Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

6 febbraio 2025

Esercizio 1

Sia $f\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_2 + x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$ dati da $W = \ker(f)$ e $W' = L\big((0,1,0,1,0), (0,-1,1,1,1)\big)$.

a) Stabilire se la somma $W + W'$ è diretta. Il caso affermativo trovare l'unica decomposizione del generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di $\mathbb{R}^5$ come somma di un vettore di W e di un vettore di W'. In caso negativo trovare un vettore $\mathbb{R}^5$ che ammetta due decomposizioni distinte come somma di un vettore di W e di un vettore di W'.

b) Stabilire se $X = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 : f(\mathbf{v}) \in L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ e in caso affermativo trovarne la dimensione.

c) Data l'applicazione lineare $g\colon M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ e $B' = \{(1,1), (-1,0)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare $(g \circ f)(1,1,0,0,1)$.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli trovare i valori del parametro reale k per i quali il seguente sistema è compatibile e in corrispondenza di tali valori trovare l'insieme delle soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ kx_2 + kx_3 + x_4 = k^2 \\ kx_1 + x_2 + (k+1)x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ di tutte le matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali, e l'endomorfismo f di V definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + kb & (k-1)b \\ (k-1)b & ka + c \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f.