha_i}{D}.$$

Ne segue che

$$\left| u_\varepsilon(\cdot, y)^{-1}(A_\sigma) \right| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |J_i| \leq \frac{\sum_i \sigma_i + \sum_i \alpha_i}{D} \leq \frac{\sigma + K\eta\rho}{D}.$$

Possiamo allora dedurre che

$$\begin{aligned} \left| u_\varepsilon^{-1}(A_\sigma) \right| &\leq |Q_\rho^{n-1} \setminus C| \frac{\sigma + K\eta\rho}{D} + |C|\rho \leq \rho^{n-1} \frac{\sigma + K\eta\rho}{D} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \rho^n \\ &= \rho^n \left(\frac{K\eta}{D} + \frac{\sigma}{D\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right). \end{aligned}$$

A questo punto, visto che u_ε converge ad u puntualmente quasi ovunque sul cubo Q_ρ per ε che tende a 0, e visto che A_σ è aperto, abbiamo che

$$\left| u|_{Q_\rho}^{-1}(A_\sigma) \right| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| u_\varepsilon^{-1}(A_\sigma) \right| \leq \rho^n \left(\frac{K\eta}{D} + \frac{\sigma}{D\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right).$$

Si osservi con cura che, se A_σ fosse stato chiuso, avremmo avuto la disuguaglianza opposta con il limsup, mentre per un generico A_σ non vale in generale nessuna stima (questo è il motivo per cui abbiamo introdotto l'aperto A_σ invece di lavorare direttamente con A). Dal momento che il cubo Q_ρ contiene la palla $B_\rho(x)$, possiamo concludere questo step riassumendo quello che abbiamo scoperto:

$$\left| u^{-1}(A_\sigma) \cap B_\rho(x) \right| \leq \rho^n \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right) \quad \forall x \in F_{\delta,\eta,\rho}. \quad (4.15)$$

Step III. Un “covering lemma” alla Vitali.

Vediamo adesso che è possibile ricoprire l'insieme $F_{\delta,\eta,\rho}$ con un numero finito di palle di raggio ρ in modo che le corrispondenti palle di raggio $\rho/3$ siano disgiunte. Si tratta di un caso particolare del “covering Lemma” di Vitali, mostrato all'inizio del secolo scorso: in generale, i lemmi di ricoprimento sono risultati che permettono di estrarre, da opportuni ricoprimenti, dei sottoricoprimenti con particolari proprietà.

Innanzitutto osserviamo che, ovviamente, le palle di raggio $\rho/3$ centrate nei punti $x \in F_{\delta,\eta,\rho}$ ricoprono tutto $F_{\delta,\eta,\rho}$. Possiamo allora ragionare come segue: sia x_1 un generico punto di $F_{\delta,\eta,\rho}$. Se $B_\rho(x_1)$ ricopre tutto $F_{\delta,\eta,\rho}$ abbiamo già concluso; altrimenti, sia $x_2 \in F_{\delta,\eta,\rho}$ non appartenente a $B_{2\rho/3}(x_1)$, in modo che ovviamente le palle centrate in x_1 ed in x_2 di raggio $\rho/3$ non si intersecano. Continuiamo così per induzione: dati i punti x_1, x_2, \dots, x_k in $F_{\delta,\eta,\rho}$ in modo che le diverse palle di raggio $\rho/3$ non si intersecano, se le palle di raggio ρ ricoprono tutto $F_{\delta,\eta,\rho}$ concludiamo, mentre altrimenti prendiamo un $x_{k+1} \in F_{\delta,\eta,\rho}$ che non appartenga all'unione delle palle di raggio $2\rho/3$, cosicché la nuova palla di raggio $\rho/3$ non interseca nessuna delle precedenti. In questo modo otteniamo una sequenza di punti x_i e, visto che Ω è limitato, necessariamente la sequenza è formata da un numero finito N di punti, ed in particolare

$$N \left(\omega_n \frac{\rho^n}{3^n} \right) \leq |\Omega|. \quad (4.16)$$

Step IV. Conclusione nel caso di Ω limitato.

Grazie allo Step III, abbiamo N palle di raggio ρ che ricoprono $F_{\delta,\eta,\rho}$; applicando adesso a ciascuna di esse la (4.15) dello Step II, e ricordando la (4.16), deduciamo che

$$\left| u^{-1}(A_\sigma) \cap F_{\delta,\eta,\rho} \right| \leq N\rho^n \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right) \leq |\Omega| \frac{3^n}{\omega_n} \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right).$$

Ricordiamoci adesso che, se $x \in F_{\delta,\eta,\rho}$, allora in particolare $x \in F$ e dunque per definizione $u(x) \in A$: si ha allora che $u^{-1}(A_\sigma) \cap F_{\delta,\eta,\rho} = F_{\delta,\eta,\rho}$, essendo $A_\sigma \supseteq A$, e quindi possiamo riscrivere l'ultima disuguaglianza come

$$|F_{\delta,\eta,\rho}| \leq |\Omega| \frac{3^n}{\omega_n} \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta\rho} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right).$$

Visto che σ è l'ultima costante che abbiamo scelto, mandando σ a 0 senza toccare le altre costanti deduciamo

$$|F_{\delta,\eta,\rho}| \leq |\Omega| \frac{3^n}{\omega_n} \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right).$$

Notiamo ora che in quest'ultima disuguaglianza non compare ρ a destra; d'altra parte, abbiamo già osservato che, per qualunque scelta di δ e di η , gli insiemi $F_{\delta,\eta,\rho}$ riempiono tutto F_δ quando ρ tende a 0. Si ha allora che

$$|F_\delta| \leq |\Omega| \frac{3^n}{\omega_n} \left(\frac{K\eta}{\delta} + \frac{2\omega_n n^{n/2}}{K} \right).$$

Visto che η è stato scelto dopo K e δ e che la definizione di F_δ non dipende da η , possiamo mandare η a 0 senza toccare K e δ e troviamo

$$|F_\delta| \leq |\Omega| \frac{2 \cdot 3^n n^{n/2}}{K}.$$

Finalmente, visto che gli insiemi F_δ riempiono tutto F quando $\delta \searrow 0$, mandando δ a 0 e K all'infinito (e qui non conta l'ordine perché δ compare solo a sinistra mentre K solo a destra) concludiamo che $|F| = 0$, che era la tesi cercata.

Step V. *Conclusione per Ω non limitato.*

Per concludere la tesi in generale, per un qualsiasi Ω , è sufficiente scrivere $\Omega = \bigcup \Omega_R$, essendo $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$. Visto che la restrizione di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ all'insieme Ω_R sta in $W^{1,p}(\Omega_R)$, il caso limitato che abbiamo già concluso ci permette di dedurre che

$$\left\{ x \in \Omega : u(x) \in A, Du(x) \neq 0, |x| < R \right\}$$

è un insieme trascurabile per ogni R . Mandando R all'infinito si conclude la tesi. Si osservi che l'esponente p non è intervenuto in alcun modo nella dimostrazione, visto che abbiamo sempre usato solo l'appartenenza locale di u a $W^{1,1}$. \square

Capitolo 5

Le immersioni di Sobolev

La definizione di spazi di Sobolev ci assicura che $W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$; tuttavia, si può sospettare che una funzione che abbia derivate, sia pure di tipo debole, in qualche spazio di Lebesgue, debba avere un po' di regolarità aggiuntiva. Ad esempio, nel caso introduttivo in cui consideravamo l'intervallo unitario in \mathbb{R} ci siamo accorti che le funzioni di classe $W^{1,1}$ erano non solo L^1 , ma anche di classe L^∞ , ed addirittura erano uniformemente continue. Per capire cosa accada nel caso generale n -dimensionale dovremo fare un po' più di fatica, principalmente perché le derivate deboli non sono immediatamente utilizzabili come accadeva con la formula (3.4). Per tentare di attaccare la complessità di integrali n -dimensionali riducendo la situazione a più comodi integrali uno-dimensionali non potremo utilizzare in modo semplice il teorema di Fubini, come si potrebbe sperare in un primo momento: si potrebbe infatti, ad esempio, tentare di investigare la continuità delle funzioni in $W^{1,1}(\Omega)$ –che peraltro è falsa!– ragionando sull'esistenza di un rappresentante continuo su quasi ogni sezione e poi cercando di incollare, però si entra immediatamente in problemi di misurabilità e di buone definizioni abbastanza complicati e che richiedono sforzi notevoli. Questa strada si può percorrere e porta ai cosiddetti risultati di *slicing*, estremamente interessanti e potenti, tuttavia non la esploreremo in questo corso (anche se l'eventuale curiosità di qualche studente verrebbe ampiamente gradita e soddisfatta!).

5.1 Immersioni continue: il caso $p < n$

Cerchiamo di mostrare che le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ appartengono a qualche spazio $L^q(\Omega)$ per qualche esponente q migliore di p ; iniziamo definendo, se $p < n$, l'esponente p^* dalla

$$-\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p}, \quad \text{quindi} \quad p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Si noti che $p^* > p$, e $p^* \rightarrow \infty$ se $p \rightarrow n$. Prima di enunciare il risultato generale, vedremo vari risultati intermedi. Cominciamo con un primo strumento tecnico che utilizzeremo per “abbassare

di dimensione la complessità”.

Lemma 5.1 (Gagliardo). *Siano $f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}$ funzioni in $L^k(\mathbb{R}^k)$; per $x \in \mathbb{R}^{k+1}$ e per $1 \leq i \leq k+1$, inoltre, chiamiamo $\mathbb{R}^k \ni x^i := (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{k+1})$, ossia il punto di \mathbb{R}^k che abbia tutte le coordinate di x esclusa la i -esima. Allora la funzione $f(x) = \prod_{i=1}^{k+1} f_i(x^i)$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^{k+1})$ ed in particolare*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{k+1})} \leq \prod_{i=1}^{k+1} \|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)}. \quad (5.1)$$

Prima di iniziare la dimostrazione, si noti che questo lemma ci dà un po' più di quello che sarebbe immediato aspettarsi: infatti, dalla disuguaglianza di Hölder sappiamo bene che il prodotto di k funzioni di L^k stia in L^1 , ma qui abbiamo il prodotto di $k+1$ funzioni L^k ! Sarebbe dunque più che lecito sospettare, a prima vista, che il risultato non possa valere; come si capirà dalla dimostrazione, infatti, quello che fa funzionare tutto è il fatto che le diverse f_i sono tutte funzioni di k variabili, mentre la funzione f è di $k+1$ variabili e di volta in volta nel fare il prodotto ne “dimentica” una.

Proof. (del Lemma 5.1): Agiremo per induzione: il caso $k=1$ è molto semplice, visto che si ha per Fubini

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2) f_2(x_1)| dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)| dx_1 \right) dx_2 = \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Se adesso il caso $k-1$ è stato mostrato, cerchiamo di ottenere il caso k : prendiamo le funzioni f_i e congeliamo per il momento la variabile x_{k+1} , ponendola uguale a $\sigma \in \mathbb{R}$. Allora per utilizzare l'induzione “estriamo” dalla f la funzione f_{k+1} , l'unica che non dipende dalla variabile fissata: precisamente, cominciamo a stimare

$$\|f(\cdot, \sigma)\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} = \left\| \prod_{i=1}^{k+1} f_i(\cdot, \sigma)^i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} \leq \|f_{k+1}(\cdot)\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \left\| \prod_{i=1}^k f_i(\cdot, \sigma) \right\|_{L^{k'}(\mathbb{R}^k)}, \quad (5.2)$$

dove per il momento l'ultimo termine potrebbe anche valere $+\infty$. Per non fare confusione, chiamiamo y la variabile in \mathbb{R}^{k-1} e, per ogni $1 \leq i \leq k$, definiamo $g_{i,\sigma} : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$g_{i,\sigma}(y) = |f_i(y, \sigma)|^{k/k-1} = |f_i(y, \sigma)|^{k'};$$

visto che $f_i \in L^k(\mathbb{R}^k)$, sappiamo che

$$+\infty > \|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)}^k = \int_{\mathbb{R}^k} |f_i(y, \sigma)|^k dy d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} g_{i,\sigma}(y)^{k-1} dy \right) d\sigma;$$

deduciamo che per quasi ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ la funzione $g_{i,\sigma}$ appartiene ad $L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})$ ed inoltre

$$\|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)}^k = \int_{\mathbb{R}} \|g_{i,\sigma}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}^{k-1} d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \|g_{i,\sigma}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}^{k/k'} d\sigma. \quad (5.3)$$

Applichiamo adesso l'ipotesi induttiva: per ogni σ , le funzioni $g_{i,\sigma}$ sono k funzioni in $L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})$, e dunque chiamando

$$g_\sigma := \prod_{i=1}^k g_{i,\sigma}(\cdot^i) = \prod_{i=1}^k |f_i(\cdot^i, \sigma)|^{k'} \quad (5.4)$$

abbiamo che $g_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^k)$ e che

$$\|g_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} \leq \prod_{i=1}^k \|g_{i,\sigma}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}. \quad (5.5)$$

Finalmente, ricordando la (5.2), la (5.4), la (5.5) e la (5.3), si ha

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{k+1})} &= \int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot, \sigma)\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} d\sigma \leq \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \int_{\mathbb{R}} \left\| \prod_{i=1}^k f_i(\cdot^i, \sigma) \right\|_{L^{k'}(\mathbb{R}^k)} d\sigma \\ &= \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \int_{\mathbb{R}} \|g_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^k)}^{1/k'} d\sigma \leq \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^k \|g_{i,\sigma}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}^{1/k'} d\sigma \\ &\leq \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \prod_{i=1}^k \left\| \|g_{i,\cdot}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}^{1/k'} \right\|_{L^k(\mathbb{R}_\sigma)} \\ &= \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \prod_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}} \|g_{i,\sigma}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})}^{k/k'} d\sigma \right)^{1/k} = \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)}; \end{aligned}$$

abbiamo così mostrato la (5.1) nel caso k , e dunque l'induzione mostra la tesi. \square

Utilizzando il Lemma di Gagliardo, siamo subito in grado di ottenere un primo risultato di immersione.

Proposizione 5.2. *Se $1 \leq p < n$, si ha l'immersione continua $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, ed in particolare si ha*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p^*}{1^*} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}, \quad (5.6)$$

indicando con $Du \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ la funzione $x \mapsto (\partial u / \partial x_1(x), \dots, \partial u / \partial x_n(x))$.

Proof. Step I. Il caso $p = 1$ ed $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Prendiamo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e notiamo che per ogni x e per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \right| \leq f_i(x^i),$$

definendo

$$f_i(x^i) := \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \right| dt.$$

Visto che questo vale per ogni i , possiamo moltiplicare tutto ed ottenere

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n f_i(x^i); \quad (5.7)$$

chiaramente si ha che $f_i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, ed inoltre

$$\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)};$$

non possiamo applicare il Lemma di Gagliardo alle f_i , perché dovrebbero essere in $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, mentre sono solo in $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$; passiamo allora a considerare le funzioni $f_i^{1/(n-1)}$, visto che ovviamente stanno in $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ ed in particolare

$$\left\| f_i^{1/(n-1)} \right\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1/(n-1)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/(n-1)};$$

applicando allora il Lemma di Gagliardo 5.1 alle funzioni $f_i^{1/(n-1)}$ otteniamo, ricordando la (5.7), che

$$\begin{aligned} \left\| |u|^{1^*} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\| |u|^{n/(n-1)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \prod_{i=1}^n f_i(x^i)^{1/(n-1)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \left\| f_i^{1/(n-1)} \right\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &= \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/(n-1)} ; \end{aligned}$$

infine,

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} = \left\| |u|^{1^*} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)/n} \leq \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n} \leq \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} ,$$

che è quanto volevamo dimostrare nel caso $p = 1$.

Step II. *Il caso $p < n$ ed $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Cerchiamo di ricondurci dal caso di p generico al caso $p = 1$ che già conosciamo: per fare questo prendiamo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e cerchiamo di applicare il caso già noto alla funzione $|u|^\alpha$, con $\alpha > 1$ da trovare. Si noti che qualunque funzione $|u|^\alpha$ con $1 < \alpha < \infty$ sarà integrabile, essendo u regolare e con supporto compatto. Sappiamo che le derivate di $|u|^\alpha$ sono date da

$$\frac{\partial |u|^\alpha}{\partial x_i} = \alpha |u|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} ;$$

pertanto, per stimare le derivate di $|u|^\alpha$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ è sufficiente applicare Hölder ottenendo

$$\left\| \frac{\partial |u|^\alpha}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left\| |u|^{\alpha-1} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} ;$$

si noti che, mentre non abbiamo ancora deciso quale sia l'esponente α opportuno, abbiamo applicato Hölder senza indugi con esponenti p e p' : infatti, dobbiamo necessariamente arrivare a far comparire nelle stime le norme L^p delle derivate deboli. Applichiamo adesso alla funzione $|u|^\alpha$ il risultato dello Step I: otteniamo

$$\left\| |u|^\alpha \right\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|D(|u|^\alpha)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left\| |u|^{\alpha-1} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} ; \quad (5.8)$$

per poter avere una stima che dica che una qualche norma L^q di u è minore della norma L^p di Du , a questo punto, abbiamo bisogno che, nei due termini in cui compare, la u sia elevata allo stesso esponente (almeno per ora; in realtà nella dimostrazione della Proposizione 5.12 modificheremo la strategia): ci serve quindi che

$$1^* \alpha = (\alpha - 1)p' ,$$

che con un rapido conto ci assicura che

$$\alpha = \frac{n-1}{n-p} p = \frac{p^*}{1^*} ,$$

e quindi che

$$1^* \alpha = (\alpha - 1)p' = p^* .$$

Possiamo allora continuare la (5.8) con

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*/1^*} \leq \frac{p^*}{1^*} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*/p'}$$

che semplificando diventa

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p^*}{1^*} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e dunque la tesi segue anche in questo caso.

Step III. *Il caso $p < n$ ed $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Passare dal caso regolare al caso generale è molto semplice anche in questo caso: infatti, sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e sia $\{u_n\} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una successione che tende ad u fortemente in norma $W^{1,p}$, cosa possibile perché grazie al Lemma 3.28 sappiamo che $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Allora ogni u_n sta anche in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre per la (5.6) otteniamo che la $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy in L^{p^*} . Deduciamo allora che $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ e che anche per u vale la (5.6), dunque completando la tesi. \square

Ovviamente, data una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, non dobbiamo pensare che u stia solo in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ed in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$: è lecito aspettarsi che stia anche in spazi di Lebesgue intermedi! In effetti, ricordiamo un semplicissimo risultato di interpolazione.

Lemma 5.3 (Interpolazione). *Sia (X, μ) uno spazio misurato, e $u \in L^{p_1}(X, \mu) \cap L^{p_2}(X, \mu)$ con $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$; allora per ogni $q \in [p_1, p_2]$ si ha anche $u \in L^q(X, \mu)$, ed in particolare*

$$\|u\|_{L^q(X)} \leq \left(\|u\|_{L^{p_1}(X)}^{p_1} + \|u\|_{L^{p_2}(X)}^{p_2} \right)^{1/q}. \quad (5.9)$$

Proof. E' sufficiente definire $X_1 = \{x : |u(x)| \leq 1\}$ ed $X_2 = \{x : |u(x)| > 1\}$: sono due insiemi definiti μ -quasi ovunque, la cui unione è essenzialmente X , e si ha banalmente

$$\begin{aligned} \int_{X_1} |u|^q d\mu &\leq \int_{X_1} |u|^{p_1} d\mu \leq \int_X |u|^{p_1} d\mu = \|u\|_{L^{p_1}(X)}^{p_1} \\ \int_{X_2} |u|^q d\mu &\leq \int_{X_2} |u|^{p_2} d\mu \leq \int_X |u|^{p_2} d\mu = \|u\|_{L^{p_2}(X)}^{p_2}. \end{aligned}$$

Sommando le due disuguaglianze si ottiene immediatamente la (5.9). \square

Si noti che il senso del lemma è molto semplice: in generale non vale nessuna inclusione tra $L^p(\Omega)$ ed $L^q(\Omega)$, a meno che Ω non sia di misura finita; infatti, se $p < q$ allora una funzione molto alta su insiemi molto piccoli può stare in $L^p(\Omega)$ ma non in $L^q(\Omega)$, mentre una funzione molto piccola ma su insiemi enormi può stare in $L^q(\Omega)$ senza stare in $L^p(\Omega)$ –e questo non è possibile se $|\Omega| < \infty$ perché “non c'è spazio”. Tuttavia, se una funzione sta in $L^{p_1}(\Omega)$ ed in $L^{p_2}(\Omega)$, è obbligata a stare anche in $L^q(\Omega)$ con $p_1 \leq q \leq p_2$: in parole povere, in effetti, se stesse in $L^{p_2}(\Omega)$ ma non in $L^q(\Omega)$, a maggior ragione non potrebbe stare in $L^{p_1}(\Omega)$ e viceversa.

Osservazione 5.4. Una dimostrazione altrettanto immediata del Lemma di interpolazione si può dare usando solo la disuguaglianza di Hölder; infatti, se $p_1 \leq q \leq p_2$, esiste un $0 \leq t \leq 1$ tale che $t/p_1 + (1-t)/p_2 = 1/q$. Allora

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(X)} &= \| |u|^t |u|^{1-t} \|_{L^q(X)} \leq \| |u|^t \|_{L^{p_1/t}(X)} \| |u|^{1-t} \|_{L^{p_2/(1-t)}(X)} \\ &= \|u\|_{L^{p_1}(X)}^t \|u\|_{L^{p_2}(X)}^{1-t}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

che dimostra nuovamente la (5.9), oltretutto in una forma particolarmente espressiva e con una formula più forte della (5.9).

Il Lemma di interpolazione ci permette subito di estendere il risultato della Proposizione 5.2.

Corollario 5.5. Se $1 \leq p < n$, si ha l'immersione continua $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \leq q \leq p^*$.

Proof. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, sappiamo già che $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ed $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, ed entrambe le inclusioni sono continue. Grazie al Lemma di Interpolazione 5.3 otteniamo subito che $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, ed in particolare per la (5.9) abbiamo anche la continuità dell'inclusione. \square

Possiamo anche immediatamente passare dal caso di \mathbb{R}^n al caso di un generico aperto Ω .

Corollario 5.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto; si hanno allora le immersioni continue $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ per ogni $p \leq q \leq p^*$. Se poi esiste un operatore di estensione da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, allora valgono anche le immersioni continue $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ con gli stessi q . Infine, se Ω ha misura finita, le stesse immersioni valgono anche per tutti gli $1 \leq q \leq p$.

Proof. Se esiste un operatore di estensione da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, allora si prenda $u \in W^{1,p}(\Omega)$: sappiamo che $E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e che $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; per la Proposizione 5.2 sappiamo che $E(u) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, ed infine passando alla restrizione otteniamo che $u \in L^q(\Omega)$.

Il caso di $W_0^{1,p}(\Omega)$ è altrettanto facile: se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, grazie al Lemma 4.26 sappiamo che la sua estensione a zero fuori da Ω sta in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e quindi l'operatore $E : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ che manda u nella sua estensione a 0 fuori da Ω è un operatore di estensione (questo fatto, che si hanno operatori di estensione per qualsiasi Ω purché si lavori in $W_0^{1,p}(\Omega)$ invece che in $W^{1,p}(\Omega)$, è interessante di per sé). Avendo l'estensione, la dimostrazione è identica al caso già fatto.

Infine, sappiamo bene che se Ω ha misura finita si hanno inclusioni continue di $L^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ per qualunque $p > q$, e quindi si conclude immediatamente la tesi. \square

Da questi risultati potrebbero restare due dubbi: primo, nel caso di Ω di misura infinita, ci si potrebbe chiedere se non è comunque vero che valgono le immersioni continue di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ anche per $1 \leq q < p$. Secondo, ci si può chiedere se l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ con gli opportuni q non valga anche senza bisogno di chiedere che esista un operatore di estensione. Il secondo dubbio è particolarmente plausibile, perché stiamo parlando dell'appartenenza di funzioni ad $L^q(\Omega)$, e sappiamo benissimo che i problemi di supporto ben contenuto o meno in Ω non hanno alcuna importanza per le funzioni di $L^q(\Omega)$, ed infatti ad esempio le funzioni $C_0^\infty(\Omega)$

sono sempre dense in $L^q(\Omega)$. Vediamo però che ad entrambi questi dubbi si può rispondere in maniera negativa.

Esempio 5.7. L'inclusione di $W^{1,p}(\Omega)$ in L^q con $1 \leq q < p$ non vale se Ω non è limitato. Come controesempio basta prendere $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B(1)$, e come funzione $u(x) = (1/|x|)^{n(1+\varepsilon)/p}$; è chiaro che u appartenga a $W^{1,p}(\Omega)$ e che stia in $L^q(\Omega)$ solo per $q > p/(1+\varepsilon)$. Dunque per ogni $q < p$ si può scegliere un $\varepsilon \ll 1$ in modo che la u non stia in L^q , ed in particolare l'inclusione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ è falsa. Si noti come incollando varie funzioni di questo tipo con opportune cut-off è possibile esibire una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ che non sta in *nessun* $L^q(\Omega)$ con $q < p$. Si noti anche che il fatto di aver tolto la palla unitaria è stato fatto unicamente per comodità nello scrivere la u , ma ovviamente riaccolando in modo regolare lo stesso esempio può essere esteso su tutto \mathbb{R}^n .

Esempio 5.8. Sia $\Omega = \cup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$, dove gli Ω_i sono aperti regolari, disgiunti, di misure a_i finite. Siano poi fissati $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, e consideriamo la funzione $u = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}$. E' chiaro che $u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$ per qualunque k , visto che tutte le derivate deboli della u sono nulle. E' allora possibile scegliere le costanti in modo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ma non stia in $L^q(\Omega)$ se $q > p$; se ad esempio $a_i = 1/2^i$ e $\lambda_i = 2^{n(1-\varepsilon)/p}$, si vede subito che $u \in L^q(\Omega)$ se e solo se $q < p/(1-\varepsilon)$, quindi per qualsiasi $q > p$ esiste un ε per cui $u \in L^p(\Omega) \setminus L^q(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \setminus L^q(\Omega)$; come al solito, combinando in modo più fine le costanti, è possibile prendere una funzione u che appartenga a $W^{1,p}(\Omega)$ ma non appartenga a *nessun* $L^q(\Omega)$ con $q \neq p$ (ovviamente, per fare questo Ω deve avere misura infinita!). Si osservi anche come questo ragionamento, unito al Corollario 5.6, assicuri che un Ω di questo tipo, pur essendo regolare quanto si voglia, non ammette estensioni: si capisce dunque che nella Proposizione 4.13 la richiesta di compattezza del bordo di Ω sia necessaria.

Infine, osserviamo come sia falsa l'inclusione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ con $q > p^*$.

Esempio 5.9. Stavolta sarà utile prendere $\Omega = B(1)$ e scegliere $u(x) = (1/|x|)^{(n-p)(1-\varepsilon)/p}$: un semplice conto mostra che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per qualsiasi $\varepsilon > 0$, e d'altra parte $u \in L^q(\Omega)$ se e solo se $q < p^*/(1-\varepsilon)$: come al solito, dunque, per ogni $q > p^*$ troviamo un ε la cui funzione u associata sta in $W^{1,p}(\Omega) \setminus L^q(\Omega)$, dunque le immersioni di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ sono false per $q > p^*$; sempre come al solito, si può costruire a pezzi una funzione che sta in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non sta in nessun $L^q(\Omega)$ per $q > p^* \dots$

5.2 Immersioni continue: il caso $p \geq n$

Il risultato della sezione precedente riguardava solo il caso di $p < n$: in effetti, visto che se $p \rightarrow n$ si ha $p^* \rightarrow \infty$, è immediato sospettare che lo spazio $W^{1,n}(\Omega)$ si immerga in tutti gli spazi $L^q(\Omega)$ con $n \leq q < \infty$, ed è sensata la domanda se l'immersione in $L^\infty(\Omega)$ valga o no. In effetti questo non vale, grazie al seguente esempio.

Esempio 5.10. In questo caso non si può ragionare come nell'Esempio 5.9; prendiamo tuttavia $\Omega = B(1/2) \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo $u(x) = \log(\log(1/|x|))$: è immediato osservare che la u diverge per $|x| \rightarrow 0$ ma in modo estremamente lento, e si vede quindi facilmente che $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$ ma $u \notin L^\infty(\Omega)$. Per quanto riguarda le derivate deboli, è semplice mostrare (esercizio!) che le derivate distribuzionali della u coincidono con le derivate puntuali, che sono ovviamente definite su $\Omega \setminus \{0\}$. Si ha quindi che $|Du(x)| = 1/(|x| \log(1/|x|))$; si ha allora che $u \in W^{1,2}(\Omega)$, visto che questo equivale a mostrare che sia finito l'integrale da 0 a 1/2 della funzione $1/(\rho \log(1/\rho)^2)$, e che questo è un semplice e classico esercizio.

Osservazione 5.11. *E' opportuno notare come l'esempio appena visto si possa fare per ogni $n \geq 2$: infatti, facendo n logaritmi uno dentro l'altro invece che due, e portando avanti gli stessi conti, si osserva che comunque $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $q < \infty$ ma $u \notin L^\infty(\Omega)$; e l'appartenenza di u a $W^{1,n}(\Omega)$ si riduce essenzialmente all'integrabilità tra 0 e 1/2 della funzione $1/(\rho \log(1/\rho)^n)$, che analogamente a prima è vera per ogni $n \geq 2$. Si osservi bene, invece, che per $n = 1$ questo esempio non si può fare, perché la funzione $1/(\rho \log(1/\rho))$ non ha integrale finito tra 0 e 1/2! Ed in effetti abbiamo già osservato che per ogni intervallo I lo spazio $W^{1,1}(I)$ si immerge in $L^\infty(I)$, anzi addirittura si immerge nello spazio delle funzioni continue! Per il caso 1-dimensionale, quindi, sono veri risultati leggermente migliori di quelli con n generico.*

Il caso $p = n$ si potrà ottenere facilmente con una modifica del caso $p < n$.

Proposizione 5.12. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto; si hanno allora le immersioni continue $W_0^{1,n}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ per ogni $n \leq q < \infty$. Se poi esiste un operatore di estensione da $W^{1,n}(\Omega)$ a $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, allora valgono anche le immersioni continue $W^{1,n}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ con gli stessi q . Infine, se Ω ha misura finita, le stesse immersioni valgono anche per tutti gli $1 \leq q \leq n$.*

Proof. Grazie al ragionamento già fatto nella dimostrazione del Corollario 5.6, possiamo limitarci a considerare il caso di $\Omega = \mathbb{R}^n$ e di $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Partiamo allora dalla stima (5.8) che avevamo trovato nella Proposizione 5.2, che con $p = n$ ci dice

$$\| |u|^\alpha \|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \| |u|^{\alpha-1} \|_{L^{n'}(\mathbb{R}^n)} ; \quad (5.11)$$

in quel caso, per ottenere qualcosa di interessante avevamo trovato α in modo che gli esponenti della u a sinistra e a destra coincidessero, cioè ponendo $p'(\alpha - 1) = 1^*\alpha$, che però per $p = n$ non ha soluzione; adesso, invece, notiamo che si ha

$$\begin{aligned} \alpha \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \| |u|^{\alpha-1} \|_{L^{n'}(\mathbb{R}^n)} &= \alpha \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^{n'(\alpha-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\alpha-1} \\ &\leq \left(\|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{n'(\alpha-1)}(\mathbb{R}^n)} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

e visto che $\| |u|^\alpha \|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^{1^*\alpha}(\mathbb{R}^n)}^\alpha$ possiamo dedurre dalla (5.11) la

$$\|u\|_{L^{1^*\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{n'(\alpha-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{1^*(\alpha-1)}(\mathbb{R}^n)} .$$

Ma allora, visto che per $\alpha = n$ si ha $1^*(\alpha - 1) = n$ e che ovviamente $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ si immerge con continuità con costante 1 in $L^n(\mathbb{R}^n)$, con una banale induzione si trova che per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$\|u\|_{L^{1^*(n+h)}(\mathbb{R}^n)} \leq (h + 2) \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} .$$

Questo, unito al Lemma di Interpolazione, ci permette di concludere la tesi. \square

Passiamo adesso al caso di $p > n$, che chiaramente ci darà risultati ancora più forti: con p che si avvicinava ad n abbiamo trovato estensioni in L^{p^*} con p^* che tendeva all'infinito, e con $p = n$ abbiamo trovato tutte le estensioni in L^q con qualsiasi $q < \infty$. E' quindi adesso auspicabile con $p > n$ riuscire ad ottenere anche l'immersione in L^∞ ; in realtà vedremo che si ha anche di più, e cioè l'immersione nello spazio delle funzioni continue.

Teorema 5.13 (Morrey). *Sia $\infty \geq p > n$: allora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si immerge in modo continuo in tutti gli spazi $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p \leq q \leq \infty$, ed anche in $C^{0,\alpha}$ con tutti gli $\alpha \leq 1 - n/p$. In particolare, gli elementi di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ sono funzioni continue e limitate che, se $p < \infty$, tendono a 0 all'infinito.*

Ricordiamo che lo spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ è dato dalle funzioni α -Hölderiane, che è uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = |u(0)| + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha}, \quad (5.12)$$

essendo $0 \in \Omega$ un punto scelto arbitrariamente; in particolare, lo spazio $C^{0,0}(\Omega)$ coincide con lo spazio delle funzioni continue e limitate. Si noti bene che, mentre ovviamente le funzioni α -Hölderiane sono definite ovunque allo stesso modo, si può trovare la definizione dello spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ data in vari modi diversi: si può trovare come norma la sola

$$\sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha},$$

che identifica esattamente la costante di α -Hölderianità, ma che ovviamente è una seminorma, non una norma, e quindi non permette di identificare le funzioni α -Hölderiane come uno spazio di Banach; o altrimenti, si può trovare la definizione di norma come

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{z \in \Omega} |u(z)| + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha};$$

questa norma, rispetto a quella che abbiamo definito noi, ha di positivo che non dipende dalla scelta arbitraria di un punto in Ω ; tuttavia, usandola come norma, lo spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ diventa non lo spazio di tutte le funzioni α -Hölderiane, ma il suo sottospazio dato dalle funzioni che sono anche limitate. Per fortuna questo non cambia niente di sostanziale nei risultati che presentiamo, visto che come ci assicura l'enunciato del Teorema di Morrey le funzioni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $p > n$ sono anche in L^∞ , e quindi la limitatezza è comunque assicurata.

Proof. (del Teorema 5.13):

Step I. *Il caso $n < p < \infty$, $\alpha = 1 - n/p$.*

Partiamo supponendo $n < p < \infty$ e prendiamo una $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un cubo di lato r con lati paralleli agli assi coordinati: per ogni $x, y \in Q$ si ha

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_{t=0}^1 \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt \right| \leq r \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t(y-x)) \right| dt;$$

chiamando allora u_Q la media di u in Q , ossia $u_Q = \int_Q u(y) dy$, abbiamo che per ogni $x \in Q$ si può stimare

$$\begin{aligned}
|u_Q - u(x)| &\leq \int_{y \in Q} |u(y) - u(x)| dy = \frac{1}{r^n} \int_Q |u(y) - u(x)| dy \\
&\leq \frac{1}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_Q \int_{t=0}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t(y-x)) \right| dt dy \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t(y-x)) \right| dy dt \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 \int_{(1-t)x+tQ} \frac{1}{t^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right| dz dt \\
&= \frac{1}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)} (t^n r^n)^{1/p'} = \frac{r^{1-n/p}}{1-n/p} \|Du\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza deduciamo che per ogni $x, y \in Q$ si ha

$$|u(y) - u(x)| \leq 2 \frac{r^{1-n/p}}{1-n/p} \|Du\|_{L^p(Q)} \leq 2 \frac{r^{1-n/p}}{1-n/p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)};$$

ora, visto che presi due punti qualsiasi in \mathbb{R}^n si può trovare un cubo che li contiene di lato al più $|y-x|$, si trova in effetti che

$$|u(y) - u(x)| \leq 2 \frac{\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}{1-n/p} |y-x|^{1-n/p}; \quad (5.13)$$

la Hölderianità con esponente $\alpha = 1 - n/p$ è dunque provata; per quanto riguarda la continuità dell'immersione basta osservare che anche $|u(0)|$ si possa stimare con $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$: ma in effetti in una palla di raggio 1 centrata nell'origine abbiamo che

$$|u(x)| \geq |u(0)| - 2 \frac{\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}{1-n/p},$$

e quindi chiamando $\omega_n = |B(1)|$ si ha

$$\begin{aligned}
|u(0)| &\leq 2 \frac{\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}{1-n/p} + \int_{B(1)} |u(x)| dx \leq 2 \frac{\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}{1-n/p} + \frac{1}{\omega_n} \|u\|_{L^p(B(1))} \omega_n^{1/p'} \\
&\leq \left(\frac{2}{1-n/p} + \omega_n^{1/p'} \right) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \quad (5.14)$$

dunque abbiamo ottenuto la stima che ci serviva e la continuità dell'immersione in $C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ è provata.

Per quanto riguarda l'immersione continua in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, è sufficiente osservare che la (5.14) vale per un qualsiasi punto $z \in \mathbb{R}^n$ al posto di 0, visto che non abbiamo usato nessuna caratteristica particolare del punto 0. Dunque in effetti abbiamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{2}{1-n/p} + \omega_n^{1/p'} \right) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

e dunque anche la continuità dell'immersione in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è provata, e per interpolazione abbiamo anche tutte le immersioni continue in $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p \leq n \leq \infty$.

Per densità, come al solito, passiamo dal caso di $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a tutto lo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Step II. *L'interpolazione per $0 \leq \alpha \leq 1 - n/p$.*

Prendiamo ora una $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$: per l'immersione continua in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che u è limitata, e per immersione continua in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che u è anche continua (la α -Hölderianità è più forte della continuità!). Dunque u appartiene allo spazio $C^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue e limitate, e vi si immerge in modo continuo visto che è continua l'immersione in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per avere dunque le immersioni continue in tutti gli spazi $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq \alpha \leq 1 - n/p$ è sufficiente mostrare un analogo del Lemma di Interpolazione 5.3 che valga per gli spazi $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo dunque in generale che se $u \in C^{0,\alpha_1}(\Omega) \cap C^{0,\alpha_2}(\Omega)$, allora $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$ per ogni $\alpha_1 \leq \beta \leq \alpha_2$, e che la norma in $C^{0,\beta}(\Omega)$ si stima con le due norme relative ad α_1 e α_2 .

In effetti, prendiamo $x, y \in \Omega$ tali che $|y - x| \leq 1$: allora $|y - x|^\beta \geq |y - x|^{\alpha_2}$, per cui

$$\frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\beta} \leq \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^{\alpha_2}};$$

se invece $|y - x| > 1$, si ha analogamente

$$\frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\beta} \leq \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^{\alpha_1}};$$

ricordando la definizione di norma (5.12), passando al sup e sommando $|u(0)|$, si ottiene l'interpolazione voluta, con la stima

$$\|\cdot\|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{C^{0,\alpha_1}(\Omega)} + \|\cdot\|_{C^{0,\alpha_2}(\Omega)}, \quad (5.15)$$

e dunque come già osservato abbiamo tutte le immersioni continue negli spazi $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ enunciate.

Step III. *Il caso $p = \infty$.*

Concludiamo con il caso $p = \infty$; fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo un raggio $R \in \mathbb{R}$; sia allora $R' \gg R$ in modo che esista una funzione cut-off regolare $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tale che $\eta \equiv 1$ su $B(R)$, $\eta \equiv 0$ su ${}^c B(R')$, e $|\partial\eta/\partial x_i| \leq \varepsilon/\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ su tutto \mathbb{R}^n e per ogni $1 \leq i \leq n$. Allora la funzione ηu appartiene a $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, è supportata in $B(R')$, e si ha

$$\|\eta u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon.$$

Per ogni $1 \ll \tilde{p} < \infty$, allora, sappiamo che $\eta u \in W^{1,\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$, e dunque $\eta u \in C^{0,1-n/\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ per ogni \tilde{p} ed in particolare, per qualsiasi $x, y \in B(R)$, si ha dalla (5.13) che

$$|u(y) - u(x)| = |u(y)\eta(y) - u(x)\eta(x)| \leq 2 \frac{\|\eta u\|_{W^{1,\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)}}{1 - n/\tilde{p}} |y - x|^{1-n/\tilde{p}};$$

fissiamo dunque $x, y \in B(R)$ e, visto che la stima appena fatta vale per ogni \tilde{p} sufficientemente grande, possiamo passare al limite per $\tilde{p} \rightarrow \infty$ ed ottenere

$$|u(y) - u(x)| \leq 2 \|\eta u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} |y - x| \leq 2(\|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon) |y - x|;$$

nel fare questo abbiamo usato il fatto generale che per $q \rightarrow \bar{q}$ e per ogni funzione misurabile φ si ha $\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow \|\varphi\|_{L^{\bar{q}}(\Omega)}$: questo vale per qualunque $\bar{q} < \infty$ in generale, ed anche per $\bar{q} = \infty$ purché il supporto di φ abbia misura finita (altrimenti vale solo una disuguaglianza). Visto che ε era arbitrario, deduciamo

$$|u(y) - u(x)| \leq 2 \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} |y - x|$$

per ogni $x, y \in B(R)$; essendo però anche R arbitrario, deduciamo la stessa disuguaglianza su tutto \mathbb{R}^n , e dunque abbiamo l'immersione continua di $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ in $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$; visto che l'immersione continua in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è ovvia per definizione, ragionando come al solito per interpolazione sugli spazi di Lebesgue e sugli spazi delle funzioni α -Hölderiane otteniamo la tesi anche per $p = \infty$. \square

Vale la pena di osservare che con $p \leq n$ non si riusciva ad avere l'immersione in L^∞ , mentre non appena diventa $p > n$ si ha addirittura l'immersione nelle funzioni continue: questo ci insegna che in un certo senso, a livello di regolarità, le funzioni L^∞ hanno pochissimo meno delle funzioni continue, cioè non appena raggiungiamo la regolarità nelle derivate che serve ad essere in L^∞ si è anche continui. Pur essendo un discorso che, formalmente, non vuol dire nulla, è utile avere in mente questa idea, cioè che aumentando la regolarità debole aumenta la sommabilità delle funzioni, e la continuità si raggiunge "immediatamente dopo" l'appartenenza ad L^∞ .

Possiamo adesso dedurre il risultato sugli aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: non diamo la dimostrazione visto che è identica al caso analogo già fatto con $p \leq n$.

Corollario 5.14. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $\infty \geq p > n$. Se esiste un'estensione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si hanno inclusioni continue di $W^{1,p}(\Omega)$ in tutti gli spazi $L^q(\Omega)$ con $p \leq q \leq +\infty$, nonché le inclusioni continue di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ per tutti gli $0 \leq \alpha \leq 1 - n/p$. In generale, le stesse inclusioni valgono per qualunque Ω partendo da $W_0^{1,p}(\Omega)$, ovviamente in questo caso solo per $p < \infty$ (altrimenti, $W_0^{1,p}(\Omega)$ non è definito!). Se poi Ω ha misura finita, nelle stesse ipotesi le inclusioni in $L^q(\Omega)$ valgono anche per $1 \leq q < p$.*

Osservazione 5.15. *Si noti che in particolare, nel caso $p = \infty$, se c'è un'estensione allora deduciamo che le funzioni di $W^{1,\infty}(\Omega)$ sono tutte e sole le funzioni Lipschitziane: abbiamo quindi l'altra implicazione nella Proposizione 4.15.*

5.3 Le immersioni per $k > 1$

Nelle due ultime sezioni abbiamo visto tutte le immersioni di Sobolev che valgono per spazi $W^{1,p}$; ovviamente, però, per quanto il caso $k = 1$ sia particolarmente importante, ci interessano anche le immersioni di Sobolev valide nei generici spazi $W^{k,p}$; il caso di k generico, tuttavia, si riesce a fare molto facilmente. Infatti, per definizione $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se e solo se tutte le derivate

prime distribuzionali di u stanno in $W^{k-1,p}(\Omega)$; quindi, ad esempio, sia $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e $p < n$. Allora per ogni i si ha $\partial u / \partial x_i \in W^{1,p}(\Omega)$; ma allora tutte le derivate prime di u stanno in effetti in $L^{p^*}(\Omega)$, e nello stesso spazio sta anche u visto che $W^{2,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$; quindi $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$. Se allora $p^* < n$, ossia $p < n/2$, deduciamo che $u \in (p^*)^*$, e in effetti

$$(p^*)^* = \frac{np}{n-2p},$$

dunque abbiamo le uguaglianze

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{(p^*)^*} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}, \quad -\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p}, \quad -\frac{n}{(p^*)^*} = 2 - \frac{n}{p}.$$

Se invece $p > n/2$, dal fatto che $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$ deduciamo che u è continua, ed è α -Hölderiana con ogni

$$0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{n}{p^*} = 2 - \frac{n}{p}.$$

Continuando questo ragionamento, con una semplice induzione, si trova quanto segue.

Teorema 5.16. *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto per il quale esiste un'estensione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Allora se $\tilde{k} \leq k$ e $p \leq \tilde{p} \leq \infty$, si ha l'immersione continua di $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{\tilde{k},\tilde{p}}(\Omega)$ se e solo se*

$$k - \frac{n}{p} \geq \tilde{k} - \frac{n}{\tilde{p}},$$

con il maggiore stretto se $\tilde{p} = \infty$. In particolare, $W^{k,p}(\Omega)$ si immerge in $L^{\tilde{p}}(\Omega)$ se

$$k - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{\tilde{p}},$$

con il maggiore stretto se $\tilde{p} = \infty$, e dunque $W^{k,p}(\Omega)$ si immerge in ogni $L^{\tilde{p}}(\Omega)$ se $k > n/p$. Se poi $k > n/p$, allora $W^{k,p}(\Omega)$ è fatto di funzioni continue di classe $C^{[k-n/p]}$, ed in particolare si immerge in modo continuo in $C^{[k-n/p],k-n/p-[k-n/p]}(\Omega)$. Le stesse immersioni valgono senza l'ipotesi che esista un'estensione se $p < \infty$ e si consideri $W_0^{k,p}(\Omega)$ al posto di $W^{k,p}(\Omega)$. Infine, valgono anche tutte le immersioni con $\tilde{p} < p$ se Ω ha misura finita.

Concludiamo la sezione con un'osservazione.

Lemma 5.17. *Se $p > n$, il prodotto di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$ è ancora in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Proof. E' molto semplice, in effetti: se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in $L^\infty(\Omega)$. Ma allora se $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, si ha per ogni $1 \leq i \leq n$ che

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

Quindi $uv \in W^{1,p}(\Omega)$. □

Si noti che in generale il prodotto di funzioni L^p non rimane in L^p , a meno che non sia $p = \infty$; e anche per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$, non è sempre vero che il prodotto rimanga dentro a $W^{1,p}(\Omega)$; tuttavia, se $p > n$ è utile avere questa informazione.

5.4 Immersioni compatte

Cerchiamo ora di discutere quali delle immersioni di Sobolev che abbiamo visto siano compatte: prima di tutto notiamo che nessuna immersione può essere compatta su tutto \mathbb{R}^n . Prendiamo infatti a caso una funzione $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, e definiamo $u_h(x) = u(x - he_1)$ la traslazione di lunghezza h in direzione e_1 . La successione $\{u_h\}$, con $h \in \mathbb{N}$, è ovviamente una successione limitata in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, visto che tutte le funzioni hanno la stessa norma essendo uguali a meno di una traslazione. D'altra parte, la successione $\{u_h\}$ non può convergere forte a niente in nessuno spazio $L^q(\mathbb{R}^n)$: infatti, chiaramente $u_h \rightarrow 0$ in qualunque spazio $L^q(\mathbb{R}^n)$, quindi se tendesse forte (lei o una sua sottosuccessione) dovrebbe tendere a 0. Ma ogni funzione u_h ha la stessa norma L^q , quindi non potrà esserci convergenza forte a 0. Lo stesso discorso, oltre che per $\Omega = \mathbb{R}^n$, funziona ovviamente per tutti gli aperti Ω illimitati per i quali esista un $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo ed infinite palle di raggio ε e centri sempre più lontani dall'origine contenute in Ω .

Per questo motivo, studiamo quali immersioni siano compatte solo nel caso in cui Ω sia un aperto limitato: in questo modo lasciamo aperta la questione di cosa accada per gli Ω illimitati ma che si vanno "stringendo" all'infinito; si può investigare anche questo caso ma eviteremo per non perdere troppo tempo.

Per poter discutere quali immersioni siano compatte, ci farà comodo un criterio di compattezza negli spazi $L^p(\Omega)$; per poterlo dare, introduciamo prima una notazione.

Definizione 5.18. Sia $\delta > 0$: definiamo $\{Q_i, i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei cubi di lato δ e lati paralleli agli assi coordinati aventi centri con tutte le coordinate multiple intere di δ , ossia i centri sono tutti e soli i punti $x = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_i/\delta \in \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Sia poi $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$; definiamo $u_\delta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ nel seguente modo:

$$u_\delta(x) = \int_{Q_i} u(y) dy \quad \forall x \in Q_i.$$

In pratica, la funzione u_δ è una funzione costante su ogni cubetto di lato δ che "approssima" u . Possiamo notare subito una proprietà immediata.

Lemma 5.19. Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$: allora per ogni $\delta > 0$ si ha che $u_\delta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Inoltre, $u_\delta \rightarrow u$ fortemente in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $\delta \rightarrow 0$.

Proof. Per quanto riguarda la prima osservazione, basta notare la proprietà su un cubo Q_i ; ed in effetti, essendo u_δ costante su Q_i , ed essendo la disuguaglianza di Hölder un'uguaglianza quando le due funzioni cui si applica hanno rapporto costante, si ha

$$\|u_\delta\|_{L^p(Q_i)} \|1\|_{L^{p'}(Q_i)} = \|u_\delta\|_{L^1(Q_i)} = \|u\|_{L^1(Q_i)} \leq \|u\|_{L^p(Q_i)} \|1\|_{L^{p'}(Q_i)},$$

da cui $\|u_\delta\|_{L^p(Q_i)} \leq \|u\|_{L^p(Q_i)}$.

Per quanto riguarda la convergenza di u_δ ad u , basta notare che per ogni u, v e δ si ha $(u - v)_\delta = u_\delta - v_\delta$. Sia allora $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|u - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$: allora ricordando anche

la prima parte si ha

$$\|u - u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_\delta - u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon + \|v - v_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} ;$$

visto che per una funzione v di classe C^1 e a supporto compatto è chiaro che v_δ tenda a v anche in norma L^∞ , quindi in particolare in norma L^p (si ricordi che il supporto è compatto!), si ha che per δ sufficientemente piccolo $\|u - u_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 3\varepsilon$, ed essendo ε arbitrario si ha la tesi. \square

Vediamo ora il risultato tecnico che ci servirà per mostrare la compattezza di alcune inclusioni di Sobolev.

Lemma 5.20 (Criterio di Compattezza). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto di misura finita, sia $1 \leq p < \infty$, e sia $\mathfrak{F} \subseteq L^p(\Omega)$ un sottoinsieme limitato. Allora \mathfrak{F} è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{\delta} > 0$ tale che per ogni $u \in \mathfrak{F}$ e per ogni $\delta \leq \bar{\delta}$ si ha $\|u - u_\delta\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.*

Proof. Sia \mathfrak{F} relativamente compatto, e supponiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{u_h\} \subseteq \mathfrak{F}$ tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $\|u_h - (u_h)_{1/h}\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. Per la relativa compattezza, a meno di una sottosuccessione, si ha $u_h \xrightarrow{L^p(\Omega)} \bar{u}$, e quindi se $h \geq \bar{h}$ si ha $\|\bar{u} - u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon/3$. Ma per il Lemma 5.19 sappiamo che, a meno di aumentare \bar{h} , se $h \geq \bar{h}$ si ha $\|\bar{u} - \bar{u}_{1/h}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$. Si trova allora un assurdo visto che

$$\|u_h - (u_h)_{1/h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_h - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar{u} - \bar{u}_{1/h}\|_{L^p(\Omega)} + \|\bar{u}_{1/h} - (u_h)_{1/h}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon,$$

e dunque l'implicazione facile è dimostrata.

Sia invece ora \mathfrak{F} un insieme limitato per cui valga la proprietà dell'enunciato: visto che $L^p(\Omega)$ è uno spazio metrico completo, la relativa compattezza è equivalente alla totale limitatezza; fissato dunque $\varepsilon > 0$, cerchiamo un sottoinsieme finito di \mathfrak{F} le cui palle di raggio ε in $L^p(\Omega)$ ricoprono tutto \mathfrak{F} . Prima di tutto scegliamo il $\bar{\delta}$ relativo ad $\varepsilon/3$, e ricopriamo dunque Ω con un numero N finito di cubi di lato $\bar{\delta}$ secondo la Definizione 5.18. Visto che \mathfrak{F} è limitato, per ogni cubo Q_i i valori di $u_{\bar{\delta}}$ su Q_i con $u \in \mathfrak{F}$ possono variare tra $-K$ e K , con un $K \in \mathbb{R}$ opportuno. Ad ogni $u \in \mathfrak{F}$, allora, possiamo associare la successione finita $\{u_i, 1 \leq i \leq N\}$, dove

$$u_i = \left[\frac{u_{\bar{\delta}|Q_i}}{\varepsilon/3|\Omega|^{1/p}} \right] \varepsilon/3|\Omega|^{1/p};$$

in pratica, u_i è il valore di $u_{\bar{\delta}}$ sul cubo Q_i approssimato in modo da essere un multiplo di $\varepsilon/3|\Omega|^{1/p}$. Visto che le possibili successioni $\{u_i\}$ con $u \in \mathfrak{F}$ sono in numero finito, possiamo selezionare un sottoinsieme finito di \mathfrak{F} in modo che vi sia un rappresentante per ogni possibile successione. Se poi u e v sono due elementi di \mathfrak{F} tali che $\{u_i\} = \{v_i\}$, per costruzione si ha $\|u_{\bar{\delta}} - v_{\bar{\delta}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon/3|\Omega|^{1/p}$, e dunque

$$\|u_{\bar{\delta}} - v_{\bar{\delta}}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_{\bar{\delta}} - v_{\bar{\delta}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|1\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ma allora

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u - u_{\bar{\delta}}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{\bar{\delta}} - v_{\bar{\delta}}\|_{L^p(\Omega)} + \|v_{\bar{\delta}} - v\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

e dunque la palla di raggio ε intorno all'insieme finito preso in \mathfrak{F} ricopre tutto \mathfrak{F} , e si ha quindi la totale limitatezza e dunque la relativa compattezza cercata. \square

Grazie a questo risultato, possiamo ora mostrare il risultato di compattezza che volevamo.

Teorema 5.21 (Teorema delle immersioni compatte di Rellich-Kondrasov). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato tale che esista un'estensione continua per $W^{1,p}(\Omega)$. Allora se $p \leq n$ sono compatte le immersioni di $W^{1,p}(\Omega)$ negli spazi $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$ (chiamando $n^* = \infty$); se invece $p > n$ sono compatte le immersioni di $W^{1,p}(\Omega)$ in tutti gli spazi $L^q(\Omega)$, e le immersioni in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ per tutti gli $\alpha < 1 - n/p$. Gli stessi risultati valgono per un qualsiasi Ω limitato con lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ al posto di $W^{1,p}(\Omega)$, se $p < \infty$.*

Proof. Step I. Una stima in L^1 .

In questo primo step osserveremo che per ogni $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|u - u_\delta\|_{L^1(\Omega)} \leq 2^n \delta \sqrt{n} \|Du\|_{L^1(\Omega)}, \quad (5.16)$$

Si fissi infatti un cubo Q di lato δ contenuto dentro Ω , e si prenda una $u \in W^{1,p}(Q)$ regolare. Si ha allora

$$\begin{aligned} \|u - u_\delta\|_{L^1(Q)} &= \int_Q |u(x) - u_\delta| dx = \int_Q \left| u(x) - \int_Q u(y) dy \right| dx \leq \int_Q \left(\int_Q |u(x) - u(y)| dy \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\delta^n} \int_Q \int_Q \int_{t=0}^1 |Du(x + t(y-x))| |y-x| dt dy dx \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{n-1}} \int_Q \int_Q \int_{t=0}^1 |Du(x + t(y-x))| dt dy dx \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\delta^{n-1}} \int_{t=0}^1 \int_Q \int_{(1-t)x+tQ} \frac{1}{t^n} |Du(z)| dz dx dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\delta^{n-1}} \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^n} \int_Q |Du(z)| \left| \left\{ x \in Q : z \in (1-t)x + tQ \right\} \right| dz dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\delta^{n-1}} \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^n} \int_Q |Du(z)| \left| \left(\frac{z}{1-t} + \frac{t}{1-t} Q \right) \cap Q \right| dz dt \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\delta^{n-1}} \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^n} \int_Q |Du(z)| |2tQ| dz dt = 2^n \delta \sqrt{n} \int_{t=0}^1 \int_Q |Du(z)| dz dt \\ &= 2^n \delta \sqrt{n} \|Du\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Ragionando come già fatto varie volte, prendiamo Ω' limitato tale che $B(\Omega, 1) \subset\subset \Omega'$: sappiamo che, agendo con un'opportuna funzione cut-off, esiste un'estensione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega')$ se $W^{1,p}(\Omega)$ ammette un'estensione, e senza ipotesi di regolarità di Ω vi è comunque un'estensione continua di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega')$. Per densità delle funzioni regolari, allora, purché $\delta < 1$ possiamo sommare la stima precedente su tutti i cubi ottenendo direttamente la (5.16).

Step II. *Le immersioni negli spazi $L^q(\Omega)$ con $q < \infty$.*

Sia $q < \infty$ con $q < p^*$ se $p \leq n$. Per mostrare la compattezza dell'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ utilizzeremo il Criterio di Compattezza 5.20; chiamiamo \bar{p} un numero maggiore di q per

il quale si abbia immersione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{\bar{p}}(\Omega)$: si può scegliere ovviamente $\bar{p} = p^*$ se $p < n$, o un qualsiasi $\bar{p} > q$ se $p \geq n$. Consideriamo una generica $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e sia $t \in (0, 1]$ tale che

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\bar{p}} + \frac{t}{1};$$

applicando allora la stima (5.10) alla funzione $u - u_\delta$ e ricordando (5.16), il Lemma 5.19 ed il fatto che $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^{\bar{p}}(\Omega)$ ed in $L^1(\Omega)$, troviamo

$$\begin{aligned} \|u - u_\delta\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|u - u_\delta\|_{L^1(\Omega)}^t \|u - u_\delta\|_{L^{\bar{p}}(\Omega)}^{1-t} \leq 2^{nt} \sqrt{n}^t \delta^t \|Du\|_{L^1(\Omega)}^t \|u - u_\delta\|_{L^{\bar{p}}(\Omega)}^{1-t} \\ &\leq 2^{nt} \sqrt{n}^t \delta^t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^t 2^{1-t} \|u\|_{L^{\bar{p}}(\Omega)}^{1-t} \leq C \delta^t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}; \end{aligned}$$

questo ci assicura che in un sottoinsieme limitato di $W^{1,p}(\Omega)$ si ha che $\|u - u_\delta\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon$ purché $\delta \leq \bar{\delta}$, e dunque per il criterio 5.20 abbiamo la compattezza delle immersioni negli spazi $L^q(\Omega)$.

Step III. *Le immersioni in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ed in $L^\infty(\Omega)$.*

Sia adesso $p > n$; la compattezza dell'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,0}(\Omega)$ segue immediatamente dal Teorema di Ascoli–Arzelà, visto che un sottoinsieme limitato di $W^{1,p}(\Omega)$ è fatto di funzioni equicontinue grazie all'immersione continua in $L^\infty(\Omega)$, ed equilimitate grazie alla (5.13). Dal momento che $C^{0,0}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in qualsiasi spazio $L^q(\Omega)$ e che la composizione di un'inclusione continua ed una compatta è ancora compatta, abbiamo anche tutte le immersioni compatte negli $L^q(\Omega)$ ed in particolare in $L^\infty(\Omega)$.

Per mostrare la compattezza delle immersioni in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ dovremo usare nuovamente una stima di interpolazione tra gli spazi di Hölder; come già fatto nello Step I, però, non ci basterà chiaramente una stima fatta con la somma come la (5.15), ma ci servirà una stima di tipo moltiplicativo simile alla (5.10). In effetti, siano $0 \leq \beta_1 \leq \alpha \leq \beta_2 \leq 1$: definiamo allora $t \in [0, 1]$ in modo che $\alpha = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$, e notiamo che per ogni $x, y \in \Omega$ ed ogni funzione $u \in C^{0,0}(\Omega)$ si ha

$$\frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha} \leq \frac{|u(y) - u(x)|^t}{|y - x|^{t\beta_1}} \frac{|u(y) - u(x)|^{1-t}}{|y - x|^{(1-t)\beta_2}} = \left(\frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^{\beta_1}} \right)^t \left(\frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^{\beta_2}} \right)^{1-t},$$

da cui otteniamo

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \|u\|_{C^{0,\beta_1}(\Omega)} + \|u\|_{C^{0,\beta_1}(\Omega)}^t \|u\|_{C^{0,\beta_2}(\Omega)}^{1-t} \quad (5.17)$$

(il primo addendo a sinistra è dovuto alla presenza di $|u(0)|$ nella definizione (5.12) della norma negli spazi $C^{0,\beta}$).

Sia dunque $0 \leq \alpha < \beta = 1 - n/p$, e sia $t = 1 - \alpha/\beta > 0$, in modo che $\alpha = t\beta + (1-t)\beta$; dal momento che negli spazi di Banach la relativa compattezza equivale alla compattezza sequenziale, prendiamo una successione $\{u_h\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ e cerchiamo di dimostrare che converga forte in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ a meno di estrarre una sottosuccessione. Avendo già osservato che l'immersione in $C^{0,0}(\Omega)$ è compatta, sappiamo che a meno di sottosuccessioni $u_h \xrightarrow{C^{0,0}(\Omega)} \bar{u}$, e dunque

$$\|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,0}(\Omega)} \rightarrow 0;$$

d'altra parte, $\|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}$ è limitato visto che la successione u_h è limitata e l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\beta}(\Omega)$ è continua. Di conseguenza, applicando la (5.17) con $u_h - \bar{u}$ al posto di u e con $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta$, si ha

$$\|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,0}(\Omega)} + \|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,0}(\Omega)}^t \|u_h - \bar{u}\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}^{1-t} \rightarrow 0,$$

e quindi la successione u_h converge ad \bar{u} fortemente anche in $C^{0,\alpha}(\Omega)$: si noti che l'ipotesi $\alpha < \beta$ è stata essenziale per poter trarre vantaggio dal termine infinitesimo nell'interpolazione. \square

Osservazione 5.22. *Si può mostrare con un esempio che non vale l'inclusione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ se $p \leq n$, e quindi che l'ipotesi $q < p^*$ è fondamentale; analogamente, si può mostrare che non vale l'inclusione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,1-n/p}(\Omega)$ se $p > n$, per cui anche l'ipotesi $\alpha < 1 - n/p$ è fondamentale. Infine, si possono dare esempi per i quali non si ha l'inclusione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ con $q < p^*$ per insiemi aperti e limitati Ω per i quali non esista un'estensione di $W^{1,p}(\Omega)$.*

5.5 La disuguaglianza di Poincaré

Nel primo risultato che abbiamo mostrato, la Proposizione 5.2, avevamo osservato che $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si immerge in modo continuo in $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, ed in particolare che per le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ la norma L^p della derivata stima la norma L^{p^*} della funzione. Sarebbe particolarmente interessante riuscire a sapere se la norma L^p della derivata stima anche la norma L^p della funzione; ovviamente non si può sperare di mostrarlo usando Hölder, perché per passare dalla norma L^{p^*} a quella L^p servirebbe che la funzione che vale costantemente 1 fosse in $L^{pp^*/(p^*-p)}$, mentre le costanti non sono in nessuno spazio L^q su tutto \mathbb{R}^n . Ed in effetti la stima che abbiamo appena nominato è proprio falsa su \mathbb{R}^n , come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.23. Sia $p < n$; per $\alpha > 0$ sia $u_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$u_\alpha(x) := \frac{1}{|x|^\alpha} \wedge 1;$$

è immediato osservare che $u_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\alpha > n/p$; d'altra parte, per la derivata debole di u_α vale

$$|Du_\alpha(x)| = \begin{cases} \frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} & \text{se } |x| > 1; \\ 0 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Di conseguenza, $Du_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\alpha > (n-p)/p$; in particolare, se $\alpha \searrow n/p$ si avrà che $u_\alpha \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ma che $\|u_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \infty$ mentre $\|Du_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ resta limitata. Quindi la norma di Du in L^p non può stimare la norma di u in L^p ; si vede subito che lo stesso esempio mostra che la norma di Du in L^p non stima la norma L^q di u per nessun $q < p^*$.

Esempio 5.24. Sia $p \geq n$: allora con un ragionamento del tutto analogo a quello appena fatto si scopre che per nessun $1 \leq q \leq \infty$ si può stimare la norma L^q di u con la norma L^p di Du , per le $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

L'esempio appena visto mostra che se vogliamo stimare la norma di u con la norma di Du in \mathbb{R}^n , questo è possibile solo con l'esponente p^* . Pensiamo ora a cosa succede nel caso in cui Ω sia limitato: non ci possiamo ricondurre da Ω ad \mathbb{R}^n , neppure nel caso in cui Ω abbia un'estensione. Infatti in quel caso avremmo le stime

$$\begin{aligned} \|E(u)\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|D(E(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|E(u)\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}, \\ \|Du\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|D(E(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

che ovviamente non portano a dire

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)};$$

per poterlo dire servirebbe avere una disuguaglianza opposta all'ultima delle (5.18), che però chiaramente non possiamo sperare essere valida. Ed in effetti, è evidente che se Ω è limitato non possiamo sperare di stimare qualche norma di u con qualche altra norma di Du , visto che ad esempio le funzioni costanti appartengono a qualunque spazio $W^{1,p}(\Omega)$ ma hanno Du identicamente nullo! Viene abbastanza spontaneo, allora, intuire che lo spazio giusto nel quale sperare di approssimare u con Du non sia $W^{1,p}(\Omega)$ bensì $W_0^{1,p}(\Omega)$; finché si lavorava con $\Omega = \mathbb{R}^n$, ovviamente, non si può notare la differenza. Si può allora mostrare subito un primo risultato.

Lemma 5.25. *Sia $p < n$: per qualunque $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, esiste una costante C tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se poi Ω è limitato, per ogni $1 \leq q \leq p^$ (o per ogni $1 \leq q < \infty$ se $p = n$, oppure ogni $1 \leq q \leq \infty$ se $p > n$) si ha una costante C_q tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sia*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proof. Visto che le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ si possono estendere a zero fuori da Ω rimanendo in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, la prima parte è un'immediata conseguenza della (5.6); anzi si ha una costante C indipendente da Ω , cioè $C = p^*/1^*$.

Per quanto riguarda la seconda parte, anch'essa è immediata grazie al fatto che, se Ω è limitato, per ogni $p_1 < p_2$ (rispettivamente, per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$ e per ogni $1 \leq p_1 \leq \infty$) lo spazio $L^{p_2}(\Omega)$ (rispettivamente $C^{0,\alpha}(\Omega)$) si immerge in $L^{p_1}(\Omega)$. \square

Il risultato appena visto è stato molto semplice, e ci dà un risultato non migliorabile nel caso di Ω limitato; se Ω non è limitato, tuttavia, siamo stati in grado solo di estendere il risultato valido per $\Omega = \mathbb{R}^n$, e cioè la sola stima per il caso $q = p^*$ se $p < n$, ed addirittura nessuna stima per $p \geq n$. In realtà si può mostrare che anche per una classe interessante di insiemi non limitati si può dare una disuguaglianza significativa.

Lemma 5.26 (Poincaré). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato in almeno una direzione, e sia $1 \leq p < \infty$; allora esiste una costante C tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} ; \quad (5.19)$$

equivalentemente, si può dire che esiste una costante C' tale che

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C' \|Du\|_{L^p(\Omega)} .$$

Proof. Prima di tutto, possiamo supporre che $\Omega = (0, l) \times \mathbb{R}^{n-1}$ con qualche $l > 0$: infatti a meno di rotazioni e traslazioni Ω sta dentro ad una striscia di quel tipo, e dunque se mostriamo il risultato sulla striscia lo possiamo estendere al generico Ω visto che l'estensione a 0 fuori da Ω di una funzione di classe $W_0^{1,p}$ su Ω è una funzione di classe $W_0^{1,p}$ sulla striscia. Per densità, inoltre, possiamo limitarci a considerare una funzione $u \in C_0^\infty(\Omega)$, purché ovviamente troviamo una costante C che non dipenda da u . Chiamando $x \equiv (z, y)$ le coordinate del generico punto $x \in \mathbb{R}^n$, con $z \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha che

$$u(z, y) = \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, y) dt ,$$

per cui

$$|u(z, y)| \leq \int_0^l |Du|(t, y) dt = \|Du(\cdot, y)\|_{L^1(0,l)} \leq \|Du(\cdot, y)\|_{L^p(0,l)} l^{1/p'} ;$$

si noti che il termine a destra non dipende da z ma solo da y . Allora si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |u(z, y)|^p dz dy = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^l |u(z, y)|^p dz \right) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^l \left(\|Du(\cdot, y)\|_{L^p(0,l)}^p l^{p/p'} \right) dz \right) dy = l^{p/p'+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(\cdot, y)\|_{L^p(0,l)}^p dy \\ &= l^{p/p'+1} \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p , \end{aligned}$$

e dunque si è ottenuta la prima stima. La seconda è un'immediata conseguenza della prima, visto che la norma $W^{1,p}(\Omega)$ di u è la media p -esima tra la norma L^p di u e la norma L^p di Du . \square

Corollario 5.27. *Nelle stesse ipotesi del Lemma appena visto, si può ottenere su $W_0^{1,p}(\Omega)$ la stima $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ per qualsiasi $p \leq q \leq p^*$ se $p < n$, per qualsiasi $p \leq q < \infty$ se $p = n$, e per qualsiasi $p \leq q \leq \infty$ se $p > n$.*

Proof. Basta usare il Lemma di interpolazione nel modo ovvio. \square

In realtà, la versione della disuguaglianza di Poincaré che si usa di solito è quella con $q = p$; anzi, in genere si chiama disuguaglianza di Poincaré proprio la stima fatta con le norme L^p sia della u che della Du .

Osservazione 5.28. *In effetti nella dimostrazione appena data abbiamo usato il fatto che u si annullasse solo sul bordo “sinistro” della striscia infinita, quindi lo stesso risultato dato vale non solo su $W_0^{1,p}(\Omega)$, ma anche nella chiusura in $W^{1,p}(\Omega)$ dell’insieme delle funzioni regolari su Ω che stiano in $W^{1,p}(\Omega)$ e che si annullino in un intorno del bordo sinistro.*

Si può estendere questo ragionamento anche a casi un più complessi, come lasciamo per esercizio.

Osservazione 5.29. *Sia Ω un poliedro convesso limitato in \mathbb{R}^n , e sia F una sua faccia. Si dimostri che esiste una costante C tale che per ogni funzione u regolare su $\bar{\Omega}$ e nulla su F si ha*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} .$$

Più in generale (ma non è molto facile vederlo!) se Ω è regolare la disuguaglianza di Poincaré vale per funzioni regolari che siano nulle su un sottoinsieme assegnato a priori di $\partial\Omega$ che abbia volume $(n - 1)$ -dimensionale strettamente positivo.

Si noti che, quando vale la disuguaglianza di Poincaré (5.19), la

$$\|u\| := \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

è una norma su $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente alla norma standard; se invece la disuguaglianza di Poincaré non vale, la definizione appena data è solo quella di una seminorma, più debole della norma standard. In particolare, nel caso $p = 2$, lo spazio $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, ed un prodotto scalare equivalente a quello standard è dato da

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle Du, Dv \rangle_{L^2(\Omega)} \approx \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Si può adesso dare un’altra versione della disuguaglianza di Poincaré. Per introdurla cerchiamo di osservare cosa dice il Lemma di Poincaré: in parole molto povere, ci dice che se una funzione ha derivata piccola, allora è piccola, e questo è vero se la funzione è nulla sul bordo di un insieme opportuno. Ma in effetti, quello che veramente possiamo intuire è che se una funzione ha derivata piccola, allora “varia poco”; quindi non solo se è nulla al bordo non può diventare troppo grande, ma più in generale non potrà avere valori troppo diversi fra di loro. Se indichiamo quindi la media della funzione come

$$u_\Omega := \int_\Omega u(x) dx ,$$

possiamo sperare di stimare la differenza tra u ed u_Ω con la norma L^p di Du . Perché il nostro obiettivo abbia senso, dovremo chiaramente chiedere che Ω abbia misura finita, altrimenti non potremmo definire la media e non saremmo sicuri che u si possa integrare su Ω elevato alla potenza 1. Si capisce anche facilmente che sarà necessario richiedere che Ω sia connesso: se infatti Ω è dato da due palle disgiunte, la funzione che vale costantemente 1 su una palla e costantemente -1 sull’altra ha media nulla, derivate deboli nulle, ma non è nulla. Vale in effetti il seguente risultato.

Lemma 5.30 (Poincaré–Wirtinger). *Sia $1 \leq p < \infty$, e sia Ω un aperto limitato e connesso per il quale esista un'estensione di $W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una costante C tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si abbia*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \quad (5.20)$$

Proof. Supponiamo che la tesi non sia vera: allora esiste una successione $\{u_h\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $(u_h)_\Omega = 0$, $\|u_h\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $\|Du_h\|_{L^p(\Omega)} \leq 1/h$. In particolare la successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e dunque, per i Teoremi di immersioni compatte, a meno di sottosuccessioni $u_h \xrightarrow{L^p(\Omega)} \bar{u}$ per una certa \bar{u} . Prima di tutto possiamo osservare che allora u_h tende ad \bar{u} anche in L^1 e dunque si ottiene subito che anche $\bar{u}_\Omega = 0$. Presa poi una qualsiasi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, si ottiene subito che

$$\left| \int_\Omega \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \int_\Omega u_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \lim \left| - \int_\Omega \varphi \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right| \leq \lim \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0.$$

Ma allora $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, con $D\bar{u} = 0$. Essendo Ω connesso, vorremmo dedurre dal fatto che $D\bar{u} \equiv 0$ il fatto che \bar{u} è costante: questo ci darebbe l'assurdo cercato, e quindi la tesi, perché se \bar{u} fosse costante dovrebbe essere $\bar{u} = 0$, visto che $\bar{u}_\Omega = 0$; e d'altra parte che sia $\bar{u} = 0$ è impossibile visto che \bar{u} è il limite forte in L^p delle funzioni u_h , che hanno tutte norma 1 in L^p , e dunque anche \bar{u} deve avere norma 1 in L^p .

Ci siamo dunque ricondotti a mostrare quanto segue: se $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $Dv = 0$, allora v è costante; visto che Ω è connesso, questo è ben noto nel caso in cui v sia regolare. Possiamo adesso supporre che $p < \infty$, visto che Ω è limitato e dunque $W^{1,\infty}(\Omega)$ si immerge con continuità in qualsiasi $W^{1,q}(\Omega)$ con $q < \infty$. Consideriamo allora una generica $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $Dv = 0$, prendiamo un aperto connesso $\Omega' \subset\subset \Omega$ in modo che $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) \geq 2\bar{\varepsilon}$, ed indichiamo per comodità \tilde{v} la funzione che coincide con v su $B(\Omega', \bar{\varepsilon})$ ed è nulla altrimenti. Possiamo dunque considerare $v_\varepsilon := \tilde{v} * \rho_\varepsilon$ con ogni $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, e sappiamo che $v_\varepsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} \tilde{v}$. Sia adesso $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$: notiamo che

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_\varepsilon \psi &= \int_\Omega (\tilde{v} * \rho_\varepsilon)(x) \psi(x) dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega \tilde{v}(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \psi(x) \rho_\varepsilon(x-y) dx \right) \tilde{v}(y) dy = \int_\Omega \left(\int_\Omega \psi(x) \rho_\varepsilon(y-x) dx \right) \tilde{v}(y) dy \\ &= \int_\Omega (\psi * \rho_\varepsilon)(y) \tilde{v}(y) dy = \int_\Omega v \psi_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ma allora, in particolare, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ si ha

$$\int_\Omega v_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_\varepsilon = \int_\Omega v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} * \rho_\varepsilon \right) = \int_\Omega v \frac{\partial (\varphi * \rho_\varepsilon)}{\partial x_i} = 0,$$

visto che $\varphi * \rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Ricapitolando, v_ε è una funzione regolare sull'aperto connesso Ω' , tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ si abbia

$$\int_{\Omega'} v_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0;$$

dunque sappiamo che v_ε è una funzione costante su Ω' . Dal momento che v_ε converge fortemente in norma $L^p(\Omega')$ a v , anche v è una funzione costante su Ω' . Ma allora concludiamo che v è localmente costante, dunque finalmente che è costante. \square

Osservazione 5.31. *Con un'immediata minima modifica, si ha in effetti una versione molto più forte della disuguaglianza di Poincaré–Wirtinger, che ci assicura che la stima (5.20) vale anche se al posto della media $u_\Omega = \int_\Omega u$ prendiamo la media $u_A = \int_A u$ con un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ di misura strettamente positiva.*

Concludiamo osservando una proprietà immediata ed una sua importante conseguenza.

Lemma 5.32. *Se $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, allora per ogni multiindice α di lunghezza al più k si ha $D^\alpha u \in W_0^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.*

Proof. Sappiamo già che se u è in $W^{k,p}(\Omega)$, la sua derivata α -esima sta in $W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$; se poi $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, esiste una successione $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi_h \xrightarrow{W^{k,p}} u$. Ma allora $\{D^\alpha \varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ e $D^\alpha \varphi_h \xrightarrow{W^{k-|\alpha|,p}} D^\alpha u$. Dunque $D^\alpha u \in W_0^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$. \square

Possiamo allora estendere l'enunciato del Lemma di Poincaré al caso $k > 1$: la dimostrazione si ottiene con una immediata induzione dal caso $k = 1$ grazie al Lemma 5.32

Lemma 5.33 (Poincaré). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato in almeno una direzione, e sia $1 \leq p < \infty$; allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una costante C tale che per ogni $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C \left\| D^k u \right\|_{L^p(\Omega)} = C \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Quindi su $W_0^{k,p}(\Omega)$ la norma

$$\| \|u\| := \left\| D^k u \right\|_{L^p(\Omega)}$$

è una norma equivalente a quella usuale.

Si noti che, invece, non si può estendere il Lemma di Poincaré–Wirtinger, perché le derivate seconde non possono stimare la distanza di una funzione dalla sua media: se ad esempio prendiamo una funzione lineare, le derivate seconde sono tutte nulle, eppure la funzione è diversa dalla sua media!

Capitolo 6

Spazi di Sobolev frazionari e teoremi di traccia

6.1 Spazi di Sobolev con $k < 0$

Come capita spesso lavorando con spazi di Banach, può essere di particolare utilità avere informazioni riguardo ai duali degli spazi di Sobolev; per il caso $k = 0$, sappiamo già che $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ per qualunque $1 \leq p < \infty$. Si potrebbe pensare che, in modo analogo, debba essere $(W^{1,p}(\Omega))' = W^{1,p'}(\Omega)$, ma si capisce subito che non può funzionare in questo modo: infatti $W^{1,p}(\Omega)$ è un sottoinsieme denso di $L^p(\Omega)$, e quindi $L^{p'}(\Omega)$, il duale di $L^p(\Omega)$, è un sottoinsieme denso di $(W^{1,p}(\Omega))'$. Si ha allora un'immersione naturale di $L^{p'}(\Omega)$ in $(W^{1,p}(\Omega))'$; in particolare, detta $i : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ l'inclusione densa, si ha l'inclusione $i^* : L^{p'}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p}(\Omega))'$ data da

$$\langle i^*(f), u \rangle_{W^{1,p} \leftrightarrow (W^{1,p})'} = \langle f, i(u) \rangle_{L^{p'} \leftrightarrow L^p} = \int_{\Omega} u f \quad \forall f \in L^{p'}(\Omega), u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Possiamo dare subito una caratterizzazione del duale di $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemma 6.1. *Sia $1 \leq p < \infty$; allora $(W^{1,p}(\Omega))'$ è dato da tutti e soli i funzionali del tipo*

$$\langle F, u \rangle_{W^{1,p} \leftrightarrow (W^{1,p})'} = \int_{\Omega} f(x)u(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx \quad (6.1)$$

con $f, f_1, f_2, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$. Inoltre, si ha

$$\|F\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} \lesssim \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad (6.2)$$

e per ogni F esiste una scelta delle funzioni f ed f_i in modo che si abbia anche

$$\|F\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} \approx \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}. \quad (6.3)$$

Proof. Il fatto che prese $f, f_1, f_2, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$ la formula (6.1) definisca un elemento di $(W^{1,p}(\Omega))'$ è ovvio, ed anzi si ha immediatamente la (6.2).

D'altra parte, fissiamo $F \in (W^{1,p}(\Omega))'$ e consideriamo l'inclusione $j : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^{n+1}$ data da

$$j(u) := \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right);$$

si tratta di un'isometria, ovviamente non surgettiva. La sua immagine è isometrica a $W^{1,p}(\Omega)$, e dunque è uno spazio di Banach, per cui si tratta di un chiuso in $(L^{p'}(\Omega))^{n+1}$. Grazie al Teorema di Hahn–Banach possiamo allora estendere la F ad un funzionale

$$\tilde{F} \in ((L^p(\Omega))^{n+1})' = ((L^p(\Omega))')^{n+1} = (L^{p'}(\Omega))^{n+1}$$

con $\|\tilde{F}\| = \|F\|$. Dunque \tilde{F} corrisponde a $n + 1$ elementi di $L^{p'}(\Omega)$, che chiamiamo $f, -f_1, -f_2, \dots, -f_n$: questo vuol dire che

$$\langle \tilde{F}, (\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)\varphi_i(x) dx,$$

e visto che \tilde{F} estende F , in particolare

$$\langle F, u \rangle = \langle \tilde{F}, j(u) \rangle = \int_{\Omega} f(x)u(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx,$$

e dunque la validità della (6.1) è dimostrata. Inoltre

$$\|F\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \|\tilde{F}\| \approx \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

e dunque segue anche la (6.3). □

Osservazione 6.2. *Si noti bene che il funzionale F non identifica assolutamente le funzioni f ed f_i ! Se ad esempio prendiamo una funzione $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, il funzionale F associato ad f ed alle f_i è lo stesso associato ad $f + \partial\psi/\partial x_1$, ad $f_1 - \psi$ ed alle f_i per $2 \leq i \leq n$. Si capisce dunque che per ogni “scrittura” della F valga la (6.2), ma la (6.3) vale soltanto con una scelta opportuna delle funzioni f ed f_i .*

Con un ragionamento completamente identico a quello del Lemma 6.1 possiamo dimostrare la seguente estensione.

Corollario 6.3. *Sia $1 \leq p < \infty$; allora $(W^{k,p}(\Omega))'$ è dato da tutti e soli i funzionali del tipo*

$$\langle F, u \rangle_{W^{k,p} \leftrightarrow (W^{k,p})'} = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u f_\alpha$$

con $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ per ogni multiindice α di lunghezza al più k . Inoltre, la norma di F si stima come

$$\|F\|_{(W^{k,p}(\Omega))'} \lesssim \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

e si ha corrispondenza tra i due termini per un'opportuna scelta delle f_α .

Prendiamo adesso una F del tipo della (6.1); se consideriamo la distribuzione $G = f + \sum \partial f_i / \partial x_i$, si ha chiaramente che $\langle G, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$, dove la prima dualità è fatta nel senso delle distribuzioni e la seconda nel senso di $(W^{1,p}(\Omega))'$. Non possiamo, tuttavia, dire che la F e la G sono “la stessa cosa”, perché una distribuzione non corrisponde mai ad un elemento di $(W^{1,p}(\Omega))'$: infatti, data una distribuzione G , sappiamo dire quanto vale $\langle G, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; se poi esiste una costante C tale che per ogni φ valga

$$\langle G, \varphi \rangle \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

allora il funzionale G può essere esteso alla chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$, ossia $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tuttavia, se $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$, non c'è un modo unico di definire $\langle G, u \rangle$ per le $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega)$; quindi gli elementi di $(W^{1,p}(\Omega))'$ identificano delle distribuzioni, ma diversi elementi possono individuare la stessa distribuzione. Possiamo assicurarci che la situazione sia effettivamente questa grazie al seguente esempio.

Esempio 6.4. Consideriamo $I = (0, 1)$: visto che gli elementi di $W^{1,2}(I)$ sono funzioni uniformemente continue, la cui norma del sup è limitata dalla norma in $W^{1,2}$, il funzionale δ_0 , che associa ad ogni $u \in W^{1,2}(I)$ il valore $u(0)$ è un elemento di $(W^{1,2}(I))'$ –esercizio: trovare un esempio di funzioni f ed f_1 che corrispondono a questo funzionale in base al Lemma 6.1. Tuttavia, $\delta_0(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$, e dunque la δ_0 corrisponde alla distribuzione nulla pur non essendo l'elemento nullo di $(W^{1,2}(I))'$.

Quanto osservato finora ci convince che i duali degli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ non siano particolarmente semplici da considerare, visto che i loro elementi non possono essere considerati neppure come distribuzioni! Per lo stesso motivo stiamo anche evitando di considerare i duali degli spazi $W^{k,\infty}(\Omega)$: già per $k = 0$ abbiamo che il duale di $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio piuttosto scomodo da utilizzare; inoltre, visto che le funzioni regolari non sono dense in $W^{k,\infty}(\Omega)$, anche gli elementi del duale di $W^{k,\infty}(\Omega)$ non possono essere assolutamente considerati come distribuzioni.

Tutto questo ci convince che gli spazi per i quali è più semplice ed utile considerare il duale sono gli spazi di Sobolev $W_0^{k,p}(\Omega)$; grazie alla densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{k,p}(\Omega)$, infatti, è vero che tutti gli elementi di $(W_0^{k,p}(\Omega))'$ identificano in modo univoco una distribuzione. Diamo quindi la seguente classica definizione.

Definizione 6.5. Se $1 < p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, definiamo

$$W^{-k,p}(\Omega) := (W_0^{k,p'}(\Omega))'$$

nel senso usuale del duale in spazi di Banach. Se $p = 2$, continueremo ad indicare $H^{-k}(\Omega) = W^{-k,2}(\Omega)$.

Si noti che abbiamo preso, stavolta, $1 < p \leq \infty$, visto che il duale lo facciamo di $W_0^{k,p'}(\Omega)$. Sottolineiamo adesso il significato della scrittura $W^{-k,p}$: il fatto di usare l'esponente p in dualità con p' non dovrebbe apparire strano, anche alla luce del Lemma 6.1; merita invece di essere discusso il fatto che appaia il “ $-k$ ”. In effetti, negli spazi $W^{k,p}$, si ha tanta più regolarità quanto più k è alto, ed infatti gli spazi $W^{k,p}$ sono inclusi l'uno nell'altro per k decrescente, finché $k \in \mathbb{N}$. Avendo notato che il duale di $W^{1,p'}(\Omega)$ contiene in modo naturale $L^p(\Omega)$, e contiene anche molti più oggetti (come le delta di Dirac nel caso dell'intervallo grazie all'Esempio 6.4), ed avendo il Lemma di struttura 6.1, si capisce che le funzioni in $W^{-k,p}$ sono ancora meno regolari delle funzioni L^p , e lo sono tanto meno quanto più $-k$ diventa piccolo. In parole povere, si potrebbe dire in un certo senso che le funzioni di $W^{-k,p}$ contengono un “numero negativo” di derivate in L^p .

Osservazione 6.6. *Una semplice conseguenza del Lemma 6.1 e del suo corollario è che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e per ogni multiindice α si ha che $D^\alpha F \in W^{k-|\alpha|,p}$ per ogni $F \in W^{k,p}$, esattamente come già sapevamo benissimo accadere nel caso $k \in \mathbb{N}$ ed $|\alpha| \leq k$.*

Vediamo adesso cosa succede nel caso in cui si lavori in un aperto Ω su cui vale la disuguaglianza di Poincaré.

Corollario 6.7. *Se su Ω vale la disuguaglianza di Poincaré (5.19), allora lo spazio $W^{-k,p}(\Omega)$ è dato da tutti e soli i funzionali del tipo*

$$\langle F, u \rangle_{W^{1,p} \leftrightarrow (W^{1,p})'} = - \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} f_{\alpha} D^{\alpha} u \, dx$$

con $f_{\alpha} \in L^p(\Omega)$ per ogni multiindice α di lunghezza k .

Proof. E' sufficiente ricordare il Lemma di Poincaré 5.33, che assicura che su $W_0^{k,p'}(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{W^{k,p'}(\Omega)} \leq C \left\| D^k u \right\|_{L^{p'}(\Omega)} ;$$

se allora chiamiamo N il numero di multiindici di lunghezza k e consideriamo la mappa $j : W_0^{k,p'}(\Omega) \rightarrow (L^{p'}(\Omega))^N$ data da $u \mapsto \{D^{\alpha} u, |\alpha| = k\}$, è anch'esso un isomorfismo come nel Lemma 6.1. Ragionando quindi esattamente come in quel caso si arriva immediatamente alla tesi. \square

Si ricordi ora che grazie all'Esempio 6.4 sappiamo che per ogni $x \in \Omega$ si ha $\delta_x \in W^{-1,p}(\Omega)$ se Ω è l'intervallo unitario. In generale, è chiaro che il funzionale $u \mapsto u(x)$ è lineare e continuo su $W^{k,p'}(\Omega)$ se e solo se $W^{k,p'}(\Omega)$ si immerge con continuità in $C^{0,0}(\Omega)$. Grazie ai teoremi di immersione, allora, deduciamo che per ogni k e p tali che $kp' > n$ le delte di Dirac sono elementi di $W^{-k,p}(\Omega)$. Più in generale possiamo mostrare facilmente quanto segue.

Corollario 6.8. *Se T è una distribuzione a supporto compatto, allora appartiene a $W^{-k,p}(\Omega)$ per k abbastanza grande.*

Proof. E' noto che le distribuzioni a supporto compatto abbiano ordine finito; diciamo allora che T ha ordine m . Allora, visto che se $kp' > n + mp'$ si ha un'immersione continua di $W^{k,p'}(\Omega)$ in $C^m(\Omega)$, deduciamo che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^m(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\varphi\|_{W^{k,p'}(\Omega)}$$

e dunque $T \in (W_0^{k,p'}(\Omega))' = W^{-k,p}(\Omega)$. \square

Concludiamo con un'osservazione: per definizione abbiamo che il duale di $W_0^{1,2}(\Omega)$ è $H^{-1}(\Omega)$; tuttavia, sappiamo anche che $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, e quindi per il Teorema di Riesz si ha $H^{-1}(\Omega) \approx W_0^{1,2}(\Omega)$. Questo fatto può confondere, dal momento che abbiamo visto come $W_0^{1,2}(\Omega)$ sia in realtà in modo naturale un sottospazio molto piccolo di $H^{-1}(\Omega)$. In realtà basta ragionare un momento per capire come non vi sia alcuna contraddizione: il Teorema di Riesz, effettivamente, ci assicura che esiste un isomorfismo tra $W_0^{1,2}(\Omega)$ ed $H^{-1}(\Omega)$; ma questo isomorfismo non è dato dall'inclusione naturale –per inciso, un isomorfismo possibile è quello dato dall'inverso del Laplaciano.

Osservazione 6.9. *Ragioniamo un momento ancora sull'inclusione naturale $j : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ di $W_0^{1,2}$ in H^{-1} : se chiamiamo $i : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ l'inclusione naturale di $W_0^{1,2}$ in L^2 , si nota subito che si può scrivere $j = i^* \circ i$. Quindi si ha molto semplicemente*

$$\langle j(u), v \rangle_{(H^{-1}, W_0^{1,2})} = \langle i^*(i(u)), v \rangle_{(H^{-1}, W_0^{1,2})} = \langle i(u), i(v) \rangle_{(L^2, L^2)} = \int_{\Omega} i(u)i(v) dx = \int_{\Omega} uv dx.$$

Si noti infine che se Ω è limitato il Teorema di Rellich-Kondrasov ci assicura che i è compatta, e dunque anche j è compatta. Questo ci rassicura ulteriormente sul fatto che j non può essere un isomorfismo...

6.2 Spazi frazionari

In questa sezione ci occuperemo di definire gli spazi di Sobolev con esponenti frazionari, ossia vogliamo parlare di $W^{s,p}$ con un generico $s \in \mathbb{R}$. Prima di tutto ci occuperemo del caso $0 < s < 1$; diamo quindi subito la definizione.

Definizione 6.10. *Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $0 < s < 1$, definiamo lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ per le quali è finita la norma*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p := \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y - x|^{sp+n}} dy dx. \quad (6.4)$$

Si osserva facilmente che $W^{s,p}(\Omega)$ risulta uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, e si definisce $W_0^{s,p}(\Omega)$ come la chiusura con questa norma del sottospazio dato dalle funzioni $C_0^\infty(\Omega)$.

Non è del tutto evidente, a prima vista, quale sia il senso di questa definizione, e non è neppure chiaro che gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ siano inscatolati per s crescente. Cerchiamo allora di studiare qualche proprietà di questi spazi per capire quale sia il loro significato e comportamento. Partiamo mostrando che, nella (6.4), l'integrale doppio rischia di esplodere solo per i punti x ed y vicini.

Lemma 6.11. *Sia $u \in L^p(\Omega)$; allora per ogni $0 < s < 1$ l'integrale*

$$\iint_{\{(x,y) \in \Omega \times \Omega : |y-x| \geq 1\}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{sp+n}} dy dx$$

è finito.

Proof. Si tratta solamente di un conto: chiamando ω_{n-1} il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^{n-1} , si ha infatti

$$\begin{aligned} \iint_{|y-x| \geq 1} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{sp+n}} dy dx &= \int_{x \in \Omega} \int_{y \in \Omega \setminus B_1(x)} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{sp+n}} dy dx \\ &\leq 2^p \int_{x \in \Omega} \int_{y \in \Omega \setminus B_1(x)} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|y-x|^{sp+n}} dy dx \\ &= 2^{p+1} \int_{x \in \Omega} |u(x)|^p \int_{y \in \Omega \setminus B_1(x)} \frac{1}{|y-x|^{sp+n}} dy dx \\ &\leq 2^{p+1} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(1)} \frac{1}{|z|^{sp+n}} dz \\ &= 2^{p+1} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \omega_{n-1} \int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{sp+n}} t^{n-1} dt < \infty, \end{aligned}$$

visto che $1 + sp > 1$ per qualsiasi $s > 0$ e $p \geq 1$. □

Corollario 6.12. *Dati $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, si ha l'inclusione $W^{s_2,p}(\Omega) \subseteq W^{s_1,p}(\Omega)$.*

Proof. Se $s_1 = 0$, l'inclusione è vera per definizione; altrimenti, per ogni $u \in W^{s_2,p}(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{s_1,p}(\Omega)}^p &= \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{s_1 p+n}} dy dx \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \iint_{\{|y-x| < 1\}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{s_1 p+n}} + \iint_{\{|y-x| \geq 1\}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{s_1 p+n}} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \iint_{\{|y-x| < 1\}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{s_2 p+n}} + \iint_{\{|y-x| \geq 1\}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y-x|^{s_1 p+n}} < \infty, \end{aligned}$$

e grazie al Lemma 6.11 otteniamo che l'ultimo termine è finito, da cui concludiamo la tesi. □

Cerchiamo ora di osservare che lo stesso risultato vale anche nel caso $s_2 = 1$, cosa di cui ovviamente abbiamo bisogno perché la nostra definizione sia sensata.

Proposizione 6.13. *Dati $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$, si ha l'inclusione $W^{s_2,p}(\Omega) \subseteq W^{s_1,p}(\Omega)$.*

Proof. Grazie al Corollario 6.12, possiamo considerare semplicemente il caso di $s_1 = s > 0$, ed $s_2 = 1$. Prendiamo dunque $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$; visto che $u \in L^p(\Omega)$ e grazie al Lemma 6.11, ci basta mostrare che sia finito

$$\begin{aligned}
\int_{x \in \Omega} \int_{\omega \in B_1} \frac{|u(x+\omega) - u(x)|^p}{|\omega|^{sp+n}} d\omega dx &\leq \int_{x \in \Omega} \int_{\omega \in B_1} |\omega|^p \frac{\left| \int_{t=0}^1 |Du(x+t\omega)| dt \right|^p}{|\omega|^{sp+n}} d\omega dx \\
&\leq \int_{x \in \Omega} \int_{\omega \in B_1} \frac{\int_{t=0}^1 |Du(x+t\omega)|^p dt}{|\omega|^{(s-1)p+n}} d\omega dx \\
&= \int_{t=0}^1 \int_{x \in \Omega} \int_{z \in B_t(x)} \frac{1}{t^n} \frac{|Du(z)|^p}{|z-x|^{(s-1)p+n}} dz dx dt \\
&= \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^{(1-s)p}} \int_{z \in \Omega} |Du(z)|^p \int_{x \in B_t(z)} \frac{1}{|z-x|^{(s-1)p+n}} dx dz dt \\
&\leq \omega_{n-1} \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^{(1-s)p}} \int_{\rho=0}^t \frac{1}{\rho^{(s-1)p+n}} \rho^{n-1} d\rho dt \\
&= \omega_{n-1} \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^{(1-s)p}} \int_{\rho=0}^t \rho^{(1-s)p-1} d\rho dt \\
&= \omega_{n-1} \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^{(1-s)p}} \frac{t^{(1-s)p}}{(1-s)p} dt = \frac{\omega_{n-1}}{(1-s)p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}^p ;
\end{aligned}$$

abbiamo dunque la tesi nel caso di $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, e per la densità assicurata dal Teorema di Meyers e Serrin concludiamo anche nel caso generale. \square

Osservazione 6.14. *Come si vede dalla presenza di $1-s$ nel denominatore nell'ultimo termine della dimostrazione del lemma, la stima che abbiamo esplode per $s \rightarrow 1$. In effetti, non si tratta di un effetto di una stima troppo grossolana, ma quello che realmente succede: data una funzione u definita su Ω , anche regolare, la funzione $s \mapsto \|u\|_{W^{1,s}(\Omega)}$ può tranquillamente non essere continua. Ad esempio, per $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ e per $u(x) = x$, si ha che $\|u\|_{W^{1,s}(\Omega)}$ tende a $+\infty$ per $s \rightarrow 1$. Abbiamo quindi le inclusioni degli spazi per s crescenti, ma non la continuità delle norme. Analoghi esempi mostrano che anche per $s \rightarrow 0$ la norma in $W^{1,s}(\Omega)$ di un'assegnata funzione può esplodere.*

Concludiamo considerando il caso dell'insieme $\Omega = (0,1)$ e della funzione u_α definita come $u_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, che è il prototipo della funzione che, a seconda dell'esponente α , può appartenere o meno ai vari spazi L^p e $W^{k,p}$. Sappiamo benissimo che $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ se e solo se $\alpha p < 1$, mentre $u_\alpha \in W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha+1)p < 1$. Fa quindi piacere scoprire quanto segue.

Lemma 6.15. *Se $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo $u_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, si ha che $u_\alpha \in W^{s,1}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha+s)p < 1$.*

Proof. Iniziamo col calcolare

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{|y^{-\alpha} - x^{-\alpha}|^p}{|y-x|^{sp+1}} dy dx &= 2 \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 \frac{|y^{-\alpha} - x^{-\alpha}|^p}{|y-x|^{sp+1}} dy dx \\
&= 2 \int_{x=0}^1 \int_{\lambda=1}^{1/x} \frac{x^{1-\alpha p} |\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{x^{sp+1} (\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda dx \\
&= 2 \int_{x=0}^1 \int_{\lambda=1}^{1/x} \frac{1}{x^{(\alpha+s)p}} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda dx.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Scriviamo ora

$$\int_{\lambda=1}^{1/x} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda = \int_{\lambda=1}^2 \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda + \int_{\lambda=2}^{1/x} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda.$$

Per quanto riguarda l'integrale fra 1 e 2, basta osservare che esistono due costanti $0 < C_1 < C_2$ tali che per ogni $\lambda \in [1, 2]$ si ha

$$C_1 |\lambda - 1| \leq |\lambda^{-\alpha} - 1| \leq C_2 |\lambda - 1|;$$

questo assicura che

$$\int_{\lambda=1}^2 \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda \leq C_2 \int_{\lambda=1}^2 |\lambda - 1|^{p-sp-1} d\lambda < +\infty,$$

visto che $p-sp-1 > -1$. Per quanto riguarda invece l'integrale tra 2 e ∞ , bisognerà distinguere alcuni casi.

Caso I. $\alpha > 0$.

Se $\alpha > 0$, allora per ogni $\lambda \geq 1$ si ha $|\lambda^{-\alpha} - 1| < 1$ e quindi $|\lambda^{-\alpha} - 1|^p < 1$, ed allora

$$\int_{\lambda=2}^{1/x} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda=2}^{\infty} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda < +\infty,$$

visto che $sp+1 > 1$. Ma allora possiamo continuare la (6.5) come

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{|y^{-\alpha} - x^{-\alpha}|^p}{|y-x|^{sp+1}} dy dx \leq C + C \int_{x=0}^1 \frac{1}{x^{(\alpha+s)p}} dx, \tag{6.6}$$

che è limitato se e solo se $(\alpha+s)p < 1$. Questo assicura che, almeno nel range $\alpha < 0$, $u_\alpha \in W^{s,p}(\Omega)$ se $(\alpha+s)p < 1$; si noti che d'altra parte, se $(\alpha+s)p \geq 1$, si ha $u_\alpha \notin W^{s,p}(\Omega)$ visto che l'integrale in λ è comunque maggiore di una assegnata costante positiva per ogni $x \leq 1/2$, e dunque effettivamente l'integrale doppio diverge.

Caso II. $\alpha < 0$ ma $\alpha + s > 0$.

Essendo $\alpha < 0$, il numeratore $|\lambda^{-\alpha} - 1|$ diverge per $\lambda \rightarrow \infty$; dunque si ha

$$\int_{\lambda=2}^{1/x} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda=2}^{\infty} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda-1)^{sp+1}} d\lambda \approx \int_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{(\alpha+s)p+1}} d\lambda < +\infty,$$

visto che $(\alpha+s)p+1 > 1$. Ragionando esattamente come nella (6.6), allora, si deduce che anche nel range $\alpha + s > 0$ si ha che $u_\alpha \in W^{s,p}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha+s)p < 1$.

Caso III. $\alpha + s \leq 0$.

In questo ultimo caso nell'integrale in λ non possiamo stimare $1/x$ con $+\infty$ perché altrimenti l'integrale diverge. Dobbiamo quindi osservare che

$$\int_{\lambda=2}^{1/x} \frac{|\lambda^{-\alpha} - 1|^p}{(\lambda - 1)^{sp+1}} d\lambda \approx \int_{\lambda=2}^{1/x} \frac{1}{\lambda^{(\alpha+s)p+1}} d\lambda \approx -\frac{1}{(\alpha + s)p} x^{(\alpha+s)p},$$

e quindi

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{|y^{-\alpha} - x^{-\alpha}|^p}{|y - x|^{sp+1}} dy dx \approx -\frac{1}{(\alpha + s)p} \int_{x=0}^1 \frac{x^{(\alpha+s)p}}{x^{(\alpha+s)p}} dx < +\infty,$$

e dunque per tutti gli α tali che $\alpha + s \leq 0$ si ha $u_\alpha \in W^{s,p}(\Omega)$. Si noti che il conto fatto in realtà è valido per $\alpha + s < 0$, ma nel caso $\alpha + s = 0$ si ha banalmente lo stesso che la norma $W^{s,p}(\Omega)$ di u_α è finita perché l'integrale del logaritmo tra 0 ed 1 è limitato.

In conclusione, abbiamo osservato che $u_\alpha \in W^{s,p}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha + s)p < 1$, e quindi la situazione valida per $s = 0$ ed $s = 1$ si estende perfettamente agli spazi frazionari intermedi. \square

Lo stesso esempio si può ovviamente fare, con un po' più di pazienza, nel caso di dimensione $n \geq 2$, e si trova nuovamente che gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ sono delle buone interpolazioni tra $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$.

A questo punto possiamo dare le definizioni degli spazi frazionari e dei loro duali per qualunque parametro reale positivo.

Definizione 6.16. *Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1$ e $m \in \mathbb{N}$, definiamo lo spazio $W^{m+s,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ per le quali è finita la norma*

$$\|u\|_{W^{m+s,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Anche $W^{m+s,p}(\Omega)$ risulta uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_{W^{m+s,p}(\Omega)}$, e si definisce $W_0^{s,p}(\Omega)$ come al solito. Infine, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$ definiamo $W^{-k,p}(\Omega) = (W_0^{k,p}(\Omega))'$.

Vi sono varie altre definizioni disponibili in letteratura di spazi di Sobolev frazionari: anche in quel caso tutte le definizioni coincidono per aperti Ω sufficientemente regolari, ma possono essere differenti in casi limite.

Ricordiamo adesso che, per $p = 2$, abbiamo già definito gli spazi $H^s(\mathbb{R}^n)$ per qualunque $s \in \mathbb{R}^+$, tramite le trasformate di Fourier; è possibile dimostrare (ma non lo faremo perché è piuttosto tecnico) che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ le due definizioni di $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ coincidono, e che se Ω è sufficientemente regolare allora $H^s(\Omega)$ è formato esattamente dalle restrizioni delle funzioni in $H^s(\mathbb{R}^n)$. Quello che invece dimostreremo è che il Lemma 3.24 che dà la caratterizzazione degli spazi di Hilbert $H^k(\mathbb{R}^n)$ tramite la trasformata di Fourier vale anche per gli spazi duali $H^{-k}(\mathbb{R}^n) = (H^k(\mathbb{R}^n))'$. Anche questo risultato può essere mostrato con qualunque s reale positivo ma non così rapidamente.

Proposizione 6.17. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha*

$$H^{-k}(\mathbb{R}^n) = \{F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

ed inoltre

$$\|F\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Proof. Cominciamo prendendo $F \in H^{-k}(\mathbb{R}^n)$; allora grazie al Corollario 6.3 sappiamo che esistono delle funzioni f_α con $|\alpha| \leq k$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ tali che $F = \sum_\alpha D^\alpha f_\alpha$ e che

$$\|F\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)} \approx \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

grazie poi ai risultati classici sulla trasformata di Fourier per distribuzioni temperate, abbiamo che per ogni α si ha

$$\widehat{D^\alpha f_\alpha}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f_\alpha};$$

ma per ogni multiindice α di lunghezza al più k si ha che l'espressione

$$(1 + |\xi|^2)^{-k/2} \xi^\alpha$$

è limitata in modulo su tutto \mathbb{R}^n ; perciò per ogni α si ha $D^\alpha f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed in particolare

$$\begin{aligned} \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \left(\sum_\alpha D^\alpha f_\alpha \right)^\wedge \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \sum_\alpha \widehat{D^\alpha f_\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_\alpha \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \xi^\alpha \widehat{f_\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C' \sum_\alpha \left\| \widehat{f_\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|F\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato un'inclusione; affrontiamo adesso l'altra: sia quindi $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ una distribuzione temperata tale che $(1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e definiamo $\beta_\pm(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\pm k/2}$. Per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha allora, chiamando $\psi = \check{\varphi}$,

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle F, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{F}, \psi \rangle = \langle \beta_+ \beta_- \widehat{F}, \psi \rangle = \langle \beta_- \widehat{F}, \beta_+ \psi \rangle;$$

essendo poi $\beta_- \widehat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, in particolare $\widehat{F} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$|\langle F, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \beta_-(\xi) \widehat{F}(\xi) \beta_+(\xi) \psi(\xi) d\xi \right| \leq \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\| (1 + |\xi|^2)^{k/2} \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \left\| (1 + |\xi|^2)^{k/2} \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k \psi(\xi)^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k ((\widehat{\psi})^\vee(\xi))^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k (\widehat{\psi}(-\xi))^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k (\widehat{\psi}(\xi))^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k (\widehat{\varphi}(\xi))^2 d\xi \approx \|\varphi\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due ultime stime scopriamo che

$$|\langle F, \varphi \rangle| \lesssim \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^k(\mathbb{R}^n)} :$$

questo assicura sia che $F \in \mathbf{H}^{-k}(\mathbb{R}^n)$, sia che vale la stima

$$\|F\|_{\mathbf{H}^{-k}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| (1 + |\xi|^2)^{-k/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ,$$

e dunque abbiamo la seconda inclusione e concludiamo la tesi (peraltro, in questo secondo caso non abbiamo usato che $k \in \mathbb{N}$, quindi questa inclusione è provata per ogni $s \in \mathbb{R}$). \square

Teorema 6.18. *Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, oppure $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, oppure Ω è un aperto di classe C^1 con bordo compatto, allora per ogni $F \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ tale che le derivate distribuzionali $\partial F / \partial x_i$ appartengono anch'esse ad $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ si ha $F \in L^2(\Omega)$.*

Proof. Step I. Il caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Grazie alla Proposizione 6.17 sappiamo che per ogni $1 \leq i \leq n$

$$(1 + |\xi|^2)^{-1/2} \widehat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \xi_i \widehat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n);$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \|F\|_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)} + \sum_i \left\| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\|_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)} &\approx \left\| (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_i \left\| (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \xi_i \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\approx \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-1} \left(1 + \sum_i \xi_i^2\right) \widehat{F}^2} = \left\| \widehat{F} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Questo assicura che la distribuzione F è in effetti una funzione, ed in particolare una funzione in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e tra l'altro ci dà anche una stima della sua norma con le norme in \mathbf{H}^{-1} sua e delle sue derivate.

Step II. Il caso $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Per fare il caso di $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ bisognerà estendere gli elementi di \mathbf{H}^{-1} da \mathbb{R}_+^n ad \mathbb{R}^n , e sarà necessario farlo con estrema cura in modo molto simile a quanto fatto per mostrare il Teorema 4.9. Sia dunque $F \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}_+^n) = (\mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}_+^n))'$; per prima cosa estendiamo F (senza cambiarne il nome) ad un elemento di $(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'$, mantenendo la sua norma (cosa possibile grazie ad Hahn–Banach). Andiamo quindi a definire una estensione di F , cioè una $\widetilde{F} \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$: presa una generica $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e chiamando x la prima variabile di \mathbb{R}^n ed y le ultime $n - 1$, definiamo

$$\langle \widetilde{F}, u \rangle_{(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n))'} := \langle F, \tilde{u} \rangle_{(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'} ,$$

dove abbiamo posto per $(x, y) \in \mathbb{R}_+^n$

$$\tilde{u}(x, y) := u(x, y) - 3u(-x, y) + 2u(-x/2, y) .$$

Si noti che $\tilde{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$, che la sua norma in $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ si stima con quella di u in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, e che se $u \in \mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ allora $\tilde{u} = u$ su \mathbb{R}_+^n . Le prime due osservazioni ci assicurano che effettivamente

$\tilde{F} \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, mentre la terza di assicura che $\tilde{F} = F$ sul sottoinsieme di $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ dato da $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}_+^n)$ (si noti che invece non è vero che $\tilde{F} = F$ su $(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'$, semplicemente perché $(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'$ non è un sottoinsieme di $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$!).

Avremo dunque mostrato che $F \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ se osserveremo che $\tilde{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$; per fare questo, grazie allo Step I, sarà sufficiente osservare che $\tilde{F} \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, e questo già l'abbiamo visto, e che per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n).$$

Per mostrare quest'ultimo punto definiamo gli elementi $G_i \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ come

$$\langle G_i, u \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \tilde{u} \rangle_{(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'} & \text{se } i \geq 2, \\ \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \hat{u} \rangle_{(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'} & \text{se } i = 1, \end{cases}$$

dove $\hat{u} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$\hat{u}(x, y) := u(x, y) + 3u(-x, y) - 4u(-x/2, y);$$

si noti che stiamo considerando anche le varie $\partial F / \partial x_i$ estese a $(\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n))'$, come avevamo già fatto per F . Osserviamo che la \tilde{u} e la \hat{u} sono definite in modo che per ogni $i \geq 2$ si abbia

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}. \quad (6.7)$$

Dal momento che le G_i sono per definizione in $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, concluderemo la tesi pur di dimostrare che per ogni i si abbia

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} = G_i;$$

per farlo vedere, dobbiamo prendere una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e provare che

$$\langle G_i, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i}, \varphi \rangle, \quad (6.8)$$

dove la dualità può essere intesa anche solo nel senso distribuzionale (e seguirà, dunque, nel senso \mathbf{H}^{-1}). Prendiamo allora delle funzioni regolari $\tau_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ in modo che

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon(x) &= 1 \quad \forall x \leq \varepsilon, & \tau_\varepsilon(x) &= 0 \quad \forall x \geq 2\varepsilon, \\ |\tau_\varepsilon'(x)| &\leq \frac{3}{\varepsilon} \quad \forall x \in (0, +\infty), & |\tau_\varepsilon''(x)| &\leq \frac{9}{\varepsilon^2} \quad \forall x \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Osserviamo adesso che

$$\tau_\varepsilon(x) \tilde{\varphi} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}_+^n)} 0, \quad (6.10)$$

visto che

$$\|\tau_\varepsilon \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq (1 + 3 + 2) \|\varphi\|_{L^2([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1})} \rightarrow 0.$$

Sia ora $i \geq 2$: applicando (6.10) a $\widehat{\partial\varphi/\partial x_i}$ e ricordando (6.7) si trova che

$$\frac{\partial(\tau_\varepsilon\tilde{\varphi})}{\partial x_i} = \tau_\varepsilon \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i} = \tau_\varepsilon \widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}_+^n)} 0.$$

D'altra parte è anche

$$\frac{\partial(\tau_\varepsilon\tilde{\varphi})}{\partial x_1} = \tau_\varepsilon \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_1} + \tau'_\varepsilon\tilde{\varphi} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}_+^n)} 0;$$

infatti, intanto ragionando come in (6.10) troviamo subito che

$$\left\| \tau_\varepsilon \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq (1 + 3 + 1) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^2([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1})} \rightarrow 0;$$

inoltre, in generale $\tau'_\varepsilon\tilde{\varphi}$ converge puntualmente a 0 ed ha supporto di volume infinitesimo; la convergenza forte in L^2 si ottiene quindi purché $\tau'_\varepsilon\tilde{\varphi}$ sia limitato in modulo, il che grazie a (6.9) segue purché $\tilde{\varphi}$ sia limitato da una costante per ε su $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1}$, ed infine questo è vero –essendo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – visto che $\tilde{\varphi}(0, y) \equiv 0$. Abbiamo dunque che

$$\tau_\varepsilon\tilde{\varphi} \xrightarrow{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)} 0; \quad (6.11)$$

si noti che questa proprietà vale per qualsiasi funzione $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ma che è falsa con φ al posto di $\tilde{\varphi}$. Si può allora dedurre la (6.8) con $i \geq 2$ applicando (6.11) alle funzioni φ e $\partial\varphi/\partial x_i$, visto che

$$\begin{aligned} \langle G_i, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \tilde{\varphi} \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, (1 - \tau_\varepsilon)\tilde{\varphi} \right\rangle = -\left\langle F, \frac{\partial}{\partial x_i} ((1 - \tau_\varepsilon)\tilde{\varphi}) \right\rangle = -\left\langle F, (1 - \tau_\varepsilon) \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= -\left\langle F, (1 - \tau_\varepsilon) \widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\left\langle F, \widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} \right\rangle = -\left\langle \tilde{F}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Si noti con molta attenzione che non avremmo potuto fare lo stesso conto senza utilizzare la τ_ε : si ricordi infatti che F e $\partial F/\partial x_i$ in linea di principio sarebbero solo elementi di $H^{-1}(\mathbb{R}_+^n) = (H_0^1(\mathbb{R}_+^n))'$, e siamo stati noi ad estenderli ad elementi di $(H^1(\mathbb{R}_+^n))'$. Ma allora il fatto che

$$\left\langle F, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, u \right\rangle$$

vale in senso distribuzionale per le $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ e dunque per densità vale per tutte le $u \in H_0^2(\mathbb{R}_+^n)$; ma non possiamo affatto affermare che valga per una u , foss'anche regolare, che non si annulli sul bordo di \mathbb{R}_+^n !

Cerchiamo adesso di affrontare il caso della prima coordinata: per prima cosa dovremo mostrare che, analogamente a (6.11), si ha

$$\tau_\varepsilon\hat{\varphi} \xrightarrow{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)} 0; \quad (6.12)$$

infatti, che $\tau_\varepsilon\hat{\varphi}$ tenda a 0 in $L^2(\mathbb{R}^n)$ è ancora identico a (6.10), e quindi abbiamo anche la convergenza a 0 di

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_\varepsilon\hat{\varphi}) = \tau_\varepsilon \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x_i} = \tau_\varepsilon \widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}$$

per ogni $i \geq 2$. Per quanto riguarda $i = 1$, invece, ricordando (6.7) si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_\varepsilon \hat{\varphi}) = \tau'_\varepsilon \hat{\varphi} + \tau_\varepsilon \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_1} = \tau'_\varepsilon \hat{\varphi} + \tau_\varepsilon \widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}};$$

il termine a destra nell'ultima espressione tende a 0 per la (6.10), mentre di nuovo il termine a sinistra tende a zero grazie a (6.9) visto che $\hat{\varphi}$ è limitato da una costante per ε su $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1}$, ed ancora questo è vero per la regolarità dal momento che $\hat{\varphi}(0, y) \equiv 0$. Infine, vogliamo mostrare che si abbia

$$\tau'_\varepsilon \hat{\varphi} \xrightarrow{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)} 0; \quad (6.13)$$

in effetti, che $\tau'_\varepsilon \hat{\varphi}$ tenda a 0 in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ l'abbiamo appena osservato, e dunque abbiamo la convergenza a 0 anche di

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau'_\varepsilon \hat{\varphi}) = \tau'_\varepsilon \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_i} = \tau'_\varepsilon \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$$

per ogni $i \geq 2$. Per concludere, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\tau'_\varepsilon \hat{\varphi}) = \tau'_\varepsilon \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_1} + \tau''_\varepsilon \hat{\varphi} = \tau'_\varepsilon \widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} + \tau''_\varepsilon \hat{\varphi} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}_+^n)} 0;$$

la convergenza a 0 di $\tau'_\varepsilon \hat{\varphi}$ l'abbiamo già osservata per ogni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, mentre la convergenza a 0 di $\tau''_\varepsilon \hat{\varphi}$, grazie a (6.9), segue subito ancora per la regolarità se mostriamo che

$$\hat{\varphi}(0, y) \equiv 0, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_1}(0, y) \equiv 0;$$

ed infine queste sono due verifiche immediate (la prima delle quali è stata peraltro già usata prima). Abbiamo allora finalmente mostrato pure la (6.13), e quindi possiamo concludere la (6.8) nel caso $i = 1$ utilizzando (6.11), (6.12) ed (6.13) come segue:

$$\begin{aligned} \langle G_1, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \hat{\varphi} \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, (1 - \tau_\varepsilon) \hat{\varphi} \right\rangle = - \left\langle F, \frac{\partial}{\partial x_1} ((1 - \tau_\varepsilon) \hat{\varphi}) \right\rangle \\ &= - \left\langle F, (1 - \tau_\varepsilon) \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle F, \tau'_\varepsilon \hat{\varphi} \right\rangle = - \left\langle F, (1 - \tau_\varepsilon) \widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} \right\rangle + \left\langle F, \tau'_\varepsilon \hat{\varphi} \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \left\langle F, \widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} \right\rangle \\ &= - \left\langle \tilde{F}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Step III. *Il caso di Ω generico.*

La costruzione è pressoché identica a quella fatta nella dimostrazione della Proposizione 4.13, basta agire scegliendo un numero finito di carte locali ed utilizzando il risultato dello Step II. \square

Osservazione 6.19. *Si noti che il teorema appena visto può essere esteso al caso di un k generico, ossia si può asserire che se per ogni $|\alpha| \leq k$ si ha $D^\alpha F \in H^{-k}(\Omega)$, allora $F \in L^2(\Omega)$ e questo nuovamente vale per $\Omega = \mathbb{R}^n$ ricalcando lo Step I della dimostrazione appena fatta, per $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ modificando opportunamente lo Step II nell'identico spirito della dimostrazione del Teorema 4.9, e per Ω di classe C^k con bordo compatto utilizzando le carte locali.*

Osservazione 6.20. *Un'altra estensione immediata del teorema visto sopra è la seguente: per ogni $\mathbb{Z} \ni k \geq -1$, se $u \in \mathbf{H}^k(\Omega)$ e tutte le derivate parziali $\partial u / \partial x_i$ stanno in $\mathbf{H}^k(\Omega)$, allora $u \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$. Infatti, visto che sappiamo già che $u \in \mathbf{H}^k(\Omega)$ basta prendere un generico multiindice α di lunghezza $k+1$ e verificare che $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$. Visto però che u e le derivate $\partial u / \partial x_i$ stanno in $\mathbf{H}^k(\Omega)$, abbiamo che $D^\alpha u$ e le sue derivate $\partial(D^\alpha u) / \partial x_i$ stanno in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, per cui il nostro enunciato segue immediatamente dal Teorema 6.18.*

Vediamo adesso un'applicazione dell'ultimo risultato che ha un'importanza fondamentale nell'ambito della teoria dell'elasticità. Sia dunque $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di classe C^1 , chiamiamo $V = (\mathbf{H}^1(\Omega))^3$ e per ogni $1 \leq i, j \leq 3$ definiamo

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

per ogni $v = (v_1, v_2, v_3) \in V$. Chiamiamo anche $\|\cdot\|_V$ la norma in V . Si ha allora il seguente risultato.

Lemma 6.21 (Disuguaglianza di Korn). *Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $v \in V$ si ha*

$$\frac{1}{C} \|v\|_V \leq \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \|\varepsilon_{ij} v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_V.$$

Proof. Una disuguaglianza è immediata, visto che per ogni i e j si ha

$$\|\varepsilon_{ij} v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\|v_i\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|v_j\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right) \leq \|v\|_V.$$

Per quanto riguarda l'altra disuguaglianza, si noti che l'insieme

$$E = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 : \forall 1 \leq i, j \leq 3, \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega) \right\}$$

ovviamente contiene V , ma in linea di principio potrebbe anche essere più grande. Si noti anche che ovviamente E è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_E = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \langle \varepsilon_{ij} u, \varepsilon_{ij} v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^3 \langle u_i, v_i \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Un conto immediato assicura che, a livello distribuzionale, si ha

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ki} v) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ij} v) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{jk} v).$$

Ma allora sia $v \in E$ e fissiamo i e j : visto che $v_i \in L^2(\Omega)$ si ha che $\partial v_i / \partial x_j \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, e visto che $v \in E$ si ha anche che $\partial(\partial v_i / \partial x_j) / \partial x_k \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ per ogni $1 \leq k \leq 3$. Dunque per il Teorema 6.18 abbiamo che $\partial v_i / \partial x_j \in L^2(\Omega)$ per ogni i e j , e quindi $v \in V$; abbiamo perciò trovato che $E = V$ ed allo stesso tempo che $\|\cdot\|_V \leq C \|\cdot\|_E$. \square

6.3 Teoremi di traccia

L'ultimo argomento di questo corso sarà lo studio dei teoremi di traccia, che cercano di rispondere alla necessità di dire, data una funzione in Ω , quale sia il suo valore su $\partial\Omega$. Sicuramente siamo in grado di dire il valore della funzione u sul bordo nel caso in cui u sia uniformemente continua, visto che in tal caso si estende in modo continuo fin sul bordo. Perciò, grazie alle immersioni di Sobolev, sappiamo assegnare senza difficoltà ed in modo naturale un valore di $u \in W^{k,p}(\Omega)$ sul bordo di Ω non appena lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ si immerga in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ per qualche $\alpha > 0$, e quindi se $p > n$ purché Ω abbia la regolarità necessaria per applicare i teoremi di immersione. Cerchiamo invece di studiare cosa accade nel range $p \leq n$, iniziando come al solito dal caso di $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, e chiamiamo ancora x la prima variabile e y le ultime $n - 1$.

Lemma 6.22. *Sia $1 \leq p < \infty$; allora esiste un operatore lineare e continuo $\gamma_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ si ha $\gamma_0 u(y) = u(0, y)$. Inoltre per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e per ogni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha la formula di Gauss–Green*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u(z) \psi(z) \nu^i(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z),$$

essendo $\nu^i(z) = -\delta_{in}$ la i -esima componente del versore normale al bordo di \mathbb{R}^{n-1} in z .

Proof. Si consideri $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e si noti che

$$\begin{aligned} |\varphi(0, y)|^p &= - \int_{t=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (|\varphi(t, y)|^p) dt \leq p \int_{t=0}^{\infty} |\varphi(t, y)|^{p-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \right| dt \\ &\leq p \int_{t=0}^{\infty} |\varphi(t, y)|^p + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \right|^p dt, \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza è banale nel caso $p = 1$. Ma allora

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(0, y)|^p dy \right)^{1/p} \leq p^{1/p} \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)};$$

si osservi che questa disuguaglianza vale anche nel caso $p = \infty$, essendo in quel caso $p^{1/p} = 1$.

Si ha quindi che il funzionale $\gamma_0 : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ dato dalla restrizione su \mathbb{R}^{n-1} , ossia

$$\gamma_0 \varphi(y) := \varphi(0, y),$$

è continuo dotando $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ della sua usuale norma, e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ della norma $W^{1,p}$ su \mathbb{R}_+^n . Dal momento che le funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ sono dense in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, si può estendere in modo unico il funzionale γ_0 ad un funzionale continuo da $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ a $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. La formula di Gauss–Green, a questo punto, segue immediatamente per densità delle funzioni regolari e per la continuità di γ_0 . \square

L'operatore γ_0 definito nel Lemma 6.22 viene definito *Traccia*; il significato di questo termine è che, se p non è abbastanza grande per far sì che le funzioni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ siano continue fin

sul bordo, ciò nonostante queste funzioni lasciano almeno una “traccia” di sé sul bordo. Il semplice risultato che abbiamo appena visto ci assicura allora che per le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ è sensato parlare del “valore assunto sul bordo” almeno nel senso di funzioni $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. In effetti possiamo ora mostrare che, per $p > 1$, si può dare una traccia delle funzioni $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ che sia maggiormente regolare, ossia appartenga ad un opportuno $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ con $q > p$.

Proposizione 6.23. *Sia $1 < p < n$; allora esiste un operatore lineare e continuo $\gamma_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^{\frac{p(n-1)}{n-p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che $\gamma_0 u(y) = u(0, y)$ per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tale che valga la formula di Gauss–Green.*

Proof. Cominciamo esattamente come nel Lemma 6.22 stimando, per una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(0, y)|^\alpha dy &\leq \alpha \int_{\mathbb{R}_+^n} |\varphi(t, y)|^{\alpha-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, y) \right| dx \leq \alpha \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \|\varphi^{\alpha-1}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+^n)} \\ &= \alpha \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \|\varphi\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\mathbb{R}_+^n)}^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo adesso che, visto che vogliamo fare delle stime che riguardino la norma $W^{1,p}$ di φ , possiamo stimare le norme L^q di φ per tutti i $q < p^*$. Per ottenere il massimo possibile, dunque, poniamo $p'(\alpha - 1) = p^*$, il che porta a

$$\alpha = \frac{p(n-1)}{n-p},$$

e ci permette quindi di dedurre

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^{\frac{p(n-1)}{n-p}}(\mathbb{R}^{n-1})}^\alpha \leq \alpha \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)}^{\alpha-1} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^\alpha,$$

facendo uso dell’immersione di $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)$. Prendendo la radice α -esima di entrambi i membri e ragionando come nel Lemma 6.22 concludiamo la tesi. \square

Osservazione 6.24. *Come conseguenza del Lemma 6.22 e della Proposizione 6.23 abbiamo subito che la traccia di una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ appartiene a tutti gli spazi $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ con $p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$. Inoltre, è facile notare (esercizio!) che per $p \geq n$ la traccia appartiene a tutti gli spazi $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ con $p \leq q < \infty$.*

Il nostro obiettivo, in realtà, è ancora più ambizioso: vorremmo mostrare che la traccia di una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sia addirittura una funzione di Sobolev in \mathbb{R}^{n-1} . Sappiamo benissimo che non possiamo sperare di definire la traccia di funzioni $L^p(\Omega)$ in nessun $L^q(\partial\Omega)$, quindi di certo non potremo mostrare che le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ abbiano tracce in qualche $W^{1,q}(\mathbb{R}^{n-1})$; ci verranno tuttavia incontro gli spazi di Sobolev frazionari. Cominciamo dal caso $p = 2$.

Lemma 6.25. *Se $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, allora $\gamma_0 u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. D’altra parte, per ogni $v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ esiste qualche $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ tale che $\gamma_0 u = v$.*

Proof. Step I. L'immagine di γ_0 è contenuta in $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Prendiamo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed osserviamo che da un lato si ha

$$\varphi(0, y) = (\widehat{\varphi})^\vee(0, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot (0, y)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \xi' \cdot y} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi') d\xi_1 \right) d\xi',$$

indicando con $\xi = (\xi_1, \xi')$ il generico elemento di \mathbb{R}^n ; d'altra parte, chiamando $\omega(y) = \varphi(0, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, è analogamente

$$\varphi(0, y) = \omega(y) = (\widehat{\omega})^\vee(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \xi' \cdot y} \widehat{\omega}(\xi') d\xi';$$

dal momento che la trasformata e l'antitrasformata sono univoche su \mathbb{R}^{n-1} , deduciamo che si ha per ogni $y \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\widehat{\omega}(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi') d\xi_1.$$

Per mostrare che $\omega \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ si deve allora calcolare

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} (\widehat{\omega}(\xi'))^2 d\xi' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi') d\xi_1 \right)^2 d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi') (1 + |\xi|^2)^{-1/2} d\xi_1 \right)^2 d\xi' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi')^2 d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi_1 \right) d\xi'; \end{aligned}$$

si noti ora che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^{-1} d\xi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\xi'|^2)^2} + (\xi_1)^2 d\xi_1 \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}} \arctan \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}} \right) \right]_{\xi_1=-\infty}^{\infty} = \pi (1 + |\xi'|^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

per cui possiamo continuare il conto precedente come

$$\|\omega\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq \pi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2) \widehat{\varphi}(\xi)^2 d\xi \approx \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Questo assicura che la traccia è continua come applicazione da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dotato della norma $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ ad $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, e quindi per densità otteniamo che la traccia è un'applicazione continua da $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ ad $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Step II. L'immagine di γ_0 contiene $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Prendiamo $\omega \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, e definiamo $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$u(x_1, \cdot) := \left(e^{-(1+|\cdot|)x_1} \widehat{h}(\cdot) \right)^\vee \quad (6.14)$$

per $x_1 > 0$, ed $u(x_1, \cdot) \equiv 0$ se $x_1 \leq 0$. Notiamo allora che

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i \xi' \cdot x'} u(x_1, \cdot)(x') dx' dx_1 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \widehat{u(x_1, \cdot)}(\xi') dx_1 = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi_1 x_1} e^{-(1+|\xi'|)x_1} \widehat{h}(\xi') dx_1 \\ &= \widehat{h}(\xi') \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi i \xi_1 + 1 + |\xi'|)x_1} dx_1 = \frac{\widehat{h}(\xi')}{2\pi i \xi_1 + 1 + |\xi'|}; \end{aligned} \quad (6.15)$$

ma allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi'|^2) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi'|^2) \widehat{h}(\xi')^2}{(1 + |\xi'|^2)^2 + 4\pi^2 \xi_1^2} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi'|^2) \widehat{h}(\xi')^2}{(1 + |\xi'|^2)^2 + \xi_1^2} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \widehat{h}(\xi')^2 d\xi' \approx \|h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2. \end{aligned}$$

Ricordando che $1 + |\xi'|^2 \geq 1$ otteniamo che \widehat{u} sta in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e quindi che $u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$; allo stesso modo, per ogni $i \geq 2$ abbiamo che

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \left\| \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \left\| 2\pi i \xi_i \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = 2\pi \|\xi_i \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2\pi \left\| (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

e dunque otteniamo anche che $\partial u / \partial x_i \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Consideriamo infine $\partial u / \partial x_1$: ricordando (6.14) ed il fatto che u è rapidamente decrescente nella variabile x_1 si ha che

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(\xi') &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \cdot)(x') dx' = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} u(x_1, \cdot)(x') dx' \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \widehat{u(x_1, \cdot)}(\xi') = -(1 + |\xi'|^2) \widehat{u(x_1, \cdot)}(\xi'). \end{aligned}$$

Allora, ripetendo esattamente (6.15) con $\partial u / \partial x_1$ (estesa a 0 fuori da \mathbb{R}_+^n) al posto di u si trova che

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(\xi) = \frac{-(1 + |\xi'|^2) \widehat{h}(\xi')}{2\pi i \xi_1 + 1 + |\xi'|^2};$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(\xi)^2 d\xi \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi'|^2) \widehat{h}(\xi')^2}{1 + |\xi'|^2 + \xi_1^2} d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \widehat{h}(\xi')^2 d\xi' \approx \|h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2;$$

questo assicura che si può stimare anche la norma L^2 di $\widehat{\partial u / \partial x_1}$, e dunque la norma L^2 di $\partial u / \partial x_1$. In conclusione, abbiamo trovato che $u \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n)$. Infine, dalla (6.14) è immediato osservare che

$$u(0, \cdot) = \widehat{h}(\cdot)^\vee = h,$$

e quindi h è la traccia di u . □

Il risultato appena visto nel caso $p = 2$ si può estendere ad un generico $p < n$ come segue.

Teorema 6.26. *Dato $1 \leq p < \infty$ si ha che la traccia delle funzioni $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ appartiene a $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Proof. Se $p = 1$ non c'è niente da mostrare, visto che già sappiamo che le funzioni $W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ hanno traccia in $L^1(\mathbb{R}_+^n)$. Per quanto riguarda un generico $1 < p < n$, invece, partiremo con un lemma tecnico generale per poi dare la dimostrazione.

Step I. *Sia $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq u \in L^p((0, 1) \times \mathbb{R}^m)$: allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{t=0}^1 u(t, x) dt \right)^p dx \leq \left(\int_{t=0}^1 \left(\int_{\mathbb{R}^m} u(t, x)^p dx \right)^{1/p} dt \right)^p.$$

Prima di tutto si osservi che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{t=0}^1 u(t, x) dt \right)^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \|u(\cdot, x)\|_{L^1((0,1))}^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|u(\cdot, x)\|_{L^p((0,1))}^p \|1\|_{L^{p'}((0,1))}^p dx \\ &= \iint_{(0,1) \times \mathbb{R}^m} |u(t, x)|^p dx dt = \|u\|_{L^p((0,1) \times \mathbb{R}^m)}^p, \end{aligned}$$

e dunque la funzione

$$x \mapsto \int_{t=0}^1 u(t, x) dt$$

appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^m)$. Visto poi che $L^p(\mathbb{R}^m)$ ed $L^{p'}(\mathbb{R}^m)$ sono uno il duale dell'altro (si noti che $p < \infty$, e che per $p = 1$ il risultato è banalmente vero), si ha

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{t=0}^1 u(t, x) dt \right)^p dx \right)^{1/p} &= \left\| \int_{t=0}^1 u(t, \cdot) dt \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}=1} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left(\int_{t=0}^1 u(t, x) dt \right) dx \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}=1} \int_{t=0}^1 \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) u(t, x) dx dt \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}=1} \int_{t=0}^1 \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)} \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} dt \\ &= \int_{t=0}^1 \left(\int_{\mathbb{R}^m} u(t, x)^p dx \right)^{1/p} dt; \end{aligned}$$

estraendo la radice p -esima dagli estremi di questa disuguaglianza si conclude la tesi cercata.

Step II. *La tesi.*

Come al solito, per ottenere la tesi sarà sufficiente mostrare che la traccia, vista come applicazione da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ dotati della norma $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ rispettivamente, sia continua. Sia dunque $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo due generici punti $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$; come sempre stimeremo $u(x) - u(y)$ facendo l'integrale del gradiente tra x ed y . Tuttavia, stavolta sarà necessario non muoverci tra x ed y lungo il segmento che li congiunge (che è la cosa più logica nonché ciò che abbiamo fatto tutte le altre volte); se lo facessimo, infatti, alla fine otterremmo stime che riguardano l'integrale di Du fatto solo lungo il piano \mathbb{R}^{n-1} , e questo ovviamente non funziona perché vogliamo stima sull'integrale di Du su tutto \mathbb{R}_+^n . Dobbiamo quindi scegliere un cammino che connetta x ad y "entrando dentro" ad \mathbb{R}_+^n ; un modo possibile per non complicarci la vita con conti seccanti è ad esempio il cammino $\tau_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ dato da

$$\tau_{x,y}(t) = \left(|y-x| \left(\frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - t \right| \right), x + t(y-x) \right).$$

Abbiamo quindi la stima

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{2}|y-x| \int_{t=0}^1 |Du(\tau_{x,y}(t))| dt.$$

Per stimare la norma $W^{1-1/p,p}$ di u ristretto ad \mathbb{R}^{n-1} dobbiamo quindi, usando anche lo Step I e facendo il cambio di variabile $y = x + \rho\omega$ con $\omega \in \mathbb{S}^{n-2}$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$, che porta ai cammini

$$\tau(x, \rho, t) = \left(\rho \left(\frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - t \right| \right), x + t\rho\omega \right) = (s, z),$$

calcolare come segue:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y - x|^{p+n-2}} dy dx &\leq 2^{p/2} \int_{x \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_{y \in \mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{t=0}^1 \frac{|Du(\tau_{x,y}(t))|}{|y - x|^{\frac{n-2}{p}}} dt \right)^p dy dx \\ &= 2^{p/2} \left(2 \int_{t=0}^{1/2} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-2}} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{|Du(\tau(x, \rho, t))|^p}{\rho^{n-2}} \rho^{n-2} d\rho d\omega dx \right)^{1/p} dt \right)^p \\ &= 2^{p+p/2} \left(\int_{t=0}^{1/2} \left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-2}} \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^{n-1}} |Du(\tau(x, \rho, t))|^p dx d\rho d\omega \right)^{1/p} dt \right)^p \\ &= 2^{p+p/2} \left(\int_{t=0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/p}} \left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-2}} \int_{s=0}^{+\infty} \int_{z \in \mathbb{R}^{n-1}} |Du(s, z)|^p dz ds d\omega \right)^{1/p} dt \right)^p \\ &= \omega_{n-2} 2^{p+p/2} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \left(\int_{t=0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/p}} dt \right)^p = \frac{2^{1+p/2} \omega_{n-2}}{(1-1/p)^p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}. \end{aligned}$$

Visto che sappiamo già dal Lemma 6.22 che la traccia è continua da $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ a $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, deduciamo che

$$\|u\|_{W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)},$$

e quindi concludiamo la tesi in modo standard. \square

Osservazione 6.27. Così come nel Lemma 6.25, è possibile dimostrare che per ogni $1 \leq p < \infty$ lo spazio $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ è esattamente l'immagine della traccia delle funzioni di $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

Osservazione 6.28. Confrontiamo i risultati del Teorema 6.26, della Proposizione 6.23 e del Lemma 6.22: ci dicono che la traccia delle funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ è formata da funzioni che stanno sia in ogni $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ con $p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$ che in $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ma notiamo anche che, applicando formalmente le immersioni di Sobolev anche tra spazi di dimensione frazionaria, troveremmo che lo spazio $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ si immerge in tutti gli spazi $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ proprio con

$$p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Questo fatto dovrebbe definitivamente convincere che la nostra definizione di spazi di dimensione frazionaria è profondamente sensata; peraltro, con le opportune ipotesi di regolarità degli spazi, è possibile mostrare che le immersioni di Sobolev continuano a valere esattamente con le stesse formule anche nel caso di spazi di dimensione frazionaria o negativa.

Possiamo adesso estendere i risultati trovati al caso di funzioni di maggiore regolarità. Si ha infatti

Proposizione 6.29. Per ogni $1 \leq k \in \mathbb{N}$ esiste un operatore di traccia continuo da $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ ad ogni $W^{k-1,q}(\mathbb{R}^{n-1})$ per

$$p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p},$$

o per $p \leq q < \infty$ se $p \geq n$, nonché da $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ a $W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Proof. Facciamo la dimostrazione nel caso $k = 2$ per semplicità negli indici, ma si vedrà chiaramente che in tutti gli altri casi è assolutamente identico.

Prendiamo dunque $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$; per ogni $2 \leq i \leq n$, allora, $\partial u / \partial x_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e dunque per i risultati che conosciamo ammette una traccia

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^q(\mathbb{R}^{n-1}) \cap W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

per un qualsiasi $p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$ se $p < n$ oppure $p \leq q < \infty$ se $p \geq n$. Nella stessa intersezione si trova anche $\gamma_0 u$. Mostriamo innanzitutto che la traccia di u ammette come derivate deboli le tracce delle derivate deboli di u , ossia che

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_0 u; \quad (6.16)$$

in effetti, prendiamo una successione di funzioni $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ che convergono fortemente ad u in norma $W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$: in particolare, per la continuità delle applicazioni di traccia,

$$\begin{aligned} \psi_k &\xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} u \implies \gamma_0 \psi_k \xrightarrow{L^q, W^{1-1/p,p}} \gamma_0 u, \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} &\xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \implies \gamma_0\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right) \xrightarrow{L^q, W^{1-1/p,p}} \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Sia allora $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$: abbiamo dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \xleftarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \gamma_0\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right) = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

il che assicura la validità di (6.16). Ma allora la $\gamma_0 u$ appartiene ad $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$ e le sue derivate deboli $\partial \gamma_0 u / \partial x_i$ con $2 \leq i \leq n$ appartengono ad $L^q(\mathbb{R}^{n-1})$, per cui abbiamo subito $\gamma_0 u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^{n-1})$. Inoltre, in particolare la $\gamma_0 u$ sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ e le sue derivate deboli stanno in $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$; per definizione, quindi, $\gamma_0 u$ sta in $W^{1+(1-1/p),p}(\mathbb{R}^{n-1})$ e la tesi nel caso $k = 2$ è completa. \square

Osservazione 6.30. La proprietà (6.16) merita di essere adeguatamente sottolineata: in pratica ci dice (con la sua ovvia generalizzazione) che le derivate deboli della traccia coincidono con la traccia delle derivate deboli, ogni volta che questo abbia senso. In formule, possiamo dire che se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $k \geq 2$, allora in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ stanno tutte le tracce delle derivate di ordine al più $k - 1$, e che

$$\gamma_0(D^\alpha u) = D^\alpha(\gamma_0 u)$$

per ogni multiindice α di lunghezza $|\alpha| \leq k - 1$, e con $\{1\} \notin \alpha$: infatti, ovviamente non possiamo fare derivate nella direzione e_1 per una funzione che vive su \mathbb{R}^{n-1} che ha le coordinate dalla 2 alla n !

Osservazione 6.31. Ripetendo la costruzione del Lemma 6.25 si può osservare facilmente che per ogni numero naturale $k \geq 1$ le tracce delle funzioni $H^k(\mathbb{R}_+^n)$ sono tutte e sole le funzioni $H^{k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$; come nel caso $k = 1$, inoltre, si può mostrare più in generale che le tracce in delle funzioni $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sono tutte le possibili funzioni in $W^{k-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Osservazione 6.32. Si osservi che si può definire anche la “derivata normale al bordo”: se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $k \geq 2$, la derivata $-\partial u / \partial x_1$ sta in $W^{k-1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, e quindi la sua traccia sul bordo, che è l’estensione della derivata normale uscente, sta in $W^{k-1-1/p,p}(\mathbb{R}_+^n)$. Di nuovo, si osserva facilmente anche che tutte le funzioni di $W^{k-1-1/p,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sono tracce di derivate normali uscenti di qualche funzioni in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Gli stessi discorsi si possono fare ovviamente anche per tutte le derivate successive.

Gli ultimi risultati che vedremo su \mathbb{R}_+^n (e poi concluderemo rapidamente osservando come tutto si può estendere agli aperti regolari Ω dando le opportune definizioni) riguarderanno lo studio delle tracce delle funzioni in $W_0^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$. Come si può a questo punto sperare (altrimenti sarebbe piuttosto difficile essere soddisfatti della nozione di traccia), vale il seguente risultato.

Teorema 6.33. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ se e solo se $\gamma_0 u \equiv 0$.

Si noti che una implicazione in questo teorema è immediata: infatti tutte le funzioni in $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ hanno traccia nulla per definizione, e per continuità la traccia è nulla in tutta la chiusura di $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ con la norma $W^{1,p}$, ossia appunto $W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$. L’implicazione non banale, dunque, è l’altra, ossia che una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ avente traccia nulla deve stare in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$; si osservi che se u è anche continua, questo discende direttamente dal Lemma 4.23 (a patto di dimostrare che la traccia di qualunque funzione continua fin sul bordo coincide con la restrizione al bordo, che è lasciato come semplice esercizio!).

Il primo fondamentale passaggio che faremo sarà osservare una semplice conseguenza della formula di Gauss–Green, e cioè che se “incolliamo” due funzioni di $W^{1,p}$ in modo che le tracce coincidano, allora la funzione risultante è ancora in $W^{1,p}$. Formalmente, si può dire quanto segue.

Lemma 6.34. Siano u_\pm due funzioni appartenenti rispettivamente a $W^{1,p}(\mathbb{R}_\pm^n)$ e tali che le due tracce su \mathbb{R}^{n-1} coincidano. Allora la funzione incollamento u definita come u_\pm rispettivamente in \mathbb{R}_\pm^n è un elemento di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e le sue derivate deboli coincidono con quelle di u_\pm su \mathbb{R}_\pm^n .

Proof. Il fatto che la u stia in $L^p(\mathbb{R}^n)$ è chiaro, il problema sarà quindi solo di mostrare che l’incollamento delle derivate deboli di u_+ ed u_- dà la derivata debole di u . Si fissi dunque $1 \leq i \leq n$ e si prenda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: grazie alla formula di Gauss–Green mostrata fin dal Lemma 6.22 possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} u_+(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} u_-(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u_+(z) \varphi(z) \nu_+^i(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) \end{aligned}$$

$$- \int_{\mathbb{R}_-^n} \varphi(x) \frac{\partial u_-}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u_-(z) \varphi(z) \nu_-^i(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z),$$

indicando con $\nu_{\pm}^i(z)$ la componente i -esima della normale uscente in z rispettivamente da \mathbb{R}_{\pm}^n ; ricordando però che per ipotesi $\gamma_0 u_+ = \gamma_0 u_-$ mentre $\nu_+^i(z) = -\nu_-^i(z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ ed ogni $1 \leq i \leq n$, si continua il conto come

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_i}(x) dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} \varphi(x) \frac{\partial u_-}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx$$

essendo $\partial u / \partial x_i$ uguale alla derivata di u_+ o di u_- in \mathbb{R}_+^n ed \mathbb{R}_-^n : si ha allora la tesi. Si osservi che questo conto ci dimostra anche che se $\gamma_0 u_+ \neq \gamma_0 u_-$, allora la tesi è senz'altro falsa: basta prendere una funzione test regolare φ che integrata contro $\gamma_0 u_+ - \gamma_0 u_-$ non faccia 0. \square

Pur essendo una conseguenza molto semplice delle prime proprietà della traccia, questa proprietà ci sarà estremamente utile; in poche parole, ci dice che una funzione altrimenti regolare può permettersi di avere uno “spigolo” nel grafico rimanendo comunque in $W^{1,p}$. Un caso particolare importante del lemma appena visto è il seguente.

Corollario 6.35. *Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e la sua traccia è nulla, allora la sua estensione a 0 in \mathbb{R}_-^n sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Si noti che la stessa proprietà, cioè di poter essere estese a zero rimanendo in $W^{1,p}$, era già stata osservata per le funzioni di $W_0^{1,p}$ nel Lemma 4.26; il fatto che questa proprietà così caratteristica valga sia per le funzioni di $W_0^{1,p}$ che per le funzioni a traccia nulla è un altro forte indizio nella direzione del Teorema 6.33. Isoliamo allora un ultimo fatto tecnico, abbastanza intuitivo.

Lemma 6.36. *Sia $u \in W^{1,p}((-\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$, e definiamo la “funzione a due velocità” $u_\varepsilon : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ come*

$$u_\varepsilon(x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{se } x \geq \varepsilon, \\ u(2x - \varepsilon, y) & \text{se } 0 \leq x < \varepsilon. \end{cases}$$

Allora $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, le derivate di u_ε sono date da

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x, y) := \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, y) & \text{se } x \geq \varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(2x - \varepsilon, y) & \text{se } 0 \leq x < \varepsilon \text{ e } 2 \leq i \leq n, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(2x - \varepsilon, y) & \text{se } 0 \leq x < \varepsilon \text{ e } i = 1, \end{cases}$$

e la traccia di u_ε su $\{x = 0\}$ coincide con la traccia di u su $\{x = -\varepsilon\}$.

Proof. Consideriamo la restrizione di u alla striscia $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1}$, che è una funzione in $W^{1,p}$; chiamiamo ora v la funzione definita sulla striscia $(0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1}$ e data da $v(x, y) = u(2x - \varepsilon, y)$: si ha che v è una funzione in $W^{1,p}$ della striscia $(0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1}$; che la sua derivata parziale i -esima

coincide con quella della u nei punti corrispondenti se $i \geq 2$, o con il suo doppio per $i = 1$; e che le sue tracce in $\{x = 0\}$ ed $\{x = \varepsilon\}$ coincidono con le tracce della u rispettivamente in $\{x = -\varepsilon\}$ ed $\{x = \varepsilon\}$. Queste tre proprietà sono ovvie nel caso in cui u sia regolare e si deducono gratis nel caso generale per densità.

La funzione a due velocità u_ε non è altro che l'incollamento di u nella striscia $(\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ con v nella striscia $(0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1}$; grazie al Lemma 6.34, la tesi segue immediatamente pur di osservare che in $\{x = \varepsilon\}$ la traccia di v da sinistra coincide con la traccia di u da destra. Ma per quanto già osservato, la traccia di v da sinistra non è altro che la traccia di u da sinistra, ed è immediato osservare che per ogni funzione $W^{1,p}$ la traccia sinistra e destra in un iperpiano contenuto nel dominio coincidono (è un'altra proprietà che è ovvia per le funzioni regolari e che si deduce al volo per densità). \square

A questo punto abbiamo raccolto tutto quello che ci serve per mostrare il Teorema 6.33.

Proof. (del Teorema 6.33): Una implicazione, come già osservato, è ovvia.

Per mostrare l'altra implicazione, prendiamo una $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ con traccia nulla, e la estendiamo a zero sulla striscia $(-\varepsilon, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}$: grazie al Corollario 6.35 questa estensione è in $W^{1,p}((-\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ e le derivate deboli non sono cambiate in \mathbb{R}_+^n mentre sono nulle in $(-\varepsilon, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Definiamo quindi u_ε come nel Lemma 6.36: sappiamo dal lemma che $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, ma d'altra parte per costruzione u_ε è nulla nella striscia di larghezza $\varepsilon/2$ e quindi $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ grazie al Lemma 4.21. Per definizione, otterremo che $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ se mostriamo che $u_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} u$. In effetti, per quanto riguarda la norma L^p si ha

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \|u_\varepsilon - u\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u_\varepsilon\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} ; \end{aligned}$$

per quanto riguarda le derivate parziali con $i \geq 2$ si ha in modo del tutto analogo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq 2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} ; \end{aligned}$$

infine, per $i = 1$ si ha

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq 3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} . \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq 3 \|u\|_{W^{1,p}((0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ,$$

e quindi abbiamo ottenuto la tesi. \square

Si possono facilmente generalizzare gli ultimi risultati appena visti per il caso di un k generico.

Corollario 6.37. *Sia $k \geq 1$ e siano $u_{\pm} \in W^{k,p}(\mathbb{R}_{\pm}^n)$; allora l'incollamento di u_+ ed u_- sta in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ se per ogni multi-indice α di lunghezza minore di k le tracce $\gamma_0 D^\alpha u_{\pm}$ coincidono. In particolare, una funzione di $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ con le tracce delle derivate di ordine minore di k tutte nulle può essere estesa a 0 rimanendo in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Infine, data $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$, si ha che $u \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ se e solo se $\gamma_0 D^\alpha u \equiv 0$ per ogni multiindice α di lunghezza $|\alpha| < k$.*

Proof. Le prime due affermazioni si fanno in modo del tutto identico al Lemma 6.34 ed al Corollario 6.35. Per quanto riguarda invece la terza, di nuovo una implicazione è completamente ovvia; per l'altra implicazione non potremo ragionare esattamente come nel caso del Teorema 6.33, semplicemente perché la funzione a due velocità non sta in $W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$ in generale (in pratica facciamo comparire degli spigoli nel grafico, e questo non disturba l'appartenenza a $W^{1,p}$ ma è incompatibile con l'appartenenza a $W^{k,p}$ per $k \geq 2$). Quello che invece si può fare è prendere una funzione $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ con tutte le tracce delle derivate di ordine minore di k nulle, ed estenderla a 0 sulla striscia $(-1, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Fissato ε , troviamo una funzione $\varphi \in C_0^\infty((-1, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ supportata in $(-1/2, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ e tale che

$$\|u - \varphi\|_{W^{k,p}((-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq \varepsilon;$$

dal momento che la φ è regolare, è immediato notare l'esistenza di una costante $0 < \delta < 1/2$ tale che, chiamata $\tau_\nu \varphi$ la funzione φ traslata del vettore ν (che sta in $C_0^\infty((-1, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ purché $|\nu| < 1/2$), si ha

$$\|\varphi - \tau_\nu \varphi\|_{W^{k,p}((-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq \varepsilon$$

per ogni $|\nu| \leq \delta$. Ma allora, per disuguaglianza triangolare ed invarianza della misura di Lebesgue, si ha subito che per ogni $|\nu| \leq \delta$ si ha

$$\|u - \tau_\nu u\|_{W^{k,p}((-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \leq 3\varepsilon;$$

in particolare, se prendiamo il vettore $\nu = (\delta, 0)$, la funzione $\tau_\nu u$ sta in $W_0^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ per il Lemma 4.21; visto che $W_0^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ è chiuso ed ε è arbitrario, concludiamo la tesi. \square

Questo corollario rende completamente chiaro quanto sottolineato nell'Osservazione 4.24. Più precisamente, si noti con attenzione quanto segue: se $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \cap W^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$, non è affatto detto che u stia anche in $W_0^{2,p}(\mathbb{R}_+^n)$! In particolare, il fatto che u sta in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ ci assicura che la sua traccia è nulla; visto poi che per l'Osservazione 6.30 sappiamo che le derivate della traccia coincidono con la traccia delle derivate, capiamo subito che le tracce di tutte le derivate di u in direzioni $i = 2, \dots, n$ sono nulle. Ma non è affatto vero, in generale, che anche la traccia della derivata lungo la direzione $i = 1$ sia nulla.

Corollario 6.38. *Date $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $v \in W^{1,p'}(\mathbb{R}_+^n)$ con $1 < p < \infty$, vale la formula di Gauss-Green generale*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}_+^n} v \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0 u \gamma_0 v \nu_i(z) dz.$$

Proof. E' davvero immediato per densità a partire dalle funzioni regolari. \square

Come al solito, dopo aver dimostrato tutti i risultati che ci interessavano nel caso-modello di \mathbb{R}_+^n vogliamo da questo dedurre la loro validità nel caso di un generico aperto Ω sufficientemente regolare; per fare questo, chiaramente dovremo definire gli spazi $W^{s,p}(\partial\Omega)$ sul bordo di Ω . Il modo è quello che si può rapidamente intuire: sia Ω un aperto di classe C^k con bordo compatto, e sia ovviamente $k \geq s$ (in genere si prendono direttamente aperti con bordo $C^\infty \dots$); allora possiamo suddividere $\partial\Omega$ come un'unione finita di parti relativamente aperte (ossia, aperte nella topologia di sottoinsieme derivante da \mathbb{R}^n) che possono essere raddrizzate con funzioni di classe C^k ; in altre parole, possiamo scrivere

$$\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$$

avendo delle funzioni $\tau_i : \Gamma_i \rightarrow (0,1)^{n-1}$ biunivoche e di classe C^k . Possiamo anche trovare una partizione dell'unità fatta con funzioni regolari $\psi_i : \partial\Omega \rightarrow [0,1]$ in modo che ogni ψ_i sia supportata nel relativo Γ_i . Possiamo a questo punto definire gli spazi $W^{s,p}(\partial\Omega)$ come segue: prendiamo $u \in L^p(\partial\Omega)$ (e la definizione di $L^p(\partial\Omega)$ già ce l'abbiamo, visto che si tratta di una varietà dotata della misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale); a questa u possiamo associare N funzioni in $L^p((0,1)^{n-1})$, date da

$$x \mapsto \psi_i(\tau_i^{-1}(x))u(\tau_i^{-1}(x));$$

diremo allora che $u \in W^{s,p}(\partial\Omega)$ se e solo se ciascuna di queste N funzioni appartiene a $W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})$, definendo poi la norma nel modo ovvio. E' abbastanza semplice controllare che la definizione degli spazi $W^{s,p}$ non dipende dalla scelta delle carte e delle partizioni dell'unità, e che scelte diverse portano comunque a norme equivalenti. Appoggiandosi agli analoghi risultati su \mathbb{R}_+^n nel modo solito, è immediato estendere tutti i risultati sulla traccia che abbiamo dimostrato nel caso di un aperto Ω con la dovuta regolarità.

Teorema 6.39. *Sia Ω un aperto di classe C^∞ con bordo compatto. Allora possiamo definire la traccia, che è una funzione continua da $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ che per le funzioni regolari coincide con la restrizione al bordo e per la quale vale la formula di Gauss–Green. La traccia in particolare è fatta di funzioni in $L^q(\partial\Omega)$ per ogni $1 \leq q \leq p(n-1)/(n-p)$ se $p < n$, e di funzioni in qualunque $L^q(\partial\Omega)$ se $p \geq n$. Le tracce delle funzioni $W^{1,p}(\Omega)$ sono tutte le funzioni di $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. In generale, per qualunque $k \geq 2$ le tracce delle funzioni in $W^{k,p}(\Omega)$ sono tutte e sole le funzioni di $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$; si possono fare anche le tracce delle derivate, in particolare la traccia di $D^\alpha u$ sarà in $W^{k-|\alpha|-1/p,p}(\partial\Omega)$ per ogni $|\alpha| < k$. Infine, una funzione di $W^{k,p}(\Omega)$ appartiene a $W_0^{k,p}(\Omega)$ se e solo se sono nulle le tracce delle derivate α -esime di u per tutti i multiindici α di lunghezza minore di k .*

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: théorie et application*, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris (1983).
- [2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **19**, American Mathematical Society (1998).
- [3] D. Gilbarg & N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Edition, Springer Verlag, 2001.
- [4] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, 1989.
- [5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1966.