Controllo dei sistemi energetici

Principi di conservazione della massa e della energia

Modellistica di sistemi termici

Prof. Alessandro Pisano

apisano@unica.it

Elementi di modellistica per sistemi a fluido

Rappresentare la «realtà» mediante modelli matematici è una esigenza comune a tutte le discipline ingegneristiche.

Modelli matematici basati su leggi fisiche («first principles model») vs modelli matematici basati sui dati sperimentali

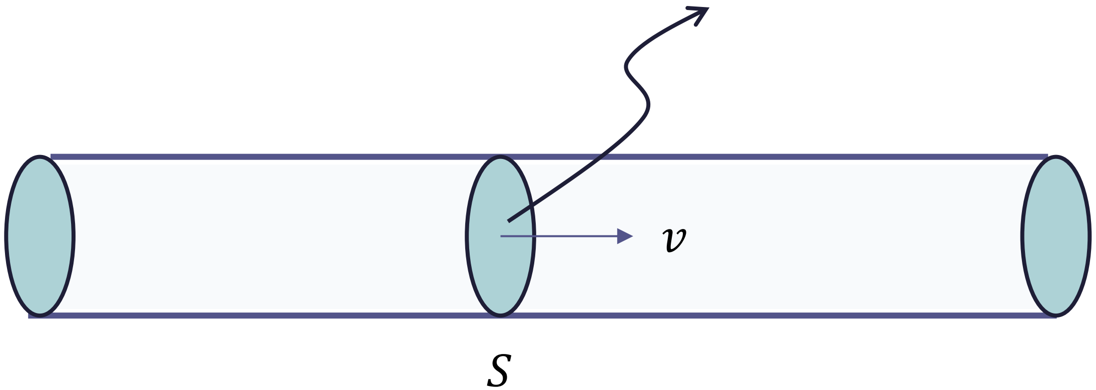
Portata massica e portata volumetrica

La portata massica w di un fluido attraverso una certa sezione di una tubazione esprime la quantità di fluido, in unità di massa, che attraversa la sezione nell'unita di tempo.

La portata volumetrica q di un fluido attraverso una certa sezione di una tubazione esprime la quantità di fluido, in unità di volume, che attraversa la sezione nell'unita di tempo.

$$[w] = kg/s \qquad\qquad [q] = m^3/s$$

A: area della sezione trasversale S



portata massica

$$w = \rho A\, v$$

ρ: densità del fluido

A: sezione trasversale della tubazione

v: velocita media nella sezione (in direzione ortogonale alla sezione stessa)

portata volumetrica

$$q = A\, v \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{w = \rho\, q}$$

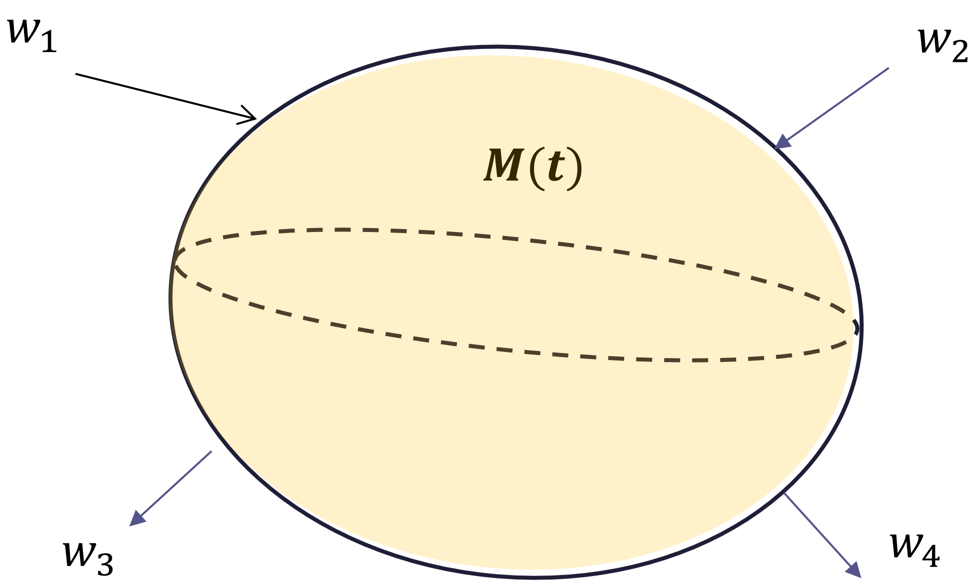
Le portate dei fluidi coinvolti hanno una grossa influenza sul comportamento dinamico di un processo in cui si realizza un trasporto di energia attraverso dei fluido.

La densità di un fluido dipende, in generale, dalle variabili termodinamiche che definiscono lo stato fisico, ma per liquidi (e ovviamente anche per sostanze solide) tale dipendenza è trascurabile.

Moto laminare vs. moto turbolento (con quest’ultimo che nella tecnica è la tipologia largamente prevalente, tranne che in ambito oleodinamico)

Principio di conservazione della massa (P.C.M.)

Si considera un certo volume finito V racchiuso da una superficie S.

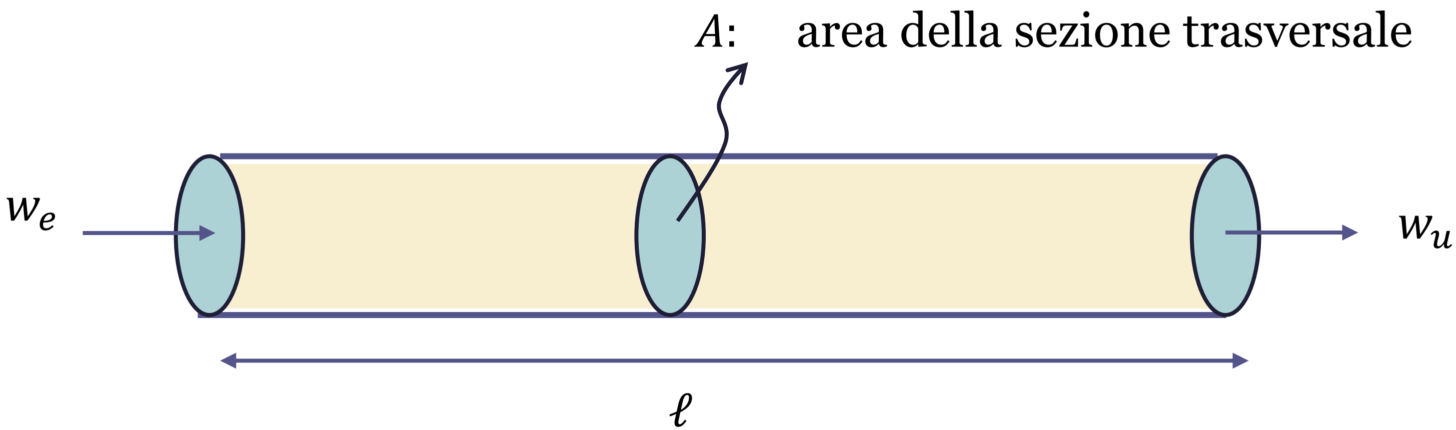


Sia M(t) la massa di fluido contenuta nel volume all'istante t, e siano w_1, $w_2, \dots, w_n$ le portate massiche di fluido che transitano attraverso la superficie di contorno, con segno positivo se entranti e segno negativo se uscenti.

P.C.M

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)$$

Es.



$M(t)$: massa di fluido contenuta nel volume all’istante t

Applicando il P.C.M. al volume racchiuso fra le pareti esterne della tubazione e le sezioni di ingresso e di uscita si ottiene

$$\frac{dM(t)}{dt} = w_e(t) - w_u(t)$$

$V(t)$: volume di fluido contenuto nel volume all’istante t

$$V(t) = A\ell = \text{cost.}$$

Se la densità del fluido è uniforme lungo la tubazione:

$$M(t) = V(t)\rho(t) = A\,\ell\rho(t) \Rightarrow \frac{dM(t)}{dt} = A\ell\frac{d\rho(t)}{dt}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = A\ell\frac{d\rho(t)}{dt} = w_e(t) - w_u(t)$$

Fluido incomprimibile $\Rightarrow$ $\rho = cost$ $\Rightarrow$ $\frac{d\rho}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dM(t)}{dt} = 0 \Rightarrow w_u(t) = w_e(t)$$

Principio di conservazione della massa (P.C.M.) riformulato per fluidi incomprimibili

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)$$

Fluido incomprimibile

$$M(t) = V(t)\,\rho$$

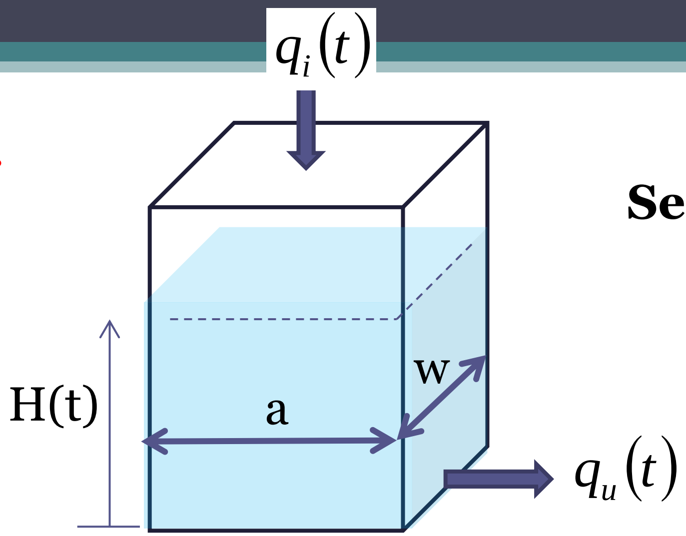
$$w_i(t) = \rho q_i(t)$$

$$\frac{d[\rho V(t)]}{dt} = \cancel{\rho}\frac{dV(t)}{dt} = \cancel{\rho}\sum_{i=1}^{n} q_i(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)$$

(P.C.M.) riformulato per fluidi incomprimibili in funzione del volume $V(t)$ di fluido e delle portate volumetriche entranti/uscenti

Es.



Serbatoio a sezione costante rettangolare

V(t) = volume di liquido contenuto nel serbatoio (in m3) $V(t) = aw\mathrm{H}(\mathrm{t})$

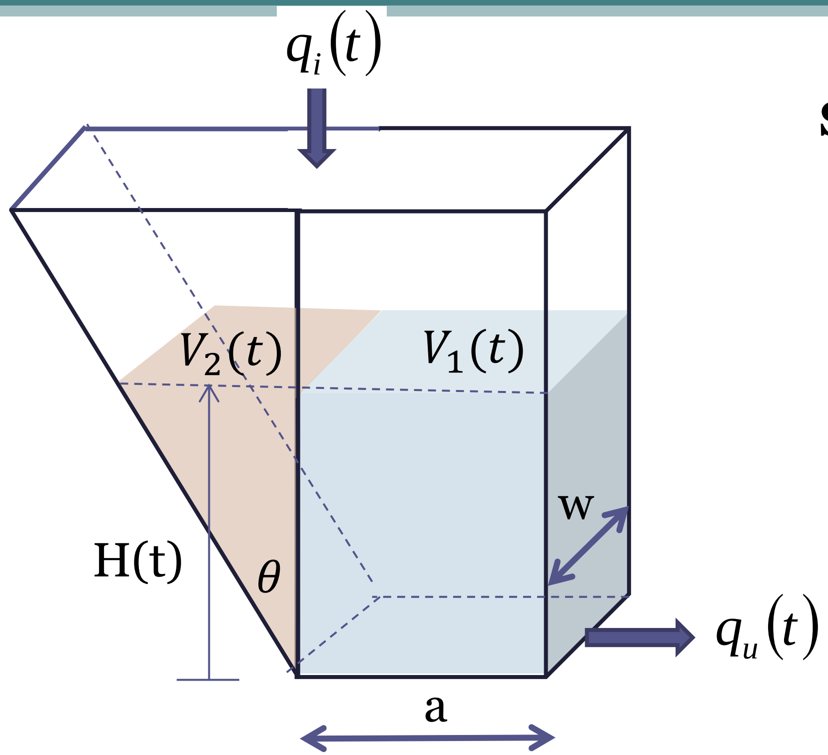
H(t) = livello del liquido nel serbatoio (in m)

$q_i(t)$, $q_u(t)$ portate volumetriche in ingresso ed in uscita dal serbatoio (in m3/sec)

Conservazione della massa $\dot{V}(t) = q_i(t) - q_u(t)$ $\dot{V}(t) = aw\dot{H}(t) = q_i(t) - q_u(t)$

$$\dot{H}(t) = \frac{1}{aw}[q_i(t) - q_u(t)]$$

Es.



Serbatoio a sezione variabile

Conservazione della massa

$$\dot{V}(t) = q_i(t) - q_u(t)$$

Suddividiamo il volume di liquido contenuto nel serbatoio in due aliquote distinte

$$V_1(t) = aw\mathrm{H}(t)$$

Rappresenta il volume di liquido nella parte destra (in celeste).

$$V_2(t) = \frac{1}{2}H^2(t)w\tan(\theta)$$

Rappresenta il volume di liquido nella parte sinistra (in arancione).

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = awH(t) + \frac{1}{2}H^2(t)w\tan(\theta) = V(H(t))$$

$$\dot{V}(t) = \frac{dV}{dH}\frac{dH}{dt} = [aw + H(t)w\tan(\theta)]\,\dot{H}(t) = q_i(t) - q_u(t)$$

$$\dot{H}(t) = \frac{1}{aw + H(t)w\tan(\theta)}[q_i(t) - q_u(t)]$$

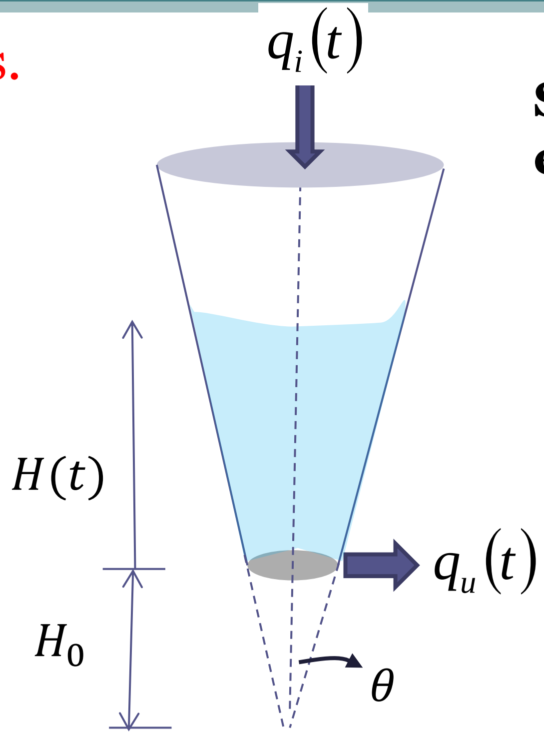
Modello matematico non lineare

N.B. Particolarizzando l'equazione per $\theta = 0$ si riottiene ovviamente il modello del serbatoio a sezione rettangolare costante ricavato in precedenza

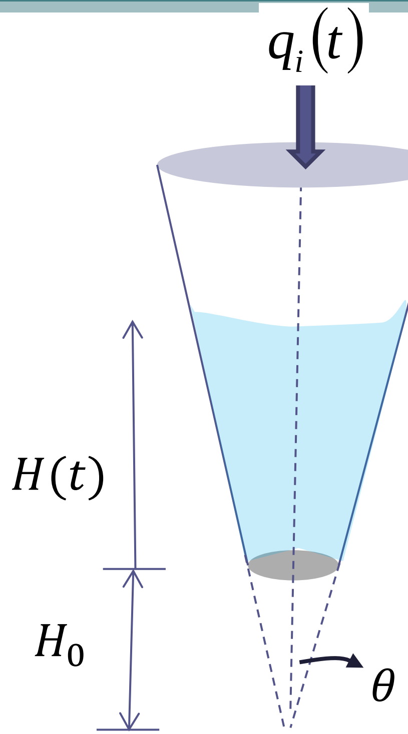
Partendo dalla funzione $V = V(H)$ si può dedurre facilmente la dinamica del livello secondo l'espressione seguente:

$$\dot{H}(t) = \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial H}}[q_i(t) - q_u(t)]$$

Es.



Sviluppare il modello per esercizio



$$dV = \pi(H\,\mathrm{tg}\,\theta)^2\,dH$$

$$V(H) = \int_{H_0}^{H} dV = \int_{H_0}^{H} \pi(\mathrm{tg}\,\theta)^2 H^2 dH$$

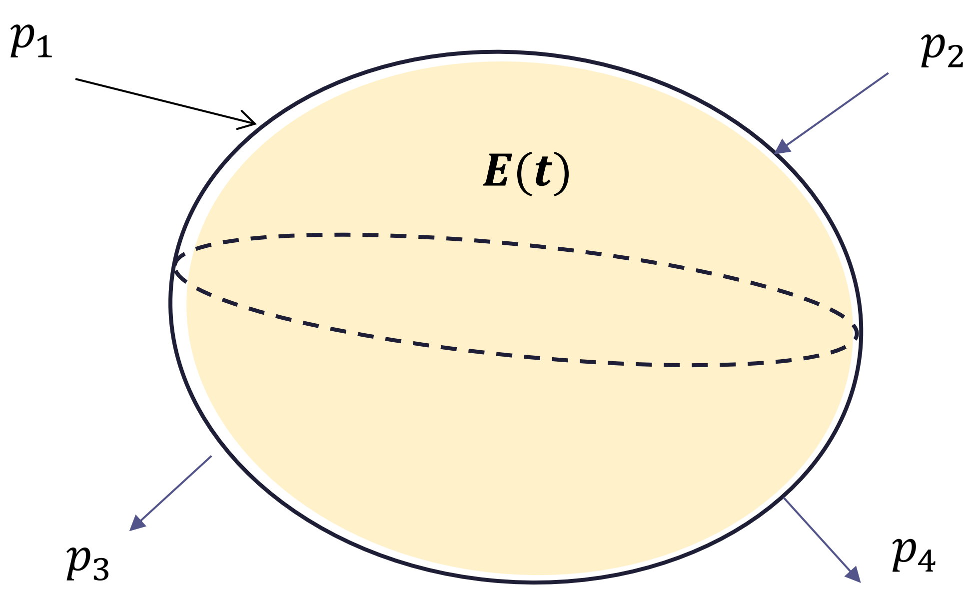
$$= \frac{\pi}{3}(\mathrm{tg}\,\theta)^2 (H^3 - H_0^3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi(\mathrm{tg}\,\theta)^2 H^2$$

$$\dot{H}(t) = \frac{1}{\pi(\mathrm{tg}\,\theta)^2 H^2}[q_i(t) - q_u(t)]$$

Principio di conservazione dell'Energia (P.C.E.)

Si considera un certo volume racchiuso da una superficie



Sia E(t) l'energia totale immagazzinata nel volume all'istante t, e siano p_1, $p_2, \ldots, p_n$ le potenze che transitano attraverso la superficie di contorno, con segno positivo se entranti e segno negativo se uscenti,

P.C.E.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)$$

P.C.E.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)$$

L'espressione di E(t) deve tener conto di tutte le varie forme e contributi, fra cui ad esempio quella termica e quella meccanica (cinetica e potenziale)

Allo stesso modo, la potenza in transito può assumere varie forme:

Potenza termica in ingresso o in uscita

Potenza associate a portate fluide in ingresso o in uscita

Lavoro meccanico compiuto nell'unita di tempo sul volume o dal volume (non nulla solo se il volume di contorno è deformabile)

Potenza termica in ingresso o in uscita.
Positiva se entrante. $Q_j(t)$

Potenza associate a portate fluide in ingresso o in uscita

$w_j h_j$	Variazione energia interna	h_j=entalpia specifica del fluido
$\frac{w_j v_j^2}{2}$	Variazione energia cinetica	v_j=velocità del fluido
$g w_j z_j$	Variazione energia potenziale	z_j=quota del punto di immissione o prelievo

Lavoro meccanico compiuto nell'unita di tempo sul volume o dal volume (compare solo se la superficie di contorno è deformabile). Positivo se comporta una espansione del volume. $L_j(t)$

Si ha quindi:

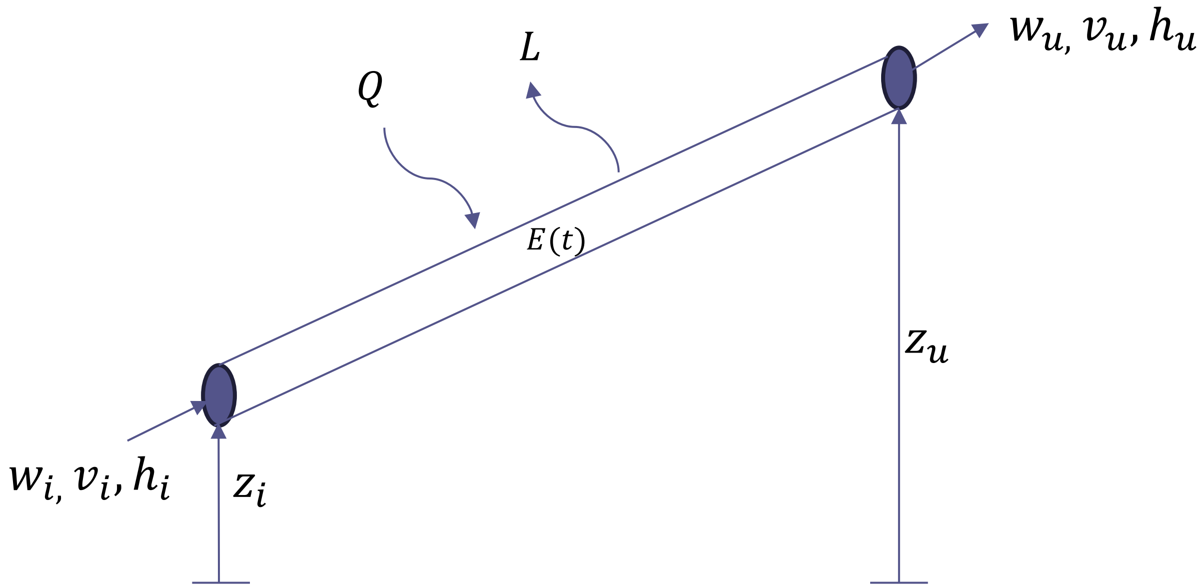
$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum Q_j - \sum L_j + \sum w_j h_j + \sum \frac{w_j v_j^2}{2} + g \sum w_j z$$

Flussi di potenza termica

Lavoro per unità di tempo

Flussi di potenza associati a portate fluide in ingresso al volume ($w_j > 0$) o in uscita dal volume ($w_j < 0$)

Es. Tratto di tubazione

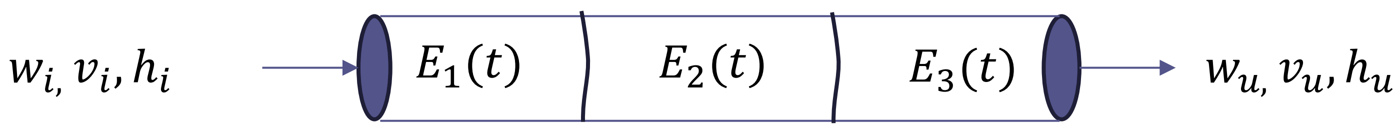


$$\frac{dE(t)}{dt} = Q - L + w_i\left(h_i + \frac{v_i^2}{2} + gz_i\right) - w_u(h_u + \frac{v_u^2}{2} + gz_u)$$

Per esprimere in maniera compatta l'energia totale nel tratto di tubazione considerato risulta conveniente riferirsi ai valori medi della variabili associate al fluido in esso contenuto

$$E(t) = M(t)\bar{h}(t) + \frac{M(t)\bar{v}^2(t)}{2} + M(t)g\bar{z}(t)$$

L'ipotesi di considerare uniforme la distribuzione di energia all'interno del volume non è sempre accettabile. In tal caso è opportuno suddividere il volume complessivo in «sotto-volumi» e applicare separatamente il PCE ai vari sotto-volumi.



$$E_j(t) = M_j(t)\bar{h}_j(t) + \frac{M_j(t)\bar{v}_j{}^2(t)}{2} + M_j(t)g\bar{z}_j(t) \qquad j = 1,2, \ldots$$

Per applicazioni in cui la temperatura del fluido (monofase e incomprimibile) nel volume di controllo è approssimativamente uniforme e l'apporto (e quindi la variazione) di energia cinetica e potenziale è trascurabile (come si verifica nei sistemi energetici in cui scambio termico e trasmissione del calore rappresentano i fenomeni dominanti) si ottiene una forma particolarmente semplice del PCE, che sfrutteremo negli esempi che saranno trattati da qui in avanti

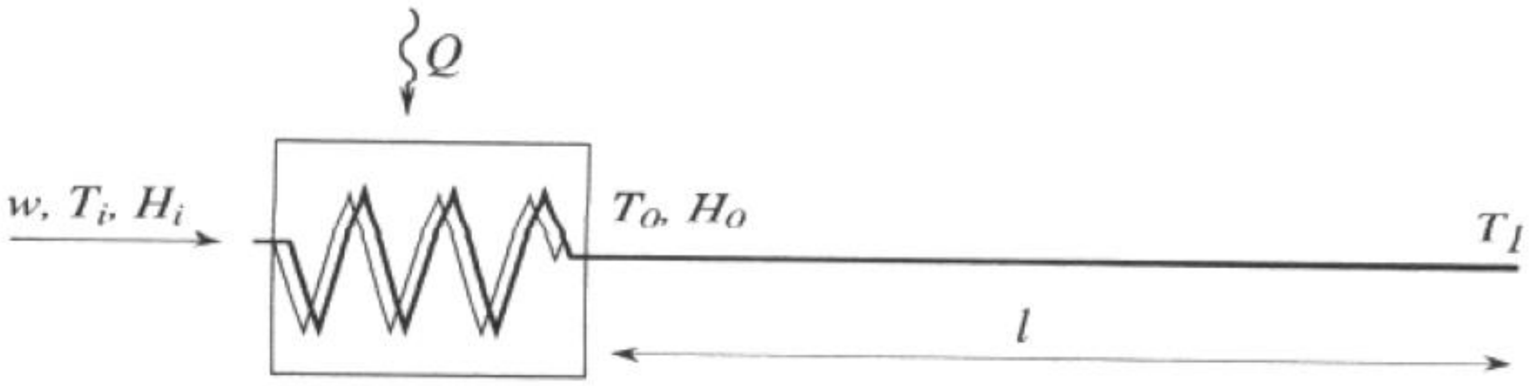
Per **fluidi monofase incomprimibili**, infatti

$$E(t) \approx m\,h(t) = mc\,T(t)$$

$$h(t) = c\,T(t)$$ $c =$ calore specifico del fluido per unità di massa

$$\boxed{mc\frac{dT(t)}{dt} = \sum Q_j + \sum w_j h_j}$$

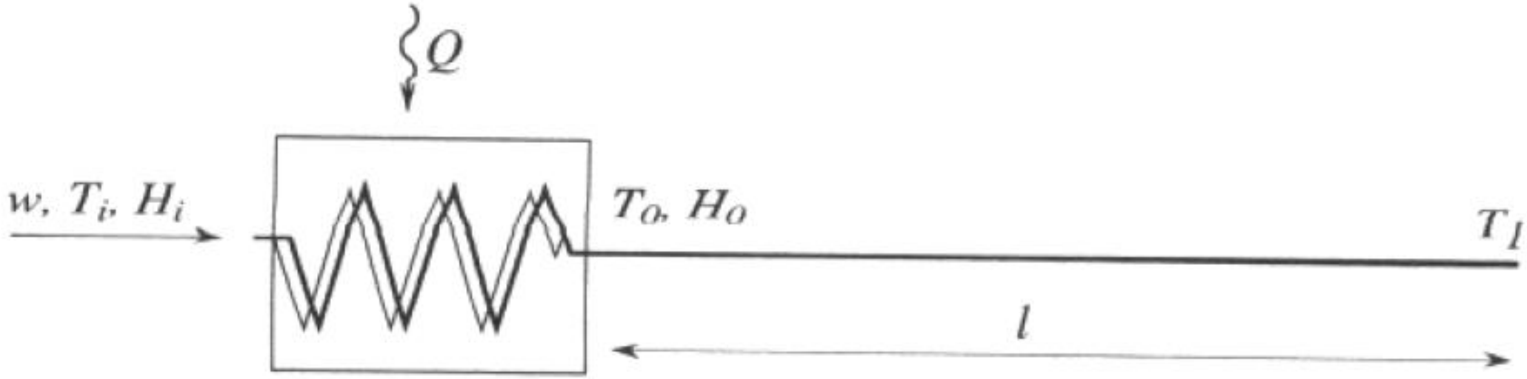
Scambiatore di calore a flusso termico imposto



Lo scambiatore è schematizzato come in Figura. Esso è percorso da un fluido che non cambia fase e incontra in uscita dallo scambiatore un lungo tratto di tubazione supposta adiabatica.

Il fluido, non comprimibile, transita nello scambiatore e nella tubazione a valle con portata massica w(t)

La temperatura e l'entalpia del fluido in ingresso allo scambiatore sono rispettivamente T_i e H_i, mentre i relativi valori di uscita sono T_o e H_o



Nel transitare all’interno dello scambiatore il fluido riceve un flusso di potenza termica Q

Quali possono essere dei contesti reali in cui si realizza un processo con caratteristiche assimilabili?

Boiler (elettrico, a gas, ecc)

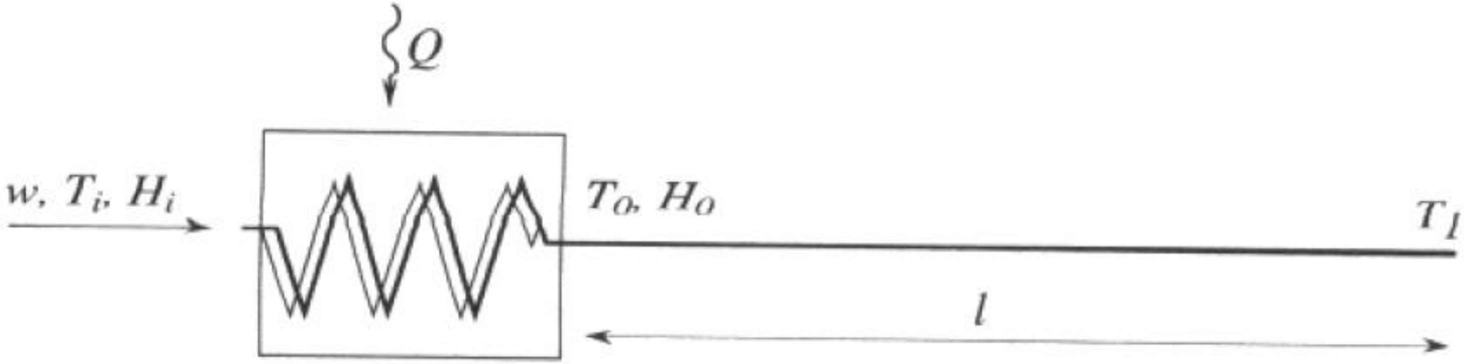
Collettore solare

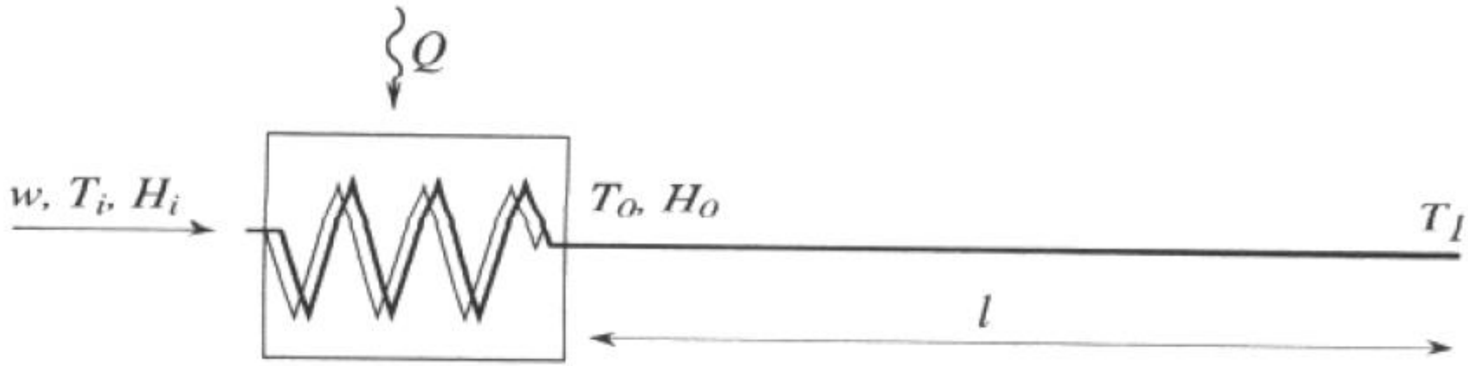
Impianto solare termodinamico (CSP)

Le variazioni di energia meccanica sono trascurabili rispetto a quelle di energia termica

In generale si desidera regolare la temperatura T_1 di uscita agendo in maniera opportuna sulla portata w del fluido (come avviene negli impianti CSP) o sulla potenza termica Q trasferita al fluido (come avviene nei boiler).

In funzione di quale sia la variabile di ingresso manipolabile del problema cambia ovviamente il modo con il quale si approccia il progetto del sistema di controllo perché cambia il legame strutturale fra ingresso manipolabile ed uscita.





Applicando il PCE alla regione in cui avviene lo scambio termico si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = P_e - P_u = wh_i + Q - wh_0$$

$$\frac{dE}{dt} = w(h_i - h_0) + Q$$

Per fluidi monofase incomprimibili:

$$h = c\,T$$

c = calore specifico del fluido per unità di massa

Se espresso in (J/(kg·K)) il calore specifico rappresenta la quantità di calore necessaria per innalzare, o diminuire, di 1 °K la temperatura di un Kg di sostanza.

Sostanza	Stato	c (J/(kg·K))
Acqua	liquido	4186
Etanolo	liquido	2460
Glicerina	liquido	2260
Mercurio	liquido	139
Olio	liquido	~ 2000

calore specifico di alcuni fluidi a T = 25°C e P = 100kPa

$$\frac{dE}{dt} = wc(T_i - T_0) + Q$$

Analisi in regime stazionario

In regime stazionario $\left(\frac{dE}{dt} = 0\right)$ si ha

$$T_0 = T_i + \frac{Q}{wc}$$

Il salto termico $T_0 - T_i$ è direttamente proporzionale a Q ed inversamente proporzionale al prodotto fra la portata w e la capacita termica del fluido. Tale relazione è utile per dimensionare lo scambiatore.

Ora dobbiamo definire l'energia totale E(t)

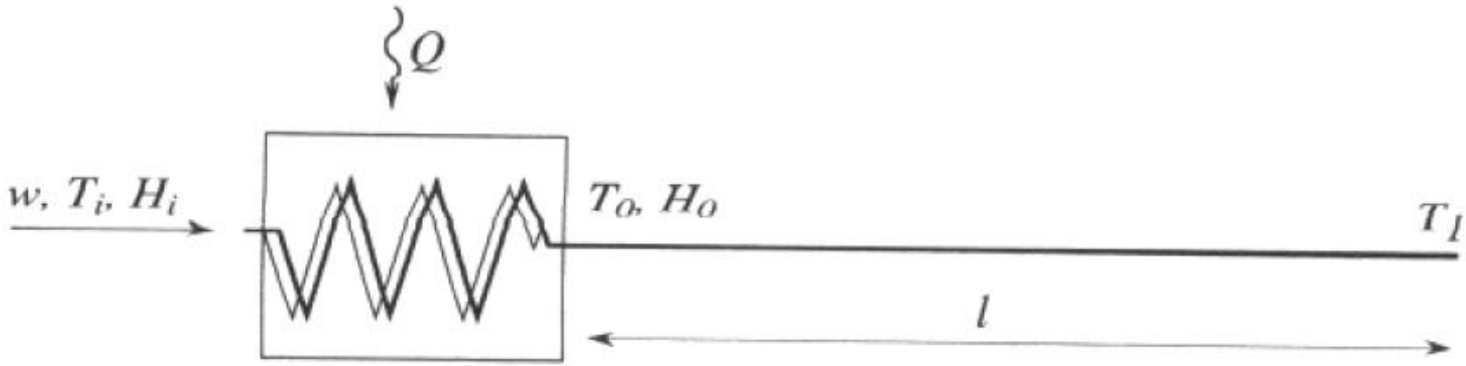
Ipotizzando che la regione in cui avviene lo scambio termico sia tale da poter considerare con ragionevole approssimazione uniforme (e pari alla temperatura T_0 in uscita) la temperatura del fluido al suo interno, si ha

$E = \mathrm{mc}T_0$ m = massa di fluido presente nella regione di scambio

$$\frac{dE}{dt} = wc(T_i - T_0) + Q$$

$$\mathrm{mc}\frac{dT_0}{dt} = wc(T_i - T_0) + Q$$

E' un modello matematico lineare ?



Va ora definito il legame che intercorre fra la temperatura T_0 all'uscita dalla regione di scambio termico e la temperatura T_1 che si registra a valle della tubazione adiabatica di lunghezza ℓ

$$T_1(t) = T_0(\mathrm{t} - \tau)$$

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{\ell}{w/\rho A} = \frac{\ell \rho A}{w} = \frac{\mathrm{M}}{w}$$

M = massa di fluido contenuta nella tubazione

Modello complessivo

$$\mathrm{mc}\frac{dT_0(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T_0(t)) + Q(t)$$

$$T_1(t) = T_0\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{M}}{w}\right)$$ ritardo temporale

m = massa di fluido presente nella regione di scambio

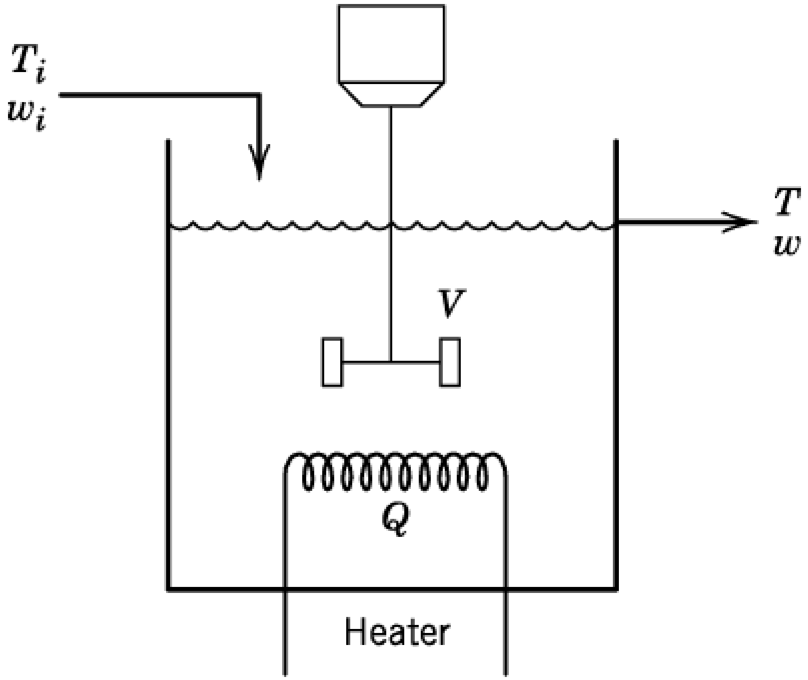
M = massa di fluido contenuta nella tubazione adiabatica di lunghezza ℓ

c = calore specifico del fluido

w = portata massica del fluido

CV Controlled variable? MV Manipulated variable? DV Disturbance variable?

Serbatoio con mescolamento e riscaldamento



Perfetta miscelazione (temperatura uniforme all'interno del serbatoio e pari a T)

wi=w (volume di fluido costante)

Densità e calore specifico costanti rispetto alla temperatura

Scambio termico con l'ambiente trascurabile

Q è la potenza termica trasferita istantaneamente al fluido dalla resistenza

Principio di conservazione dell'energia (PCE) applicato al volume di liquido contenuto nel serbatoio

$$\frac{dE}{dt} = wh_{in} + Q \; - wh_{out} = wc(T_i - T) + Q$$

$$E \; = \mathrm{mc}T$$

m = massa del liquido contenuto nel serbatoio

c = calore specifico del fluido

Modello matematico **analogo a quello ricavato nell'esempio precedente**

$$\mathrm{mc}\frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + Q(t)$$

$$\mathrm{mc}\frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + Q(t)$$

CV Controlled variable? MV Manipulated variable? DV Disturbance variable?

CV: T

MV: Q

DV: T_i

$$w(t) = cost. = W$$

Modello matematico **lineare tempo-invariante**

Come lo rappresentiamo?

Quali sono le FdT fra la MV e la CV e fra la DV e la CV?

$$\mathrm{mc}\frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + Q(t)$$

CV Controlled variable?

MV Manipulated variable?

DV Disturbance variable?

CV: T

MV: w

DVs: T_i , Q

Modello matematico **non lineare**

In una modellazione più approfondita e realistica, si potrebbe associare Q alla potenza elettrica che alimenta la resistenza e che ne varia la temperatura T_r

Ciò corrisponde al rilassamento della ipotesi che l'energia trasferita dalla resistenza al fluido possa essere regolata istante per istante.

E' più realistico considerare la resistenza come un elemento metallico avente una propria inerzia termica la cui temperatura (media) T_r è influenzata e variata da un flusso di potenza Q di natura elettrica (convertita in calore per effetto Joule) e da uno scambio termico di natura convettiva con il fluido in cui è immersa.

Applichiamo il PCE al volume del fluido.

$$\frac{dE_f}{dt} = wh_{in} - wh_{out} + Q_{rf} = wc(T_i - T) + Q_{rf}$$

Se in precedenza abbiamo inserito in questa equazione di bilancio il termine di potenza istantanea Q(t), ora dobbiamo invece inserire un termine differente, che chiamiamo Q_{rf}, che rappresenta la potenza termica scambiata fra il fluido e la resistenza.

$$\frac{dE_f}{dt} = wh_{in} - wh_{out} + Q_{rf} = wc(T_i - T) + Q_{rf}$$

La potenza termica Q_{rf} scambiata fra il fluido e la resistenza corrisponde ad un flusso di calore di natura convettiva

$$Q_{rf} = K_e A_m (T_r - T)$$

in cui:

K_e è il coefficiente di scambio termico convettivo per unità di superficie

A_m è la superficie di scambio

$E_f = \mathrm{mc}T$

m = massa del liquido contenuto nel serbatoio

c = calore specifico del fluido

$$\frac{dE_f}{dt} = mc\frac{dT}{dt} = wc(T_i - T) + K_e A_m (T_r - T)$$

Applichiamo il PCE alla resistenza metallica.

$$\frac{dE_m}{dt} = Q \; - Q_{rf}$$

Q è la potenza elettrica dissipata nella resistenza

$E_m = \mathrm{m_r c_r} T_r$

m_r = massa della resistenza metallica

$\mathrm{c_r}$ = calore specifico del metallo

$$\mathrm{m_r c_r} \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - \mathrm{K_e A_m}(T_r(t) - T(t))$$

Modello complessivo

$$\mathrm{mc}\frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + \mathrm{K_e A_m}(T_r(t) - T(t))$$

$$\mathrm{m_r c_r}\frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - \mathrm{K_e A_m}(T_r(t) - T(t))$$

m = massa del liquido contenuto nel serbatoio

c = calore specifico del fluido

A_m = superfice della resistenza a contatto con il fluido

K_e = coefficiente di scambio termico convettivo resistenza/fluido per unità di superficie

m_r = massa della resistenza metallica

$\mathrm{c_r}$ = calore specifico del metallo

$$\mathrm{mc}\frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + \mathrm{K_e A_m}(T_r(t) - T(t))$$

$$\mathrm{m_r c_r}\frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - \mathrm{K_e A_m}(T_r(t) - T(t))$$

Modello costituito da due equazioni differenziali fra loro accoppiate.

Se $w(t) = cost.$ esso risulta essere un modello lineare

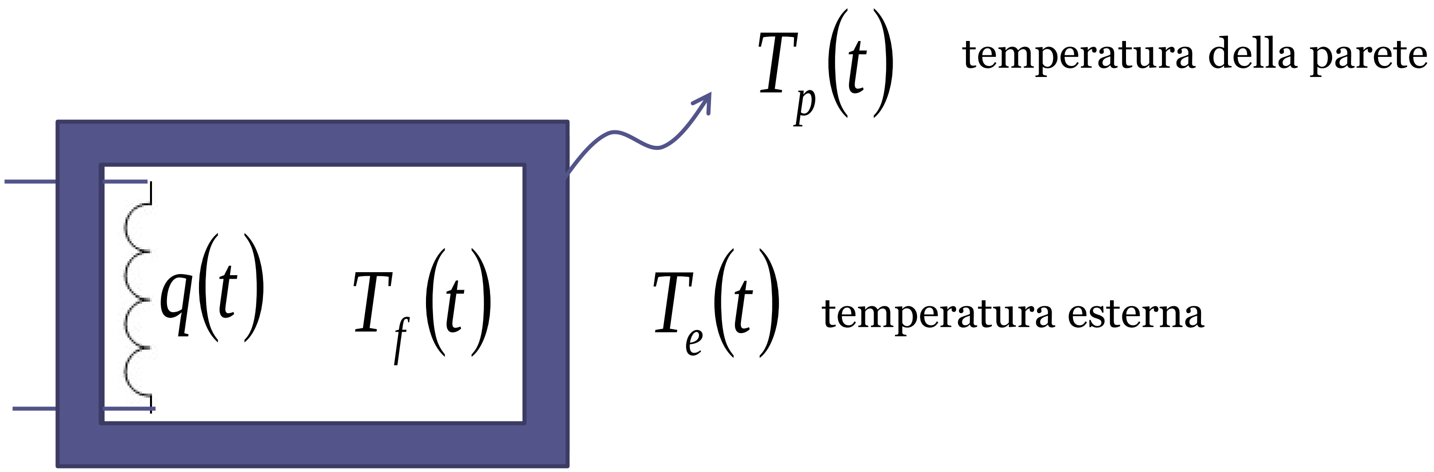
Hp: coibentazione perfetta , wi=w

Come si modifica il modello se si include lo scambio termico con l'esterno o una discrepanza fra le portate in ingresso e in uscita?

Come determinare la funzione di trasferimento fra la potenza di ingresso Q(t) (MV) e la temperatura T del fluido (CV) ? E quella fra la variabile disturbante (DV) e la CV ?

Modello matematico di un boiler

Trattiamo in maniera distinta gli accumuli termici nel fluido contenuto nel volume e nella parete di contorno.
Definiamo quindi un modello che oltre alla temperatura Tf del fluido caratterizzi anche l'evoluzione temporale della temperatura Tp(t) di contorno



cf [J/K] è la capacita termica specifica del fluido interno al volume
cp [J/K] è la capacita termica specifica del materiale che costituisce la parete

Spf [J/K s] è il coefficiente di scambio termico tra il fluido contenuto nel volume e la parete.
Spe [J/K s] è il coefficiente di scambio termico tra la parete e l'aria esterna.

Modello matematico (LTI)

$$\mathrm{M_f c_f} \frac{dT_f(t)}{dt} = q(t) \; + \mathrm{S_{pf}} \left(T_p(t) - T_f(t)\right)$$

$$\mathrm{M_p c_p} \frac{dT_p(t)}{dt} = \mathrm{S}_{pe} \; \left(T_e(t) - T_p(t)\right) - \mathrm{S_{pf}} \left(T_p(t) - T_f(t)\right)$$

A_{pf} = superfice della parete a contatto con il fluido

K_{pf} = coefficiente di scambio termico convettivo parete/fluido per unità di superficie

$$\mathrm{S_{pf}} = A_{pf} \; K_{pf}$$

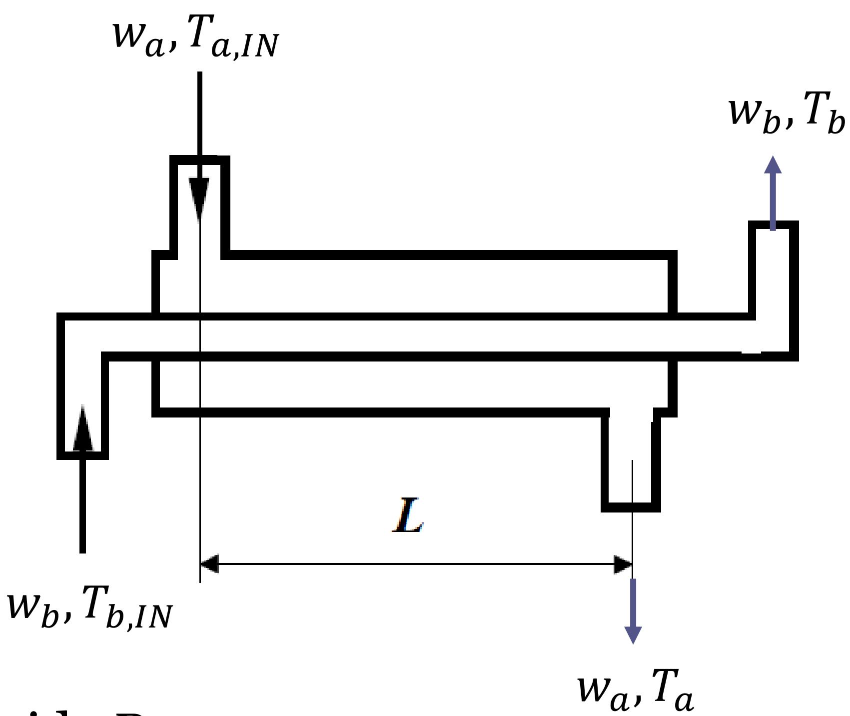
A_{pe} = superfice della parete a contatto con l’aria esterna a temperatura ambiente

K_{pe} = coefficiente di scambio termico convettivo parete/aria per unità di superficie

$$\mathrm{S_{pe}} = A_{pe} \; K_{pe}$$

Scambiatore di calore in equicorrente

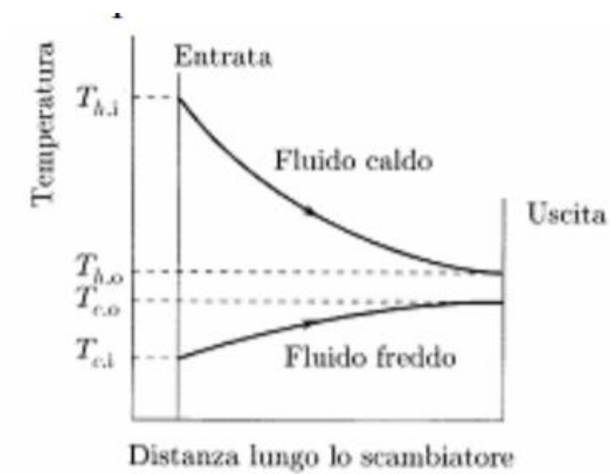
Fluido A: aria fredda



Fluido B: acqua calda di processo

L’acqua calda di processo (fluido B) percorre le tubazioni interne con portata w_b mentre lungo il mantello viene immessa aria (fluido A) con portata w_a

Lo scambiatore opera con flussi in **equicorrente**



PCE applicato al fluido di processo (fluido B)

$$\mathrm{m_b c_b}\frac{dT_b(t)}{dt} = w_b\, h_{b,in} - w_b h_{b,out} - Q_{ba}$$

$$= w_b c_b \left(T_{b,IN} - T_b(t)\right) - Q_{ba}$$

$\mathrm{m_b}$ =massa di acqua nella tubazione dello scambiatore $= \rho_b L\, \pi r^2$

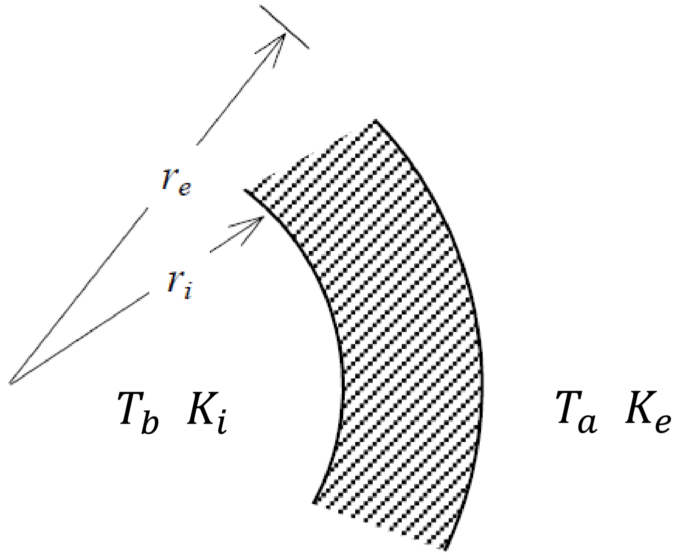
$\mathrm{c_b}$ = calore specifico dell'acqua $= 4186 \dfrac{J}{kg\, °K}$ a 25°C e 100 kPa

La potenza termica Q scambiata tra due fluidi mantenuti a temperatura costante T_b (fluido caldo) e T_a(fluido freddo), separati da una parete solida, è data da:

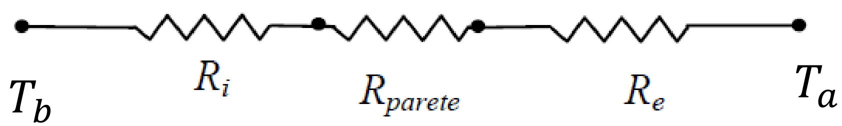
$$Q = \frac{T_b - T_a}{R_{ba}}$$

dove R_{ba} è la **resistenza termica globale [°K/W]**

parete di separazione cilindrica



R_{ba} è la resistenza termica complessiva che tiene conto sia degli scambi di natura convettiva lato aria e lato acqua che degli scambi conduttivi associati alla parete metallica della tubazione



$$R_{ba} = \frac{1}{K_i A_i} + \frac{1}{K_e A_e} + R_{parete}$$

Scambio conduttivo parete metallica

$$R_{parete} = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\,\pi L\ K}$$

Scambio convettivo lato acqua

Scambio convettivo lato aria

K è la conducibilità termica del materiale che costituisce la parete metallica

Nel modellare uno scambiatore di calore, ipotizzare che $Q_{ba} = Q = \frac{T_b - T_a}{R_{ba}}$ può costituire una assunzione eccessivamente grossolana alla luce del fatto che le temperature dei fluidi, ed in particolare il relativo salto termico, variano in maniera significativa nel percorso dall'ingresso all'uscita dello scambiatore.

Si dimostra che una espressione maggiormente adeguata deve tener conto delle temperature di ingresso e di uscita dei fluidi secondo una particolare media logaritmica che rimpiazza il «semplice» salto termico in uscita $\Delta T_{ba} = T_b - T_a$

Per uno scambiatore che opera in equicorrente tale media logaritmica ΔT_{ba}^{ML} assume la seguente forma:

$$\Delta T_{ba}^{ML} = \frac{\Delta T_{in} - \Delta T}{\ln(\Delta T_{in}/\Delta T)} \qquad \begin{aligned} \Delta T_{in} &= T_{b,IN} - T_{a,IN} \\ \Delta T &= T_b - T_a \end{aligned}$$

Si ha quindi la seguente espressione per la potenza termica Q_{ba} scambiata tra i due fluidi:

$$Q_{ba} = \frac{\Delta T_{ba}^{ML}}{R_{ba}} = \frac{1}{R_{ba}} \cdot \frac{\left(T_{b,IN} - T_{a,IN}\right) - (T_b - T_a)}{\ln((T_{b,IN} - T_{a,IN})/(T_b - T_a))}$$

$$\mathrm{m_b c_b}\frac{dT_b(t)}{dt} = w_b c_b\left(T_{b,IN} - T_b(t)\right) - \frac{1}{R_{ba}} \cdot \frac{\left(T_{b,IN} - T_{a,IN}\right) - (T_b(t) - T_a(t))}{\ln((T_{b,IN} - T_{a,IN})/(T_b(t) - T_a(t))}$$

PCE applicato al fluido nel mantello (aria, fluido A)

$$\mathrm{m_a c_a}\frac{dT_a(t)}{dt} = w_a c_a\left(T_{a,IN} - T_a(t)\right) + \frac{1}{R_{ba}} \cdot \frac{\left(T_{b,IN} - T_{a,IN}\right) - (T_b(t) - T_a(t))}{\ln((T_{b,IN} - T_{a,IN})/(T_b(t) - T_a(t))}$$

$\mathrm{m_a}$ =massa di aria nel mantello

c_a =calore specifico dell'aria

Modello dinamico complessivo (scambiatore in equicorrente)

$$\mathrm{m_a c_a}\frac{dT_a(t)}{dt} = c_a w_a(t)\left(T_{a,IN} - T_a(t)\right) + \frac{1}{R_{ba}}\cdot\frac{\left(T_{b,IN} - T_{a,IN}\right) - (T_b(t) - T_a(t))}{\ln((T_{b,IN} - T_{a,IN})/(T_b(t) - T_a(t))}$$

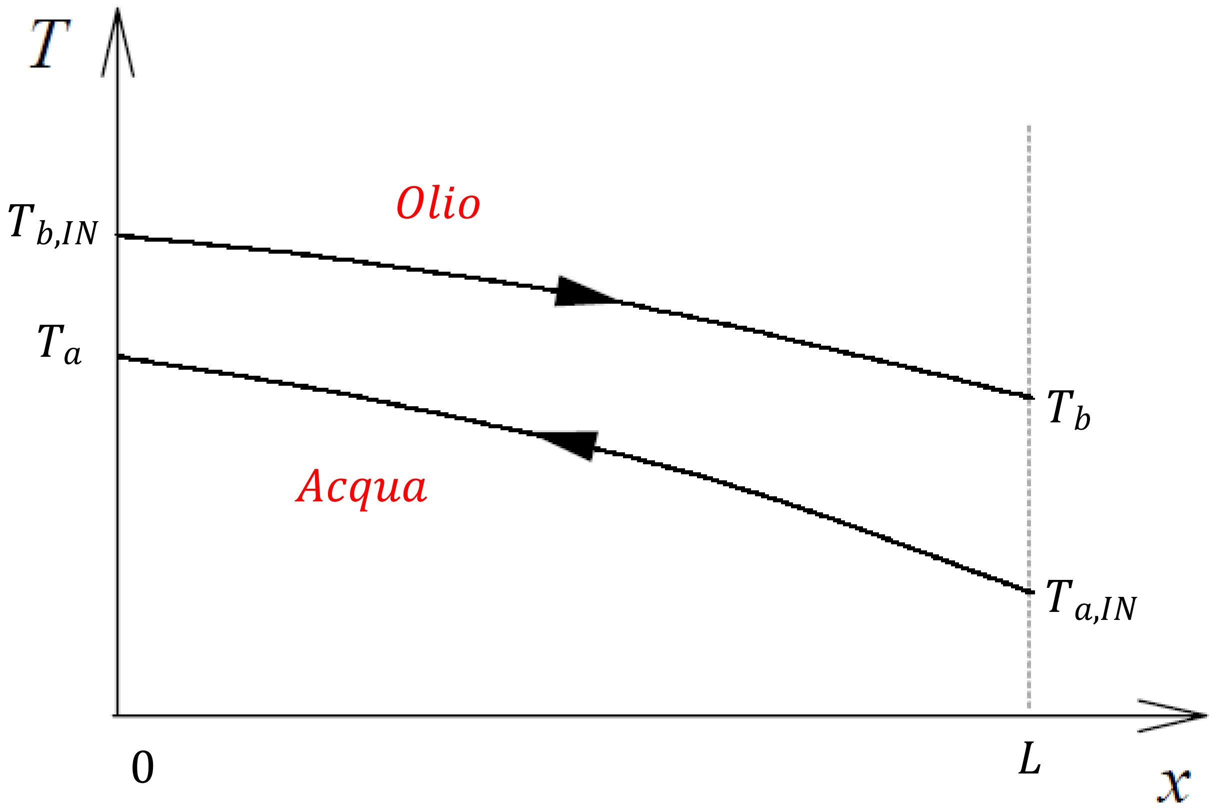
$$\mathrm{m_b c_b}\frac{dT_b(t)}{dt} = c_b w_b(t)\left(T_{b,IN} - T_b(t)\right) - \frac{1}{R_{ba}}\cdot\frac{\left(T_{b,IN} - T_{a,IN}\right) - (T_b(t) - T_a(t))}{\ln((T_{b,IN} - T_{a,IN})/(T_b(t) - T_a(t))}$$

NB la precedente espressione del modello si riferisce ad uno scambiatore che opera in **equicorrente**

Per uno scambiatore che opera in **controcorrente**, la media logaritmica che compare nel termine di scambio Q_{ba} si valuta in maniera differente

$$Q_{ba} = \frac{\Delta T_{ba}^{ML}}{R_{ba}} \qquad \Delta T_{ba}^{ML} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)} \qquad \begin{aligned}\Delta T_1 &= T_{b,IN} - T_a \\ \Delta T_2 &= T_b - T_{a,IN}\end{aligned}$$

Scambiatore che opera in **controcorrente**



Modello dinamico di uno scambiatore in controcorrente

$$\mathrm{m_a c_a}\frac{dT_a(t)}{dt} = c_a w_a(t)\left(T_{a,IN} - T_a(t)\right) + \frac{1}{R_{ba}} \cdot \frac{\left(T_{b,IN} - T_a\right) - \left(T_b(t) - T_{a_{IN}}(t)\right)}{\ln((T_{b,IN} - T_a(t)\ /(T_b(t) - T_{a,IN}))}$$

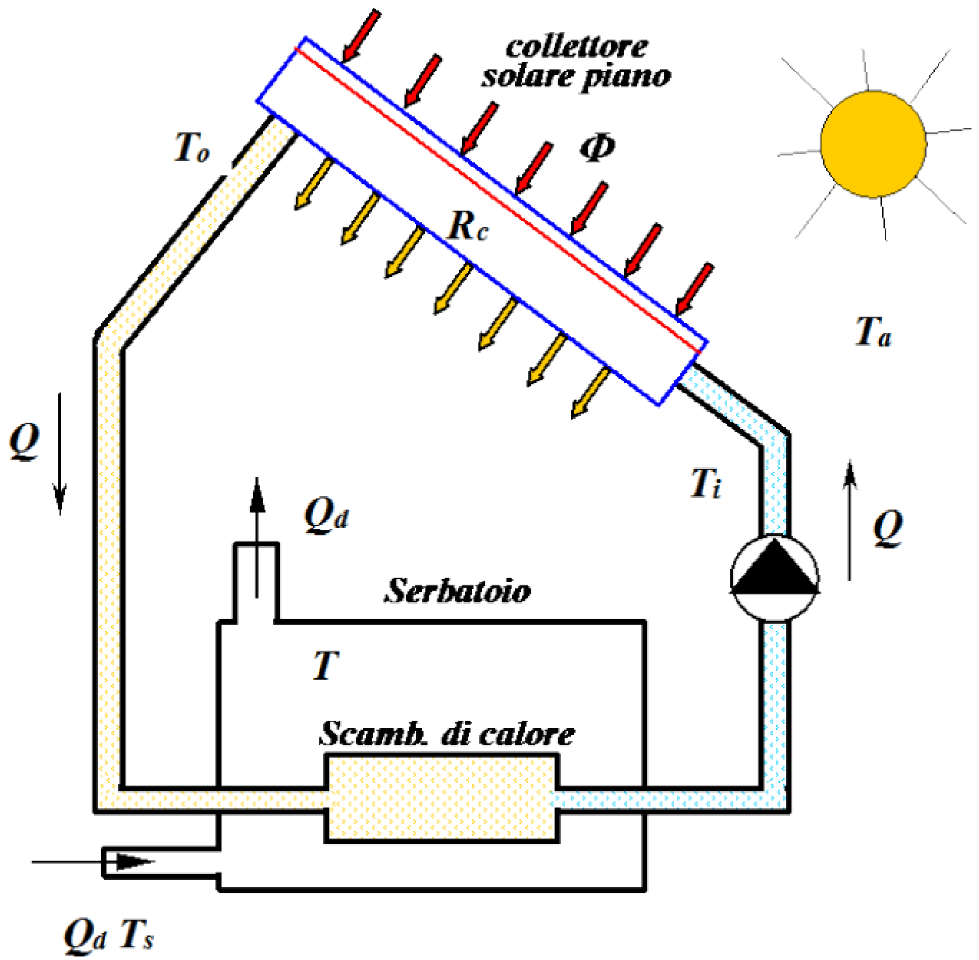
$$\mathrm{m_b c_b}\frac{dT_b(t)}{dt} = c_b w_b(t)\left(T_{b,IN} - T_b(t)\right) - \frac{1}{R_{ba}} \cdot \frac{\left(T_{b,IN} - T_a\right) - \left(T_b(t) - T_{a_{IN}}(t)\right)}{\ln((T_{b,IN} - T_a(t)\ /(T_b(t) - T_{a,IN}))}$$

$$\Delta T_{ba}^{ML} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)}$$

$$\Delta T_1 = T_{b,IN} - T_a$$
$$\Delta T_2 = T_b - T_{a,IN}$$

Quando $\Delta T_1 = \Delta T_2$ la media logaritmica non è definita. Idee?

Collettore solare piano accoppiato ad un serbatoio di ACS



Si consideri il sistema in figura che utilizza un collettore solare piano per il riscaldamento dell'acqua.

L'impianto si compone sostanzialmente di tre elementi: il serbatoio, il collettore solare, e lo scambiatore di calore

Q, Q_d portate volumetriche

PCE applicato al serbatoio

Il volume V di acqua nel serbatoio si mantiene costante

$$\frac{dE_s(t)}{dt} = \rho_{\mathrm{w}} Q_d c_{\mathrm{w}} T_s + \rho_p Q\ c_p \mathrm{T_0} - \rho_{\mathrm{w}} Q_d c_{\mathrm{w}} T - \rho_p Q\ c_p T_i$$

Potenze associate a portate fluide in ingresso

Potenze associate a portate fluide in uscita

ρ_{w}= densità dell'acqua

ρ_{p}= densità del fluido termovettore che circola nel collettore

c_{w}= calore specifico dell'acqua

c_{p}= calore specifico del fluido termovettore che circola nel collettore

$E_s(t) = c_{\mathrm{w}} \rho_{\mathrm{w}} \mathrm{V\ T(t)}$

ρ_{w}V =massa acqua nel serbatoio

Raccogliendo e riordinando si ottiene:

$$c_w \rho_w V \frac{dT(t)}{dt} = -c_w \rho_w Q_d (T - T_s) + c_p \rho_p Q (T_o - T_i)$$

PCE applicato al collettore

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \rho_p Q \, c_p \mathrm{T_i} - \rho_p Q \, c_p T_o + Q_U$$

Potenza associata alla portata fluida in ingresso

Potenza associata alla portata fluida in uscita

$\mathrm{Q_U}$ = potenza associata alla radiazione solare captata dal collettore e ceduta al fluido termovettore al netto delle perdite dovute allo scambio termico con l’ambiente esterno

Formula di Hottel-Bliss-Whillier:

$$Q_U = A_c F_R \left[\Phi - \frac{T_i - T_a}{A_c R_c}\right] = A_c F_R[\Phi - U_L(T_i - T_a)] \qquad U_L = \frac{1}{A_c R_c}$$

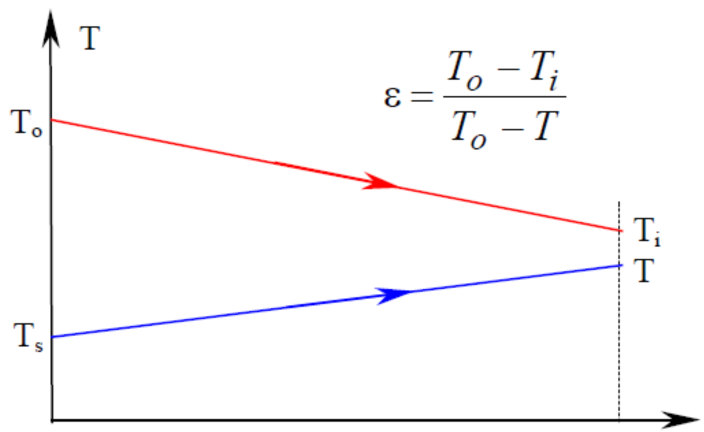
Φ è la radiazione solare assorbita dal collettore ed espressa come potenza per unità di superficie, A_c è la superficie del collettore, F_R è il **fattore di rimozione del calore** (valori tipici 0.8 $\div$ 0.95) ed R_c è la resistenza termica globale fra la piastra e l'aria.

$$E_c(t) = c_p \rho_p V_c T_0(t)$$

Sostituendo e riordinando:

$$c_p \rho_p V_c \frac{dT_0(t)}{dt} = c_p \rho_p Q(T_i - T_o) + A_c F_R[\Phi - U_L(T_i - T_a)]$$

Per caratterizzare lo scambiatore acqua – fluido termovettore ricorriamo alla relazione che ne esprime l'efficienza in stato stazionario



$$T_i = T_o(1 - \varepsilon) + \varepsilon\, T$$

Acqua

Fluido termovettore

$\varepsilon = 1$ Caso limite ideale: la temperatura T dell'acqua nel serbatoio e la temperatura T_i del fluido termovettore all'uscita dallo scambiatore sono coincidenti. Nella realtà $T < T_i$

Modello ricavato fino ad ora

$$c_w \rho_w V \frac{dT(t)}{dt} = -c_w \rho_w Q_d (T - T_s) + c_p \rho_p Q (T_o - T_i) \qquad (1)$$

$$c_p \rho_p V_c \frac{dT_0(t)}{dt} = c_p \rho_p Q (T_i - T_o) + A_c F_R [\Phi - U_L (T_i - T_a)] \qquad (2)$$

$$T_i = T_o (1 - \varepsilon) + \varepsilon\, T \qquad (3)$$

L'equazione (2) è «ridondante» stante il fatto che il transitorio di adeguamento della temperatura del fluido nel collettore è molto più rapido rispetto a quello della temperatura dell'acqua nel serbatoio, molto più capiente, che pertanto «domina» il processo.

Possiamo quindi imporre lo stato stazionario per la (2), azzerandone il membro destro

$$c_p \rho_p V_c \frac{dT_0(t)}{dt} = c_p \rho_p Q(T_i - T_o) + A_c F_R[\Phi - U_L(T_i - T_a)] = 0$$

$$A_c F_R[\Phi - U_L(T_i - T_a)] = c_p \rho_p Q(T_0 - T_i) \qquad (4)$$

Sulla base di questa approssimazione, il flusso di potenza termica netto in ingresso al serbatoio coincide pertanto istante per istante con la potenza captata dal collettore e ceduta al fluido termovettore al netto delle perdite

Sviluppando la (4):

$$A_c F_R[\Phi - U_L(T_i - T_a)] = c_p \rho_p Q(T_0 - T_i)$$

$$c_p \rho_p Q T_0 = c_p \rho_p Q T_i + A_c F_R\, \Phi - A_c F_R\, U_L\, T_i + A_c F_R\, U_L\, T_a$$

$$= \left[c_p \rho_p Q - A_c F_R\, U_L\right] T_i + A_c F_R\, \Phi + A_c F_R\, U_L\, T_a$$

$$T_i = \mathrm{T_o}(1 - \varepsilon) + \varepsilon\, T$$

$$\left[c_p \rho_p Q \varepsilon + A_c F_R\, U_L(1 - \varepsilon)\right] T_0 = A_c F_R\, \Phi + \mathrm{T}\, \varepsilon\left[c_p \rho_p Q - A_c F_R\, U_L\right] + A_c F_R\, U_L \mathrm{T_a}$$

$$T_0 = \frac{A_c F_R\, \Phi + \mathrm{T}\, \varepsilon\left[c_p \rho_p Q - A_c F_R\, U_L\right] + A_c F_R\, U_L \mathrm{T_a}}{c_p \rho_p Q \varepsilon + A_c F_R\, U_L(1 - \varepsilon)} = f_0(T, \Phi, T_a, Q; \varepsilon) \qquad (5)$$

Nella eq. (1)

$$c_w \rho_w V \frac{dT(t)}{dt} = -c_w \rho_w Q_d (T - T_s) + \ c_p \rho_p Q (T_o - T_i)$$

Possiamo sostituire $(T_o - T_i) = \varepsilon (T_o - T)$

$$c_w \rho_w V \frac{dT(t)}{dt} = -c_w \rho_w Q_d (T - T_s) + \ c_p \rho_p Q \varepsilon (T_o - T) \qquad (6)$$

Il modello dinamico finale del sistema è ottenuto dall'accoppiamento fra la equazione (6) e la relazione (5) $T_0 = f_0(T, \Phi, T_a, Q; \varepsilon)$:

$$c_w \rho_w V \frac{dT(t)}{dt} = -c_w \rho_w Q_d (T - T_s) + \ c_p \rho_p Q \varepsilon (T_o - T)$$

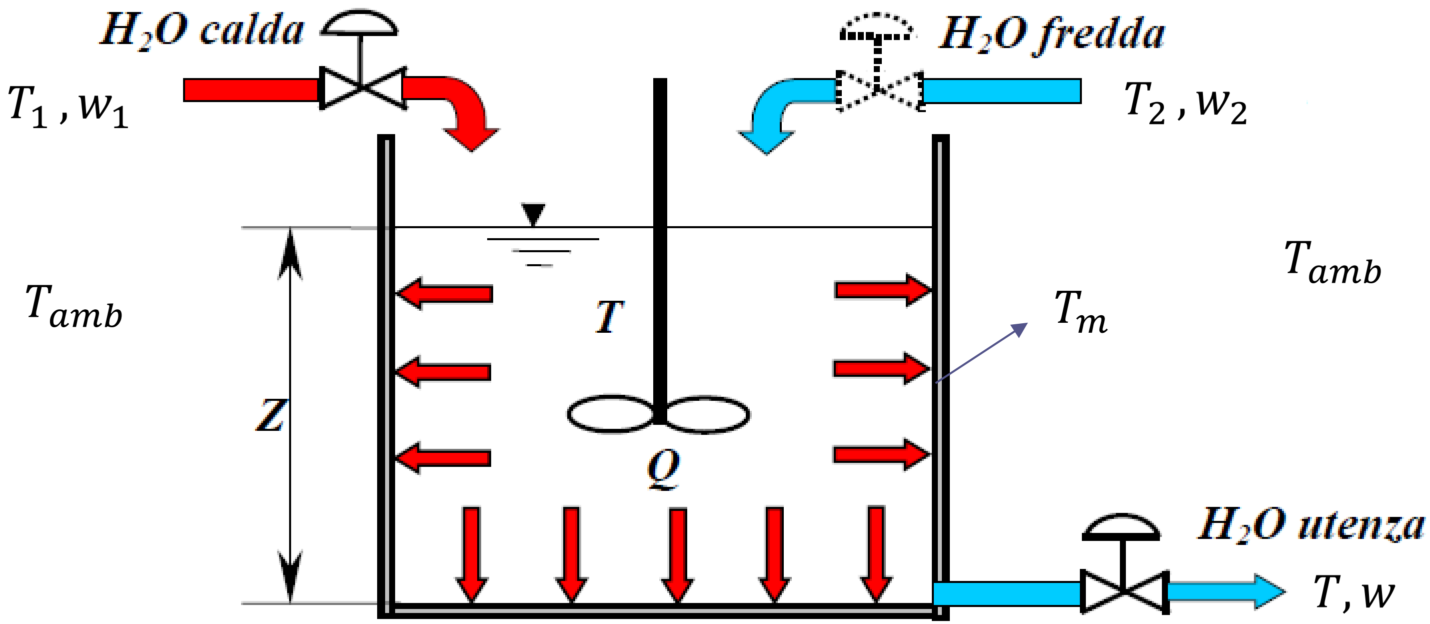
$$T_0 = f_0(T, \Phi, T_a, Q; \varepsilon)$$

Integrazione con una resistenza elettrica per sopperire alla carenza di una sufficiente radiazione solare

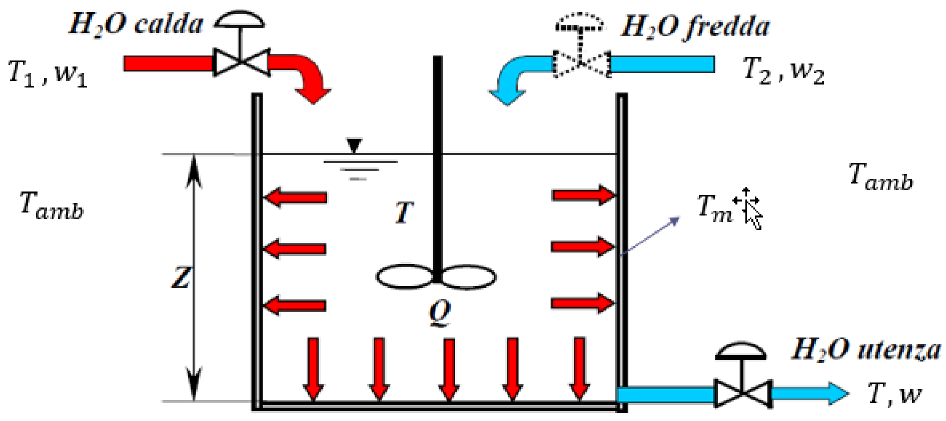
$$c_{\mathrm{w}}\rho_{\mathrm{w}}\mathrm{V}\frac{dT(t)}{dt} = -c_{\mathrm{w}}\rho_{\mathrm{w}}Q_d(T - T_s) + \ c_p\rho_p Q\varepsilon(T_o - T) + \mathrm{Q}_{aux}$$

$$T_0 = f_0(T, \Phi, T_a, Q; \varepsilon)$$

Miscelatore



Si consideri il sistema rappresentato in figura costituito da un serbatoio nel quale vengono miscelate fra loro due portate di un fluido (acqua) a diversa temperatura, realizzando uno scambio termico per convezione all'interno del miscelatore grazie anche all'azione continua dell'agitatore che permette di ottenere una temperatura della miscela uniforme



Parete del serbatoio a temperatura uniforme T_m

Temperatura del fluido interno al serbatoio uniforme T

Q rappresenta la potenza termica scambiata fra il fluido nel serbatoio e le pareti dello stesso

z rappresenta il livello del fluido nel serbatoio in generale variabile nel tempo in funzione dello squilibrio fra le portate w_1 e w_2 in ingresso e la portata w in uscita

L'utenza deve essere servita con un fluido avente temperatura predefinita T_{des} e con portata w arbitraria, eventualmente tempovariante

PCE applicato al volume di fluido nel serbatoio

$$\frac{dE_s(t)}{dt} = \sum P_e - \sum P_u - Q$$

$E_s(t)$ energia totale del fluido contenuto nel serbatoio

$\sum P_e$ flusso di potenza associato ai fluidi in ingresso

$\sum P_u$ flusso di potenza associato ai fluidi in uscita

$$\frac{dE_s(t)}{dt} = w_1 h_1 + w_2 h_2 - w h_u - Q$$

$w_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}$ portate massiche dei fluidi

$h_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_\mathrm{u}$ entalpie dei fluidi

Q rappresenta lo scambio termico di natura convettiva fra il fluido contenuto nel serbatoio e la parete dello stesso

$$Q = \frac{T - T_m}{R} \qquad\qquad R = \frac{1}{h\, A_m}$$

h è il coefficiente di scambio termico convettivo liquido-parete, per unità di superficie

A_m è la superfice della parete a contatto con il fluido

A_m dipende dal livello di riempimento del serbatoio

$$A_m = A_m(z) = P\, z$$

$z = z(t)$ livello nel serbatoio

P perimetro della base

$$Q = \frac{T - T_m}{R} = h\, A_m(T - T_m) = hP\, z(T - T_m)$$

$$E_s(t) = m_f C_V T$$

$$m_f = massa\ di\ fluido\ nel\ serbatoio$$

$$C_V = calore\ specifico\ del\ fluido\ nel\ serbatoio$$

$$T = temperatura\ del\ fluido\ nel\ serbatoio$$

$$m_f = \rho V = \rho A\ z$$

$$V = volume\ di\ fluido\ nel\ serbatoio$$

$$A = sezione\ orizzontale\ del\ serbatoio$$

$$V = Az$$

$$E_s(t) = \rho A C_V z T$$

PCE applicato alla parete del serbatoio

$$\frac{dE_p(t)}{dt} = Q + \frac{\left(T_{amb}(t) - T_m(t)\right)}{R_{ma}}$$
$$= hP\, z(\mathrm{t})(T(t) - T_m(t)) + \frac{\left(T_{amb}(t) - T_m(t)\right)}{R_{ma}}$$

R_{ma} rappresenta la resistenza termica globale nello scambio termico fra la parete e l'ambiente

$$E_p(t) = m_m C_{Vm} T_m(\mathrm{t})$$

$$m_m = massa\ della\ parete\ serbatoio$$

$$C_V = calore\ specifico\ parete\ serbatoio$$

$$T_m = temperaturaparete\ serbatoio$$

PCM

$$\frac{dm_f(t)}{dt} = w_1 + w_2 - w$$

$$m_f(t) = massa\ di\ fluido\ nel\ serbatoio$$

$$\mathrm{m_f}(t) = \rho V(t) = \rho A z(t)$$

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_1 + w_2 - w$$

Riassunto equazioni di conservazione

$$\frac{d[\rho A C_V z(t) T(t)]}{dt} = w_1 C_V T_1(t) + w_2 C_V T_2(t) - w C_V T(t) - hP\, z(T(t) - T_m(\mathrm{t}))$$

$$\frac{d[m_m C_{Vm} T_m(\mathrm{t})]}{dt} = hP\, z(\mathrm{t})(T(t) - T_m(t)) + \frac{\left(T_{amb}(t) - T_m(t)\right)}{R_{ma}}$$

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_1 + w_2 - w$$

Sviluppo dei conti

$$\frac{d[\rho A C_V z(t) T(t)]}{dt} = \rho A C_V T(t) \frac{d[z(t)]}{dt} + \rho A C_V z(t) \frac{d[T(t)]}{dt}$$

$$= C_V T(t)[w_1 + w_2 - w] + \rho A C_V z(t) \frac{d[T(t)]}{dt}$$

$$C_V T(t)[w_1 + w_2 - \cancel{w}] + \rho A C_V z(t) \frac{d[T(t)]}{dt} = w_1 C_V T_1(t) + w_2 C_V T_2(t) - \cancel{w C_V T(t)} - hP\, z(T(t) - T_m(\mathrm{t}))$$

$$\Downarrow$$

$$C_V T(t)[w_1 + w_2] + \rho A C_V z(t) \frac{d\,T(t)}{dt} = w_1 C_V T_1(t) + w_2 C_V T_2(t) \; - hP\, z(T(t) - T_m(\mathrm{t}))$$

$$\Downarrow$$

$$\rho A C_V z(t) \frac{dT(t)}{dt} = -w_1 C_V T(t) - w_2 C_V T(t) + w_1 C_V T_1(t) + w_2 C_V T_2(t) \; - hP\, z(T(t) - T_m(\mathrm{t}))$$

$$= w_1 C_V \big(T_1(t) - T(t)\big) + w_2\, C_V \big(T_2(t) - T(t)\big) - hP\, z(T(t) - T_m(\mathrm{t}))$$

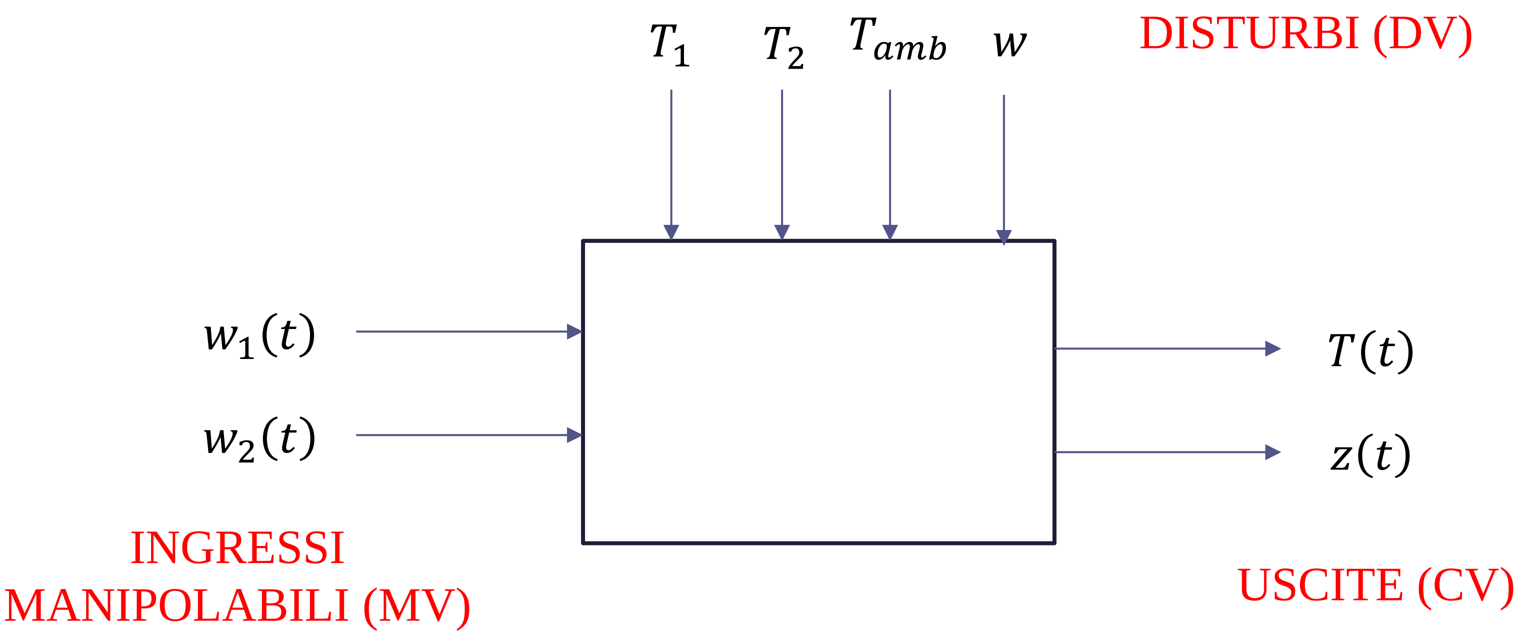
$$\frac{d[m_m C_{Vm} T_m(\mathrm{t})]}{dt} = m_m C_{Vm} \frac{dT_m(\mathrm{t})}{dt} = hP\, z(\mathrm{t})(T(t) - T_m(t)) + \frac{\big(T_{amb}(t) - T_m(t)\big)}{R_{ma}}$$

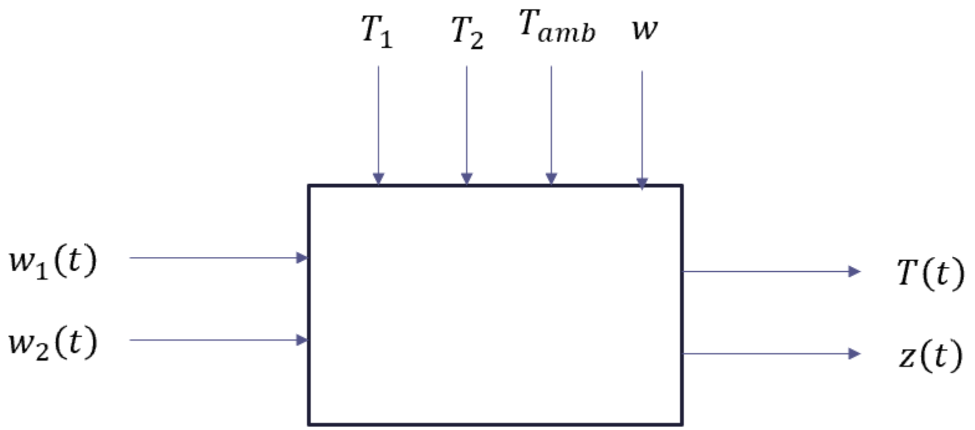
Modello complessivo

$$\rho\, C_V A\, z(t)\,\frac{dT(t)}{dt} = w_1(t) C_V\big(T_1 - T(t)\big) + w_2(t) C_V\big(T_2 - T(t)\big) - hPz(t)\,\big(T(t) - T_m(t)\big)$$

$$M_m\, C_{Vm}\,\frac{dT_m(t)}{dt} = hPz(t)\,\big(T(t) - T_m(t)\big) + \frac{\big(T_{amb}(t) - T_m(t)\big)}{R_{ma}}$$

$$\rho\, A\,\frac{dz(t)}{dt} = w_1(t) + w_2(t) - w(t)$$





Possibile problema di controllo

Si desidera mantenere costante la temperatura T del fluido miscelato che viene inviato all'utenza (con portata w arbitraria) e mantenere nel contempo costante il livello z nel serbatoio.

Si potrebbe ipotizzare di variare istante per istante la portata $w_1(t)$ del fluido caldo per regolare T, e di variare invece la portata $w_2(t)$ del fluido freddo per regolare z

Perché non il contrario? Usare dei loop singoli è la soluzione migliore ?

Accoppiamento fra piu ingressi e piu uscite – sistema MIMO