

# Prova scritta di Analisi Matematica 3

## e

### Analisi Matematica 2 (10 CFU)

**Esercizio 1.** (6 punti)

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{3y}.$$

**Esercizio 2.** (5 punti)

Siano dati  $f(x, y, z)$  e il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = uve^w \\ y = uv^2e^{-w} \\ z = u^2v \sin w. \end{cases}$$

Esprimere  $f_u, f_w$  e  $f_{uv}$  in termini di  $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}$  e  $f_{zz}$ .

**Esercizio 3.** (7 punti)

Sia  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\}$ , calcolare l'integrale

$$\iiint_E \sqrt{xy} \, dx \, dy \, dz.$$

**Esercizio 4\*.** (6 punti)

Sia  $S$  la superficie di equazioni parametriche

$$\varphi(u, v) : \begin{cases} x = 2u^2v \\ y = 2uv^2 \\ z = v^3 \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

- Assumendo l'iniettività di  $\varphi(u, v)$  nei punti interni del suo dominio, verificare che la superficie è regolare e scrivere il campo dei vettori normali indotto da  $\varphi(u, v)$ .
- Calcolare l'area di  $S$  e ridurre l'integrale  $\iint_S (xy + z) \, d\sigma$  ad un integrale doppio.
- Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, 4z)$  attraverso  $S$  orientata dal campo dei vettori normali trovati nel punto a).

vedi retro  $\rightarrow$

**Esercizio 5.** (6 punti)

Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{4ax + z}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} dy + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dz,$$

con  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Calcolare gli integrali  $\int_{\gamma_1} \omega$  e  $\int_{\gamma_2} \omega$ , con

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \sin^2 t \\ z = \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Suggerimento: ricordare le formule di duplicazione e la relazione  $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ .

b) Trovare, se esistono, i valori di  $a$  per i quali la forma è esatta ed eventualmente calcolare le primitive.