



Università degli Studi di Cagliari

Fisica 1

Corso di Laurea in Matematica

Prof. Mariano Cadoni

N.B.:

- «E' vietata la copia, la rielaborazione, la riproduzione in qualsiasi forma dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni»
- «E' inoltre vietata la diffusione, la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzate espressamente dall'autore o da Unica»

Vettori, Scalari (tensori):

Grandezze Scalari:

Sono grandezze, come ad esempio la massa, che sono caratterizzate, una volta scelta l'unità di misura, da un numero REALE.

Esempio:

Massa $m = 7,3 \text{ Kg}$

Volume $V = 1,45 \text{ m}^3$

Grandezze Vettoriali:

Sono grandezze, come ad esempio gli **spostamenti**, che sono caratterizzate, una volta scelta l'unità di misura, da:

- Direzione
- Verso
- Modulo (o Intensità)

Grandezze caratterizzate da un indice: $F_i = (F_x F_y F_z)$

Esempio:

Spostamento $\vec{S} \rightarrow 2,1 \text{ m}$

Velocità $\vec{v} \rightarrow 4,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

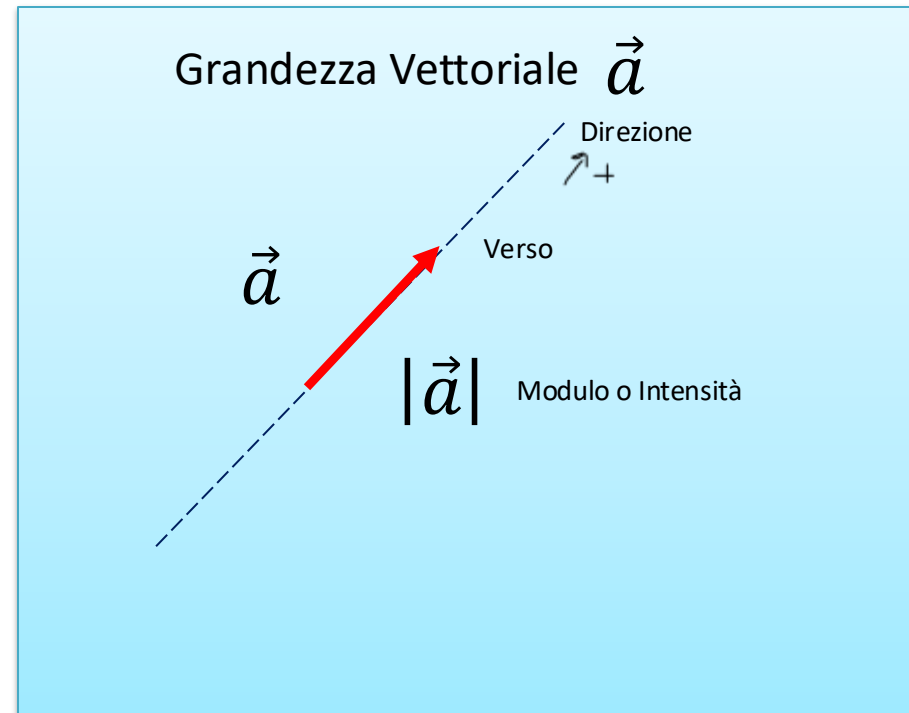
Forza $\vec{F} \rightarrow 45 \text{ N}$

Grandezze Tensoriali (Tensori di rango n):

Sono grandezze caratterizzate da n indici:

Esempio rango 2 matrici M_{ij}

Nel corso non considereremo grandezze tensoriali



Vettori e Scalari: Operazioni

-Le Osservabili Fisiche hanno in genere natura **vettoriale**.

- Più in generale hanno natura **TENSORIALE (matrici e generici tensori di rango n)**

-Si pensi alle forze per esempio: Se applichiamo (quindi sommiamo) due forze sullo stesso corpo, il corpo si muoverà in generale in una direzione che non coincide con la direzione di nessuna delle due forze.

-Nasce quindi la necessità di studiare il comportamento delle grandezze vettoriali attraverso l'utilizzo dell'algebra dei vettori

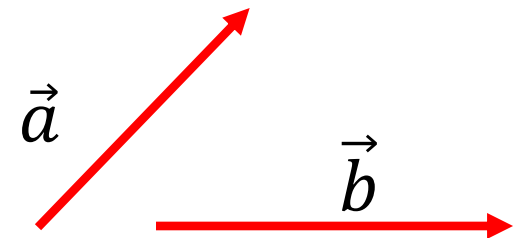
Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} ed uno scalare c possiamo **definire** le seguenti operazioni tra di essi

$c \vec{a}$ Prodotto di un vettore per uno scalare

$\vec{a} \pm \vec{b}$ Somma o differenza di due vettori

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ Prodotto scalare di due vettori (si legge « a scalare b »)

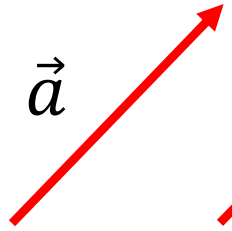
$\vec{a} \times \vec{b}$ Prodotto vettoriale di due vettori (si legge « a vettor b »)



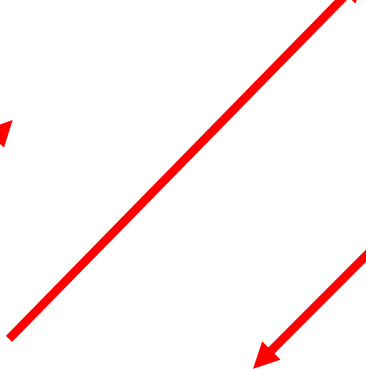
Prodotto di un vettore per uno scalare:

$$\vec{c} = b\vec{a}$$

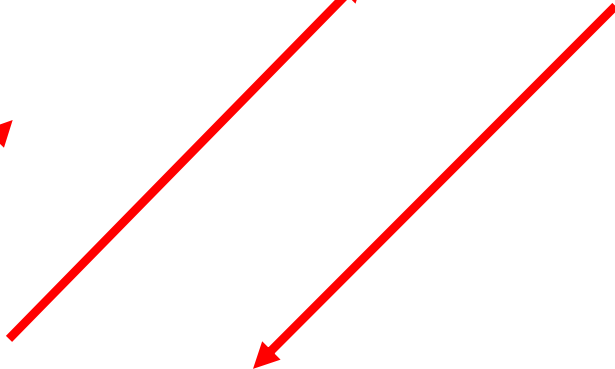
\vec{a}



\vec{c} (b>0)



\vec{c} (b<0)



Caratteristiche di \vec{c} :

E' ancora un vettore

Stessa direzione di \vec{a}

Stesso verso se $b > 0$

Verso opposto se $b < 0$

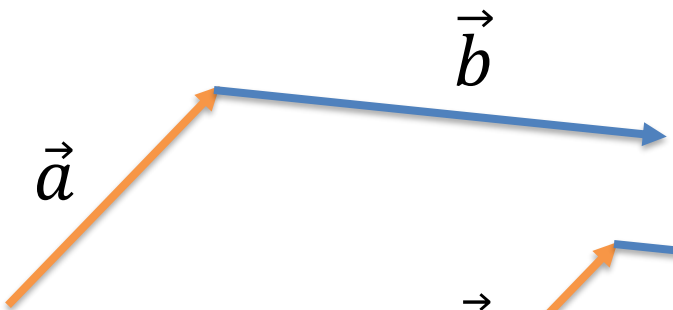
Modulo $|b||\vec{a}|$

Proprietà Commutativa: $c\vec{a} = \vec{a}c$

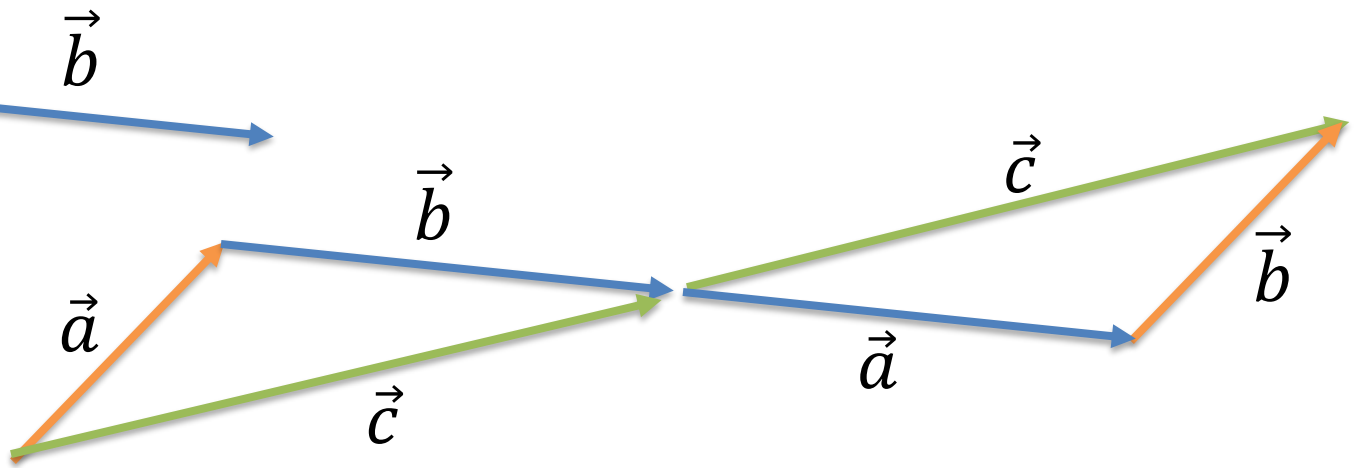
Proprietà Distributiva: $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$

$(c_1 + c_2)\vec{a} = c_1\vec{a} + c_2\vec{a}$

Somma di due vettori:



Regola del Parallelogramma
o
Metodo Punta-Coda



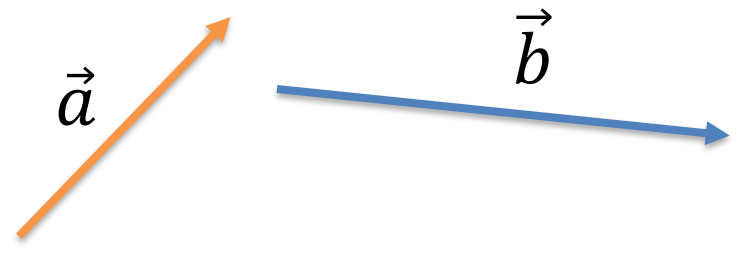
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Proprietà Commutativa della
Somma di due Vettori

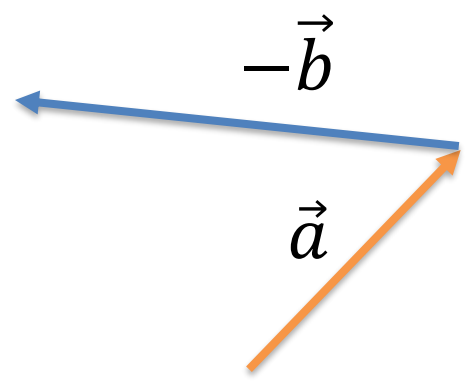
Differenza di due vettori:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

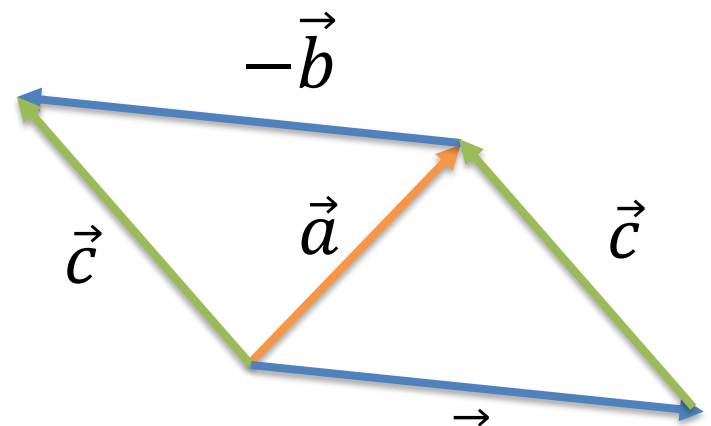
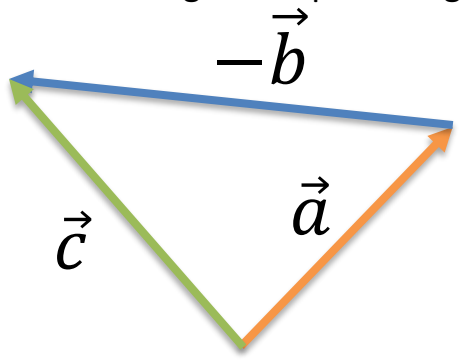


Che possiamo scrivere come

$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Applicando la «regola del parallelogramma» si ottiene:



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \rightarrow \vec{c} + \vec{b} = \vec{a} \rightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

Dal punto di vista algebrico la somma ed il prodotto per uno scalare definiscono una struttura algebrica: SPAZIO VETTORIALE LINEARE SUL CAMPO REALE

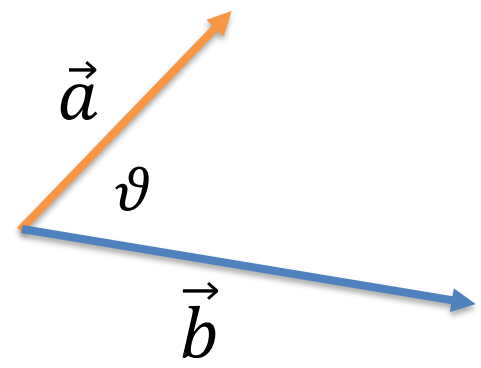
Prodotto scalare due vettori:

Il prodotto scalare tra due vettori \vec{a} e \vec{b} viene indicato come

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

ed è uno **scalare** definito come:

$$c = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vartheta)$$

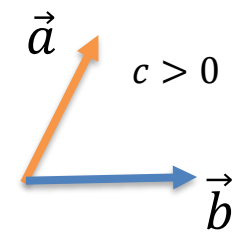
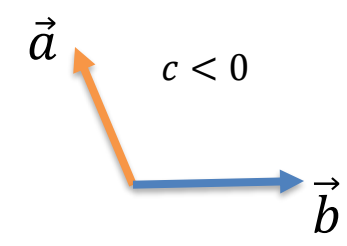
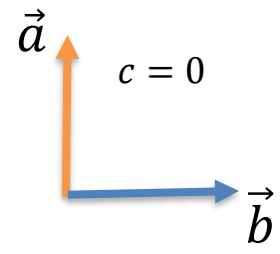


dove ϑ è l'angolo formato più piccolo formato da \vec{a} e \vec{b} .

N.B. il $\cos(360 - \vartheta)$ è comunque uguale $\cos(\vartheta)$ la scelta è quindi indifferente.

Il prodotto scalare c è:

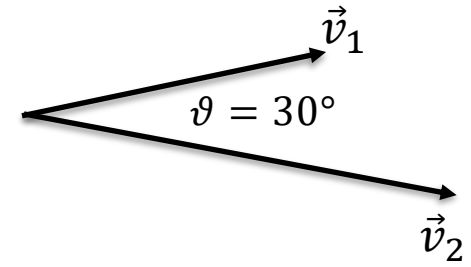
- $c = 0$ se $\vartheta = \pi/2$
- $c > 0$ se $0 \leq \vartheta < \pi/2$
- $c < 0$ se $\pi/2 \leq \vartheta < \pi$



Esempio:

Calcolare il seguente prodotto scalare tra due velocità:

$$|\vec{v}_1| = 4,45 \frac{m}{s} ; |\vec{v}_2| = 6,2 \frac{m}{s} ; \vartheta = 30^\circ$$



$$c = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4,45 \frac{m}{s} \times 6,2 \frac{m}{s} \times \cos(30^\circ) = 24 \frac{m^2}{s^2}$$

Il prodotto scalare consente di definire la NORMA di un vettore $|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$ e quindi una DISTANZA : SPAZIO VETTORIALE METRICO

Prodotto vettoriale tra due vettori:

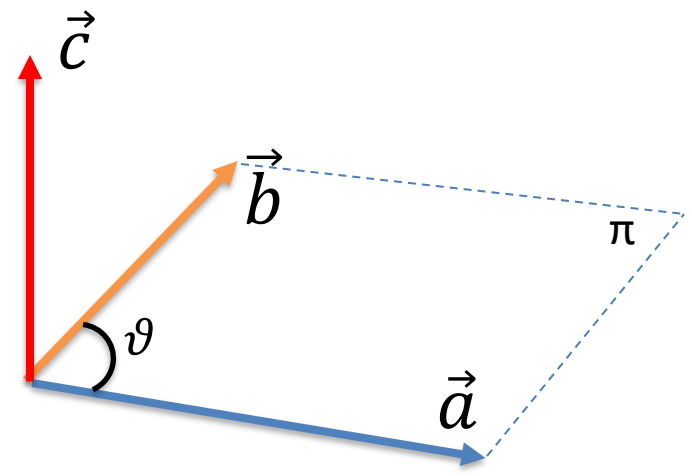
Il prodotto Vettoriale tra due vettori \vec{a} e \vec{b} viene indicato come

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

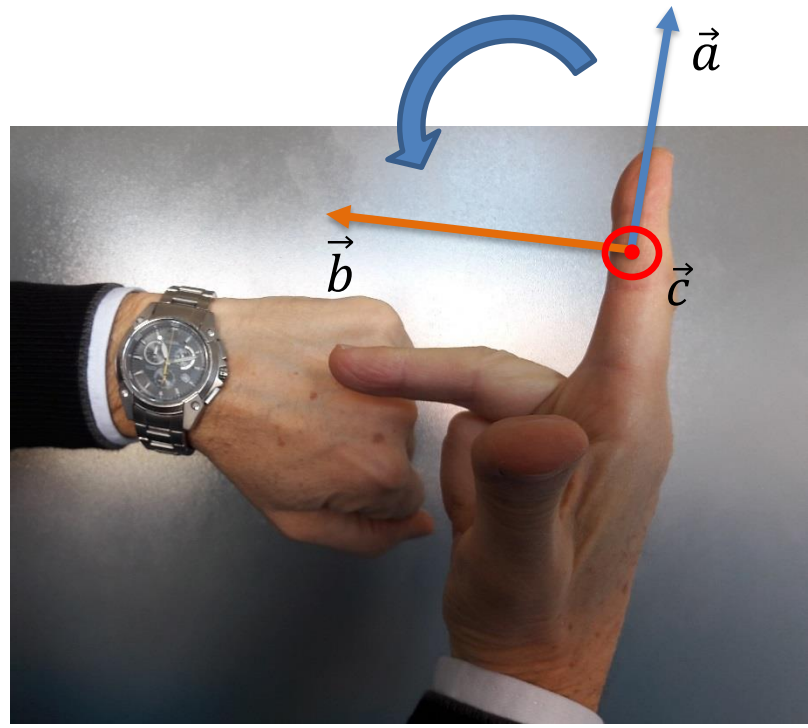
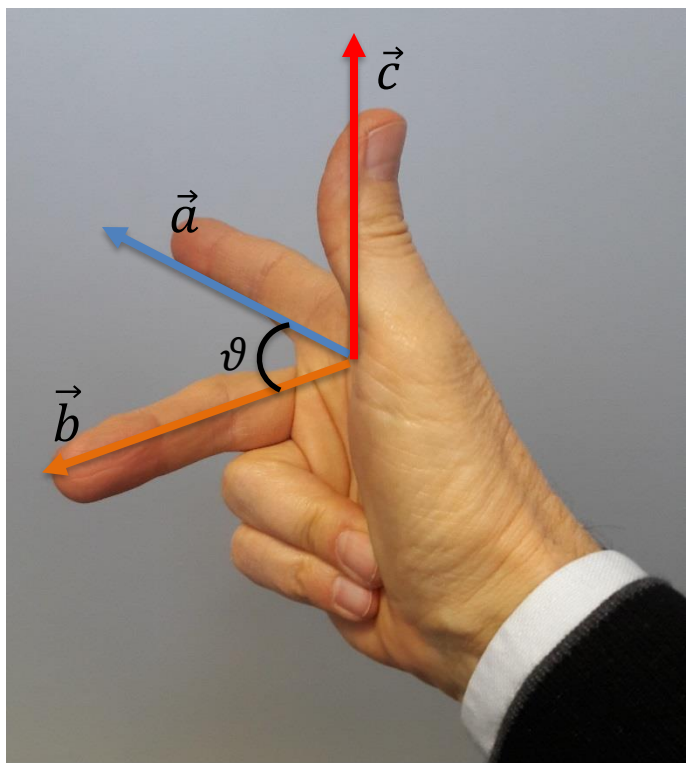
Si legge «a vettor b» è uno **Vettore** che ha **Modulo** definito come:

$$c = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen}(\vartheta)$$

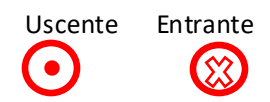
dove ϑ è l'angolo **più piccolo** formato tra \vec{a} e \vec{b} e direzione, data dalla regola della mano destra, **perpendicolare** al piano π che contiene i vettori \vec{a} e \vec{b} :



N.B. il $\text{sen}(360 - \vartheta)$ è diverso dal $\text{sen}(\vartheta)$ (hanno stesso valore ma segno opposto) la scelta è quindi per l'angolo più piccolo.



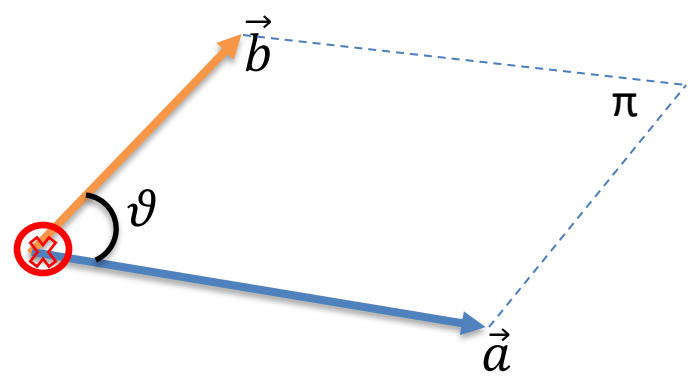
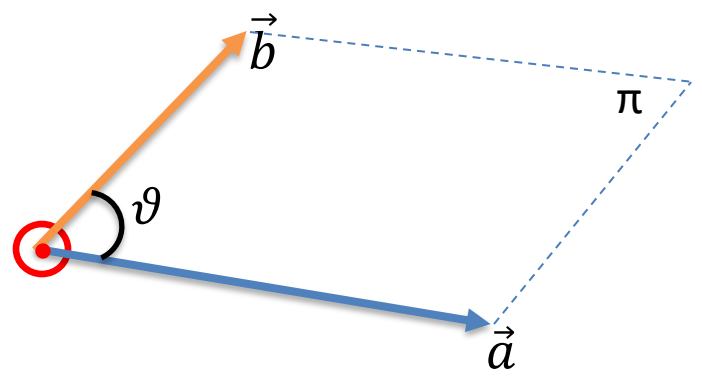
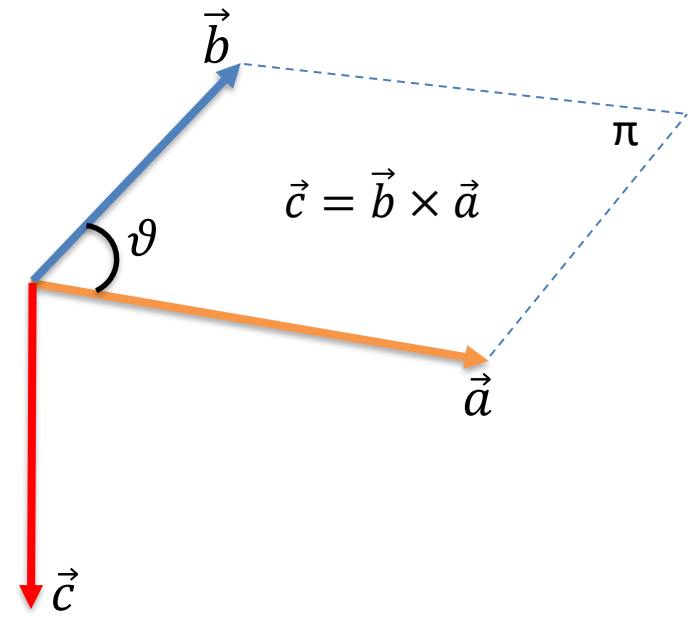
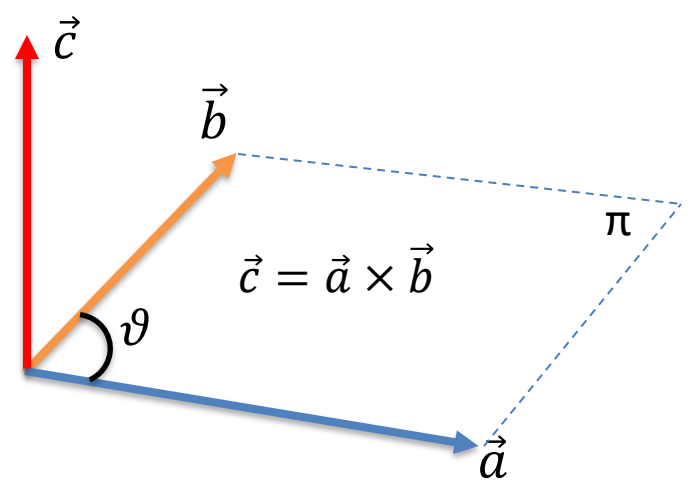
Se il vettore \vec{a} per sovrapporsi al vettore \vec{b} (secondo l'angolo più piccolo) ruota in senso antiorario, allora la direzione di \vec{c} è quella del pollice.



Dal piano che contiene i vettori \vec{a} e \vec{b}

Prodotto vettoriale tra due vettori:

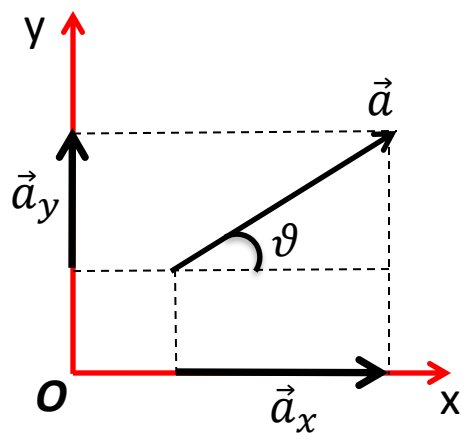
Proprietà anticommutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



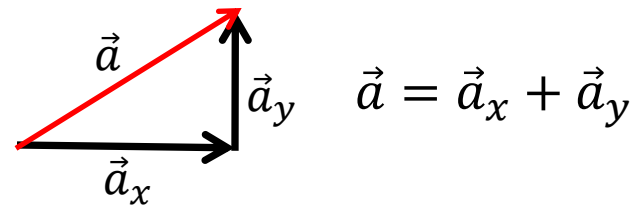
Prodotto vettoriale tra due vettori: Proprietà distributiva:

Si dimostra che: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Assi e componenti cartesiane in 2 dimensioni



\vec{a}_x \vec{a}_y Componenti (proiezioni sugli assi) del vettore \vec{a} nel sistema di riferimento scelto



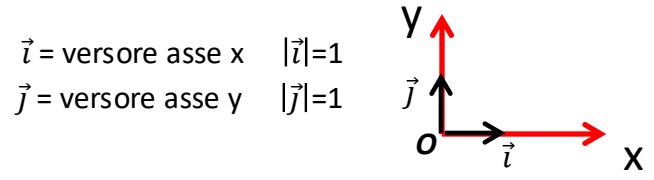
$$a_x = |\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos(\vartheta)$$

$$a_y = |\vec{a}_y| = |\vec{a}| \sin(\vartheta)$$

Il vettore \vec{a} può essere espresso come somma delle sue componenti \vec{a}_x e \vec{a}_y nel sistema di riferimento scelto

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(|\vec{a}| \cos \vartheta)^2 + (|\vec{a}| \sin \vartheta)^2} = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Versori: vettori di modulo 1 ed orientati secondo gli assi cartesiani (Base di \mathbb{R}^2)



\vec{i} = versore asse x $|\vec{i}|=1$
 \vec{j} = versore asse y $|\vec{j}|=1$

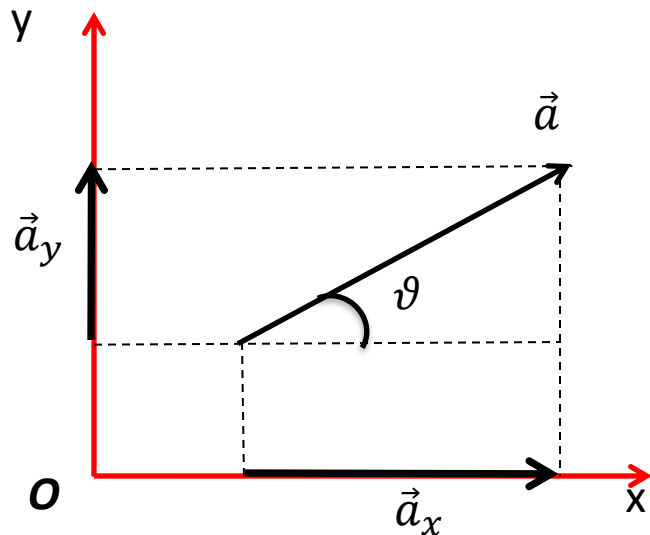
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \text{Unitarietà}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{Ortogonalità}$$

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = a_y \vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Esempio: Un vettore \vec{a} di modulo 3,00 m giace sul piano XY e forma, con l'asse delle x, un angolo $\vartheta = 37,0^\circ$.
Determinare le sue componenti nel sistema di riferimento scelto.

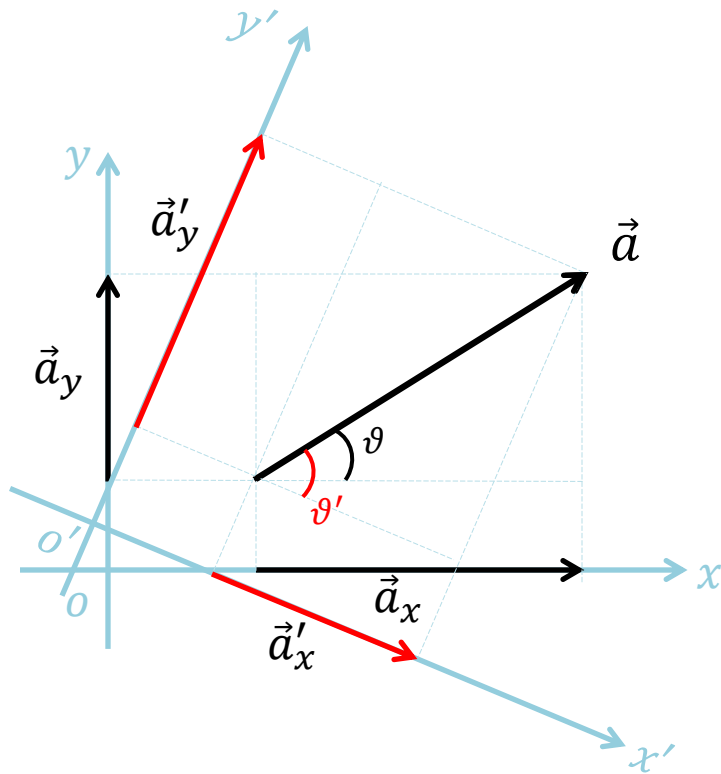


$$a_x = |\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos(\vartheta) = 3,00\text{m} \times 0,80 = 2,39 \text{ m}$$

$$a_y = |\vec{a}_y| = |\vec{a}| \sin(\vartheta) = 3,00\text{m} \times 0,60 = 1,80 \text{ m}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = (2,39 \text{ m})\vec{i} + (1,80\text{m})\vec{j}$$

Le componenti di un vettore dipendono dal sistema di riferimento scelto:



Nel sistema oxy avremo

$$a_x = |\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos(\vartheta)$$

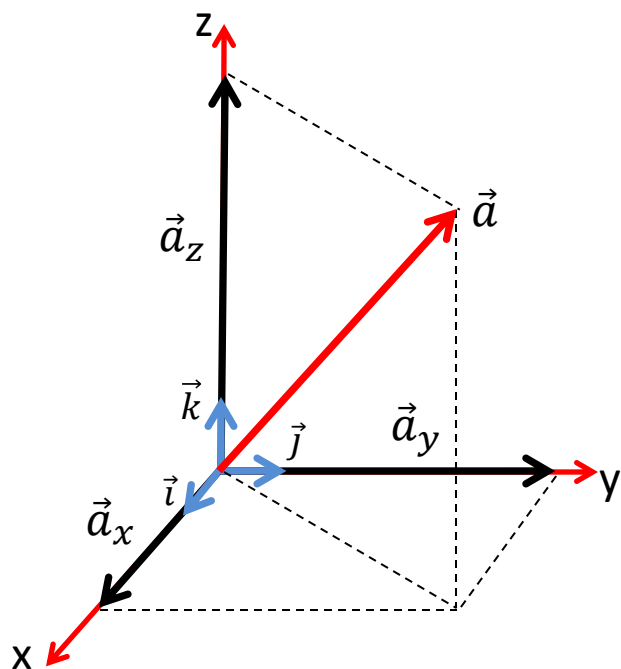
$$a_y = |\vec{a}_y| = |\vec{a}| \sin(\vartheta)$$

Nel sistema $o'x'y'$ avremo

$$a'_x = |\vec{a}'_x| = |\vec{a}| \cos(\vartheta')$$

$$a'_y = |\vec{a}'_y| = |\vec{a}| \sin(\vartheta')$$

Componenti cartesiane di un vettore in 3 dimensioni



Versori :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \text{Unitarietà}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{Ortogonalità}$$

Rappresentazione vettoriale di \vec{a} in 3 dimensioni:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Somma:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad \vec{b} = \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

Prodotto per uno scalare:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \qquad c \in \mathcal{R}$$

$$c\vec{a} = ca_x \vec{i} + ca_y \vec{j} + ca_z \vec{k}$$

Prodotto scalare:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \boxed{a_x \vec{i} \cdot b_x \vec{i}} + \underline{a_x \vec{i} \cdot b_y \vec{j}} + \underline{a_x \vec{i} \cdot b_z \vec{k}} +$$

$$+ \underline{a_y \vec{j} \cdot b_x \vec{i}} + \boxed{a_y \vec{j} \cdot b_y \vec{j}} + \underline{a_y \vec{j} \cdot b_z \vec{k}} + \underline{a_z \vec{k} \cdot b_x \vec{i}} + \underline{a_z \vec{k} \cdot b_y \vec{j}} + \boxed{a_z \vec{k} \cdot b_z \vec{k}} =$$

$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto Vettoriale:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

Eseguendo tutti i prodotti vettoriali e tenendo conto che \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} sono una ordinati secondo la regola della destra, si ottiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Prodotto Vettoriale:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Si arriva al medesimo risultato anche dallo sviluppo dei minori del determinante costruito a partire dalle coordinate:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Calcolare il prodotto vettoriale dei due vettori a e b e darne una rappresentazione grafica

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = 3,00\vec{i} - 4,00\vec{j}$$

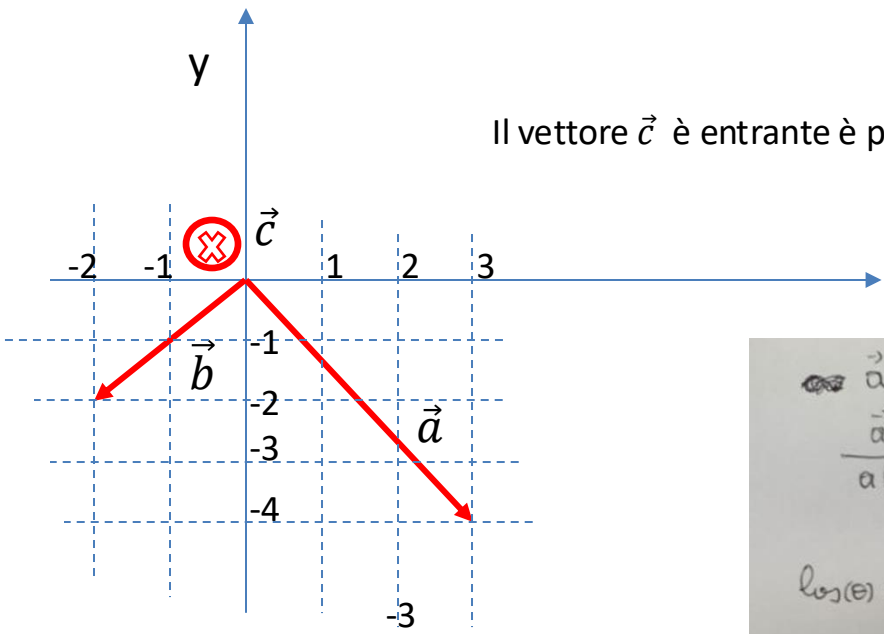
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} = -2,00\vec{i} - 2,00\vec{j}$$

Calcolare inoltre l'angolo formato tra i due vettori.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Che in questo caso 2D si riduce (visto che $a_z=0$ e $b_z=0$) a

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = (-6 - 8)\vec{k} = -14\vec{k}$$



Il vettore \vec{c} è entrante è perpendicolare al piano xy

Handwritten calculations for the angle between vectors a and b:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \cos(\theta) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{[3 \times (-2)] + [-4 \times -2]}{\sqrt{9 + 16} \sqrt{4 + 4}} = \frac{-6 + 8}{\sqrt{25} \sqrt{8}} = \frac{2}{5 \times \sqrt{8}} = 0,1414$$

$$\theta = \arccos(0,1414) = 81,9^\circ \quad \theta_2 = 1,43 \text{ radianti}$$

Dati tre vettori

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = 2,00\vec{i} + 3,00\vec{j} - 4,00\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = -3,00\vec{i} + 4,00\vec{j} + 2,00\vec{k}$$

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} = 7,00\vec{i} - 8,00\vec{j}$$

Calcolare il prodotto scalare: $3\vec{c} \cdot (2\vec{a} \times \vec{b})$

$$2\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & -8 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = [(6 \times 2) - (-8 \times 4)]\vec{i} - [(4 \times 2) - (-8 \times -3)]\vec{j} + [(4 \times 4) - (6 \times -3)]\vec{k}$$

$$= (12 + 32)\vec{i} - (8 - 24)\vec{j} + (8 + 18)\vec{k} = 44,0\vec{i} + 16,0\vec{j} + 24,0\vec{k}$$

$$3\vec{c} \cdot (2\vec{a} \times \vec{b}) = (21,0\vec{i} - 24,0\vec{j}) \cdot (44,0\vec{i} + 16,0\vec{j} + 24,0\vec{k}) =$$

$$= 21,0 \times 44,0 - 24,0 \times 16,0 = 924 - 384 = 540$$