Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 febbraio 2025

Esercizio 1

Siano dati i polinomi

$$p_1 = -1 + kx + 3x^3, \qquad p_2 = 1 + x^3, \qquad p_3 = k + 1 + kx^2 + (2k+1)x^3$$

dove k è un parametro reale.

a) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = L(p_1, p_2, p_3)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$
b) Data l'applicazione lineare $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p_1, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p_2, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = p_3, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^3$$

determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ f è suriettiva.

c) Determinare inoltre per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il numero 2 è un autovalore di *f*.
d) Posto $k = 0$, trovare un sottospazio vettoriale W' di $\mathbb{R}_3[x]$ tale che $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus W'$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli trovare i valori del parametro reale k per i quali il seguente sistema è compatibile e in corrispondenza di tali valori trovare l'insieme delle soluzioni

$$\begin{cases} x + y - z = 1 + k \\ x + y + kz = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Inoltre, nel caso $k = -1$, si trovi una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo.

Esercizio 3

Stabilire se l'endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - c + d & 2b - d \\ d & d \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base di $M_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di *f*.