Prova scritta di Analisi Matematica 3 24.02.2025 Sol. (1)

1. Si noti che la funzione proposta è definita nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$. Esaminiamo il suo comportamento lungo le rette per l'origine escludendo l'asse delle x (per quanto osservato prima). Dunque $x=0$ e $y=mx$ con $m\neq 0$. Abbiamo $\lim\limits_{y\to 0}\frac{2y^2}{3y}=0$ e

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2m^2x^2}{3mx}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2m^2}{3m}x=0.$$

Mentre lungo la parabola $y=x^2$ troviamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^4}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x^2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Avendo trovato due limiti diversi $\left(0\neq\frac{1}{3}\right)$, concludiamo che il limite proposto non esiste.

2. Mediante la regola della catena troviamo

$$f_u=f_x x_u+f_y y_u+f_z z_u=ve^w f_x+v^2e^{-w}f_y+2uv\sin w\, f_z,$$

$$f_w=f_x x_w+f_y y_w+f_z z_w=uve^w f_x-uv^2e^{-w}f_y+u^2v\cos w\, f_z.$$

Allo stesso modo, per le derivate seconde, abbiamo

Prova scritta di Analisi Matematica 3 24.02.2025 fol. 2

$$f_{uv}=(f_u)_v= e^w f_x + v e^w\left(u e^w f_{xx}+2uve^{-w} f_{xy}+u^2\sin w f_{xz}\right)$$

$$+2ve^{-w}f_y+v^2e^{-w}\left(u e^w f_{xy}+2uve^{-w}f_{yy}+u^2\sin w f_{yz}\right)$$

$$+2u\sin w f_z+2uv\sin w\left(ue^w f_{xz}+2uve^{-w}f_{yz}+u^2\sin w f_{zz}\right)$$

$$= e^w f_x+2ve^{-w}f_y+2u\sin w\, f_z+uve^{2w}f_{xx}+3uv^2 f_{xy}$$

$$+3u^2ve^w\sin w\, f_{xz}+2uv^3e^{-2w}f_{yy}+5u^2v^2e^{-w}\sin w\, f_{yz}$$

$$+2u^3v\sin^2 w\, f_{zz}.$$

3. L'insieme E è un dominio normale rispetto al piano xy. Per cui, integrando per segmenti rispetto alla direzione z, abbiamo

$$\iiint_E \sqrt{xy}\,dx\,dy\,dz=\iint_{\substack{0\le y\le 2\\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}}} dx\,dy\int_0^{\sqrt{y}}\sqrt{xy}\,dz,$$

$$\int_0^{\sqrt{y}}\sqrt{xy}\,dz=\sqrt{xy}\int_0^{\sqrt{y}}dz=y\sqrt{x},$$

$$\iint_{\substack{0\le y\le 2\\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}}} y\sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} y\sqrt{x}\,dx=\int_0^2 y\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$= \int_0^2 \frac{2}{3} y (4-y^2)^{3/4} dy = -\frac{1}{3}\int_0^2 (4-y^2)^{3/4} d(4-y^2)$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}(4-y^2)^{7/4}\Big|_0^2 = \frac{32}{21}\sqrt{2}.$$

4.

a) $$\varphi_u = (4uv, 2v^2, 0) = 2v\,(2u, v, 0)$$
$$\varphi_v = (2u^2, 4uv, 3v^2)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = 2v\,(3v^3, -6uv^2, 6u^2v) = 6v^2(v^2, -2uv, 2u^2)$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = 6v^2\sqrt{v^4+4u^2v^2+4u^4} = 6v^2(v^2+2u^2),$$

Dato che $6v^2(v^2+2u^2) > 0$ se $(u,v)\in(0,1)\times(0,1)$, la superficie è regolare.

$$\nu(u,v) = \frac{1}{v^2+2u^2}(v^2, -2uv, 2u^2).$$

b) L'elemento d'area è $d\sigma = |\varphi_u \wedge \varphi_v|\,du\,dv$
$= 6v^2(v^2+2u^2)\,du\,dv$

$$\text{Area di } S = \iint_S d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1]} 6v^2(v^2+2u^2)\,du\,dv$$

$$= 6\left[\int_0^1 du\int_0^1 v^4\,dv + 2\int_0^1 u^2\,du\int_0^1 v^2\,dv\right] = 6\left[1\cdot\frac{v^5}{5}\Big|_0^1 + 2\,\frac{u^3}{3}\Big|_0^1\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_0^1\right]$$

$$= 38/15,$$

$$\iint_S (xy+z)\,d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1]} 6(4u^3v^3+v^3)v^2(v^2+2u^2)\,du\,dv$$

$$= 6\iint_{[0,1]\times[0,1]} v^5(4u^3+1)(v^2+2u^2)\,du\,dv.$$

c) Ricordando la formula generale per il flusso, abbiamo

$$\iint_S (F,\nu)\,d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(F(\varphi(u,v)), \varphi_u \wedge \varphi_v\right) du\,dv$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left((4u^2v, 2uv^2, 4v^3), 6v^2(v, -2uv, 2u^2)\right) du\,dv$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} 12v^3(2u^2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2)\,du\,dv$$

$$= 48\iint_{[0,1]\times[0,1]} u^2v^5\,du\,dv = 48\int_0^1 u^2\,du \int_0^1 v^5\,dv$$

$$= 48 \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 \cdot \left.\frac{v^6}{6}\right|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica 3 24.02.2025 Sol. 5

5.

a) Per γ_1 abbiamo $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$, $dz = 0$, da cui

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{2\pi} \left(-4a \cos t \sin t + \cos t \sin t \right) dt$$

$$= (1-4a) \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = (1-4a) \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Mentre per γ_2 si ha

$$dx = (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt = \cos 2t \, dt,$$

$$dy = 2 \sin t \cos t \, dt = \sin 2t \, dt,$$

$$dz = -\sin t \, dt,$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\pi} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{\sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t}_{\sin^2 t} + \cos^2 t}_{1}} \Big((2a \sin 2t + \cos t) \cos 2t + \sin^2 t \sin 2t - \sin t \cos t \Big) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(a \sin 4t + \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + 2 \sin^3 t \cos t - \sin t \cos t \right) dt$$

Prova scritta di Analisi Matematica 3 24.02.2025

Sol. 6

$$= \int_0^{\pi} \left(a\sin 4t + \cos t\,(1-2\sin^2 t) + 2\sin^3 t\cos t - \sin t\cos t \right) dt$$

$$= \left(-\frac{a}{4}\cos 4t + \sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin^4 t - \frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= 0$$

b. La prima condizione di chiusura è

$$-\frac{2y(4ax+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{4ax+z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

che si riduce a $y(4ax+z) = xy$, cioè

$$y\left[(4a-1)x + z\right] = 0.$$

Ma questa non è verificata nell'insieme di definizione di ω (cioè $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$), infatti prendendo, ad esempio, $(x,y,z) = (0,1,1)$ si trova la contraddizione $1 = 0$. Dunque la forma non è chiusa e quindi neanche esatta per alcun valore di a.