LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1

6 FEBBRAIO 2025

ESERCIZIO 1

a) Troviamo una base di W. Notiamo che $(x_1, .., x_5) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x_1, ..., x_5)$ è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente a $\begin{cases} x_1 + x_2 = -s \\ x_2 = -t \end{cases}$ $\quad x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$

da cui $x_1 = t - s$, e quindi

$$\ker(f) = \{(t-s, -t, s, t, u) : s, t, u \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{t(1,-1,0,1,0) + s(-1,0,1,0,0) + u(0,0,0,0,1) : s,t,u \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(\underbrace{(1,-1,0,1,0)}_{w_1}, \underbrace{(-1,0,1,0,0)}_{w_2}, \underbrace{(0,0,0,0,1)}_{w_3})$$

I vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti.
Infatti:

$$rg\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3$$

dato che

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Quindi $\{w_1, w_2, w_3\}$ è base di W.

Notiamo che, se $W' = L(\underbrace{(0,1,0,1,0)}_{w_1'}, \underbrace{(0,-1,1,1,1)}_{w_2'})$,

$$w_2' = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 \in W.$$

Quindi $W \cap W' \neq \{0\}$ e la somma non è diretta.

Notiamo che

$$w_2 = \underbrace{(v_1 + v_2 + v_3)}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in W'}$$

$$= \underbrace{0}_{\in W} + \underbrace{w_2}_{\in W'}$$

c) $(g \circ f)(1,1,0,0,1) = g(f(1,1,0,0,1)) =$

$$= g\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\gamma+\delta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha+\gamma+\delta = 1 \longrightarrow \delta = 1-\alpha-\gamma = 1-2-1 = -2 \\ \gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 2 \longrightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(1,1,0,0,1) = g\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = x\cdot(1,1) + y\cdot(-1,0) \overset{*}{=}$$

[dove $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overset{*}{=} 3\cdot(1,1) + 5(-1,0) = (-2,3).$

b) $\forall v, v' \in X \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \underbrace{f(v)}_{\in L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} + \lambda' \underbrace{f(v')}_{\in L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$\in L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ perché $L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è un sottospazio

$\Rightarrow \lambda v + \lambda' v' \in X$.

Si noti che

$$X = \left\{(x_1, \dots, x_5) : \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2+x_4 \\ x_2+x_4 & x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} \in L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x_1, \dots, x_5) : \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2+x_4 & x_2+x_4 & x_1+x_2+x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\right\}$$

$$= \left\{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2+x_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\right\}$$

$$= \left\{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \det\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2+x_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 + x_4 = 0\right\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, x_3, -x_2, x_5) : x_1, x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= L\big((1,0,0,0,0), (0,1,0,-1,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\big)$$

Dato che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

segue che i vettori $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,-1,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,0,1)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di X.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} & 1 & 0 \\ 0 \quad k & k & 1 \\ \boxed{k \quad 1} & k+1 & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 \quad k & k & 1 & k^2 \\ \boxed{k \quad 1} & k+1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

Consideriamo gli orlati di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ in A.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1.$$

Quindi se $k \neq 1$ e $k \neq -1$ $rg(A) = 3 = rg(A|B)$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Se $k = 1$, il determinante del rimanente orlato è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 2.$

Consideriamo l'orlato in A|B ottenuto aggiungendo B:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow rg(A|B) = 2 = rg(A) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Se $k = -1$, il determinante del rimanente orlato in A è dato da

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$ (terza colonna è somma delle prime due)

$\Rightarrow rg(A) = 2$.

Invece il rimanente orlato in A|B ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A|B) = 3 \neq rg(A) \rightarrow$$

per $k = -1$ il sistema è incompatibile

Troviamo le soluzioni per $k \neq 1$ e $k \neq -1$.
Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ kx_2 + x_4 = k^2 - ks \\ kx_1 + x_2 + kx_4 = 1 - (k+1)s \end{cases} \qquad x_3 = s$$

Sostituendo $x_1 = -s$ nella terza equazione abbiamo

$$\begin{cases} kx_2 + x_4 = k^2 - ks \\ x_2 + kx_4 = 1 - s \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

$$x_2 = \frac{1}{k^2-1} \det\begin{pmatrix} k^2 - ks & 1 \\ 1-s & k \end{pmatrix} = \frac{k(k^2-ks) - 1 + s}{k^2-1}$$

$$x_4 = \frac{1}{k^2-1} \det\begin{pmatrix} k & k^2-ks \\ 1 & 1-s \end{pmatrix} = \frac{k(1-s) - k^2 + ks}{k^2-1}$$

Quindi

$$S = \left\{ \left(-s, \frac{k^3 - k^2 s + s - 1}{k^2-1}, s, \frac{k-k^2}{k^2-1} \right) ; s \in \mathbb{R} \right\}$$

- Troviamo le soluzioni per $k = 1$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = -s \\ x_1 + x_2 = -2s - t + 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_4 = t \end{array}$$

da cui $x_1 = s$, $\quad x_2 = -2s - t + 1 - s = 1 - t - 3s$

$$S = \{ (s, 1-3s-t, s, t) : s, t \in \mathbb{R} \}$$

ESERCIZIO 3

Consideriamo la base $B=\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}\right\}$

di V.

Troviamo $A=M_{BB}(f)$.

$$f(v_1)=f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}=1\cdot v_1+0\cdot v_2+k\cdot v_3$$

$$f(v_2)=f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&k-1\\k-1&0\end{pmatrix}=k\cdot v_1+(k-1)v_2+0\cdot v_3$$

$$f(v_3)=f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0\cdot v_1+0\cdot v_2+1\cdot v_3$$

$$A=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&k-1&0\\k&0&1\end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&k&0\\0&k-1-\lambda&0\\k&0&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&k\\0&k-1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2\cdot(k-1-\lambda).$$

Gli autovalori di f sono i seguenti:

K	AUTOVALORI
$k\neq 2$	1, $k-1$ con $m_a(1)=2$ $m_a(k-1)=1$
$k=2$	1, con $m_a(1)=3$

• $k \neq 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \in V(1) \iff f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+kb & (k-1)b \\ (k-1)b & ka+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a+kb=a \\ (k-1)b=b \\ ka+c=c \end{cases} \iff \begin{cases} kb = 0 \\ (k-2)b = 0 \\ ka = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & \boxed{k-2} & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $k \neq 2$, quindi il rango ≥ 1. Se $k=0$ $rg=1$, se $k\neq 0$ $rg=2$. Quindi se $k \neq 0$ $m_g(1) = 3 - \text{rango} = 1 \neq m_a(1) \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile. Se $k=0$ allora il sistema si riduce a $-2b=0$, da cui

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \in V(k-1) \iff \begin{pmatrix} a+kb & (k-1)b \\ (k-1)b & ka+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1)a & (k-1)b \\ (k-1)b & (k-1)c\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a+kb+a-ka=0 \\ ka+c-kc+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2-k)a+kb = 0 \\ ka+(2-k)c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2-k} & k & 0 \\ \boxed{k} & 0 & \boxed{2-k} \end{pmatrix}$$

Poiché $k \neq 2$, il rango è 2

e il sistema è equivalente a $\begin{cases} (2-k)a = -ks \\ ka+(2-k)c=0 \end{cases}$ $\quad b=s$

Allora $a = -\frac{k}{2-k}s \qquad c = -\frac{ka}{2-k} = \frac{k^2}{(2-k)^2}s$

$$V(k-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{k}{2-k}s & s \\ s & \frac{k^2}{(2-k)^2}s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -\frac{k}{2-k} & 1 \\ 1 & \frac{k^2}{(2-k)^2} \end{pmatrix}$$

Conclusione: per $k \neq 2$ e $k \neq 0$ f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori di f è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{k}{2-k} & 1 \\ 1 & \frac{k^2}{(2-k)^2} \end{pmatrix} \right\}.$$

- $k = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(1) \iff \begin{pmatrix} a+2b & b \\ b & 2a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases}$$

$\iff a = b = 0, \quad c = s \quad s \in \mathbb{R}.$

$$V(1) = \left\{ s\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m_g(1) = 1 \neq m_a(1) \Rightarrow f$ NON è diagonalizzabile.