LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1

21 FEBBRAIO 2025

ESERCIZIO 1

a) Consideriamo l'isomorfismo $F: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Dato che F è un isomorfismo, p_1, p_2, p_3 sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $F(p_1), F(p_2), F(p_3)$ sono linearmente indipendenti.

Allora

$$\begin{aligned} \dim(W) &= \dim(L(p_1, p_2, p_3)) \\ &= \dim(L(F(p_1), F(p_2), F(p_3))) \\ &= rg\begin{pmatrix} -1 & k & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 0 & k & 2k+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg \geq 2.$$

Consideriamo gli orlati:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & k & 3\\ 1 & 0 & 1\\ k+1 & 0 & 2k+1\end{pmatrix} = -k\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ k+1 & 2k+1\end{pmatrix} =$$

$$= -k\cdot(2k+1-k-1) = -2k^2$$

Quindi se $k\neq 0$ allora $\dim(W)=3$.

Se $k=0$ esaminiamo l'altro orlato:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 0.$$

Conclusione: se $k\neq 0$ $\dim(W)=3$; se $k=0$ $\dim(W)=2$.

b) Osserviamo che $e_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Infatti

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\neq 0$$

Allora $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

Sia $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base di $\mathbb{R}_3[x]$.

Allora

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 3 & 1 & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \text{ è suriettiva} \underset{\dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}_3[x])}{\Longleftrightarrow} f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow f \text{ biettiva}$$

$$\Leftrightarrow \det(M_{BB'}(f)) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 3 & 1 & 2k+1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & k+1 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k^2 \Leftrightarrow k \neq 0.$$

c) Abbiamo dato la definizione di "autovalore" per un ENDOMORFISMO. Ma f non è un endomorfismo, per cui possiamo concludere che 2 non è mai autovalore di f.

d) In tal caso $(k=0)$ $W = L(p_1, p_2)$ dove $p_1 = -1 + 3x^3$, $p_2 = 1 + x^3$. Nel punto a) abbiamo visto che p_1 e p_2 sono linearmente indipendenti.

Completiamo p_1, p_2 a una base di $\mathbb{R}_3[x]$.

Consideriamo $\quad \underset{-1+3x^3}{\overset{p_1}{\shortparallel}} \quad \underset{1+x^3}{\overset{p_2}{\shortparallel}} \quad 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$

ed estraiamo il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

Chiediamoci se $1 \in L(p_1, p_2)$, cioè se $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Tali che $1 = \lambda_1(-1+3x^3) + \lambda_2(1+x^3)$

$$= -\lambda_1 + \lambda_2 + (3\lambda_1 + \lambda_2)x^3 \iff$$

$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$ Sottraendo la 1ª dalla 2ª si ha $-4\lambda_1 = 1$, da

cui $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = -3\lambda_1 = \frac{3}{4}$.

Quindi $1 \in L(P_1, P_2)$.

Ora chiediamoci se P_1, P_2, x sono lin. indipendenti,

cioè

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

In effetti è così, perché $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Analogamente si ha che $x^2 \notin L(P_1, P_2, x)$ perché

$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Allora $\{P_1, P_2, x, x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$ e, posto

$W' := L(x, x^2)$, si ha $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus W'$.

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ k & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1+k \\ 1 & 1 & k & 0 \\ k & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1+k \\ 1 & 1 & k & 0 \\ k & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -(1+k)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{I\,col} \to \mathrm{I}+\mathrm{III}}{=} -(1+k)\cdot\det\begin{pmatrix} 1+k & 1 & k \\ 1+k & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I\,riga} \to \mathrm{I}-\mathrm{II}}{=} -(1+k)\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & k-1 \\ 1+k & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+k)^2 \det\begin{pmatrix} 3 & k-1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+k)^2(-6-k+1)$$

$$= (1+k)^2(-k-5)$$

$$= -(1+k)^2(k+5)$$

$A \in M_{4\times 3}$

Quindi se $k \neq -1$ e $k \neq -5$ $\quad rg(A|B) = 4 \neq rg(A)$

$\Rightarrow$ il sistema è incompatibile

Per $k=1$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad A|B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

In tal caso il sistema è omogeneo ed è dunque compatibile.
Inoltre l'insieme delle soluzioni V_A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

$rg(A) \geq 2$ dato che $\det\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \neq 0$. Vediamo gli orlati:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix} = 0$$

l'altro orlato è uguale al precedente ed ha dunque $\det = 0$.

Allora $rg(A) = 2$ e il sistema è equivalente a

$$\begin{cases}-x-2y=-t\\ 2x+y=2t\end{cases} \qquad z=t$$

da cui $x = \dfrac{1}{\det\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}} \det\begin{pmatrix}-t & -2\\ 2t & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-t+4t) = t$

$$y = \frac{1}{3} \det\begin{pmatrix} -1 & -t \\ 2 & 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Conclusione: $V_A = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$
$= \{t(1,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$
$= L(1,0,1)$

Una base di V_A è $\{(1,0,1)\}$.

Per $k = -5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

Abbiamo già visto che $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0.$

Quanto l'altro orlato,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= -4 \neq 0$$

Sappiamo già che $\det(A|B)=0$. Quindi $rg(A|B) = rg(A) = 3 \Longrightarrow$ il sistema è compatibile. Esso è equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-z=-4 \\ -5x-2y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di Cramer, che ammette

un'unica soluzione (x_0, y_0, z_0) dove

$$x_0 = \frac{1}{-4}\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}(-4)\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$y_0 = \frac{1}{-4}\det\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}4\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$z_0 = 5x_0 + 2y_0 = 5\cdot 3 + 2\cdot(-8) = 8 - 16 = -8.$$

ESERCIZIO 3

Troviamo $M_{BB}(f)$ dove $B=\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}\right\}$.

$$f(e_1)=f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=e_1$$

$$f(e_2)=f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=e_1+2e_2$$

$$f(e_3)=f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}=-e_1$$

$$f(e_4)=f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=e_1-e_2+e_3+e_4$$

$$M_{BB}(f)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&-1&1\\0&2-\lambda&0&-1\\0&0&-\lambda&1\\0&0&0&1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Ci sono dunque 3 autovalori: 0 e 2 con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2.

Cerchiamo gli autospazi.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V(1) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} a+b-c+d & 2b-d \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c+d = a \\ 2b-d = b \\ d = c \\ d = d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c+d=0 \\ b \quad -d=0 \\ \quad -c+d=0 \end{cases}$ Poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

$= L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Segue che $m_g(1) = \dim(V(1)) = 1 \neq m_a(1)$

$\Rightarrow f$ NON è diagonalizzabile