

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

## **Analisi Superiore 1 - 05/02/2025**

(Analisi complessa e trasformate)

### **Esercizio 1.**

Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent centrato in zero della funzione  $f(z) = \frac{z+2}{(z+3)(z-2)^2}$  (se si usano sviluppi in serie noti, ricordare che le serie di potenze sono derivabili termine a termine nel loro cerchio di convergenza) (**4 punti**);

ii) in quale dominio vale lo sviluppo trovato al punto i)? Si può calcolare lo sviluppo in serie in altri domini? Se sì, in quali e perché? (**2 punti**)

iii) Se sì, scrivere lo sviluppo di  $f(z)$  centrato in zero in un altro dominio (**2 punti**);

iv) calcolare il residuo di  $f(z)$  in  $z = -3$  (**1 punto**);

v) calcolare il residuo di  $f(z)$  a infinito (**1 punto**).

### **Esercizio 2.**

i) Dati i segnali  $f(t) = e^{-t}H(t)$  e  $g(t) = e^{-2t}H(t)$ , dove  $H(t)$  è la funzione di Heaviside, calcolare la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione di  $f$  per  $g$ , verificando il risultato trovato con la proprietà riguardante la trasformazione di Fourier della convoluzione (**3 punti**);

ii) trovare la soluzione  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

utilizzando la trasformata di Laplace (**2 punti**).

### **Domanda 1.**

i) Cosa affermano il primo e secondo teorema di Cauchy? Enunciare entrambi i teoremi (**3 punti**);

ii) Dimostrare uno dei due teoremi enunciati (**3 punti**);

iii) Il primo teorema di Cauchy può essere enunciato con altre formulazioni? Se sì, confrontare i diversi enunciati (**2 punti**).

### **Domanda 2.**

i) Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la derivata della trasformata di Laplace di un segnale trasformabile (**2 punti**);

ii) confrontare il risultato enunciato nel punto i) con quello riguardante la derivata della trasformata di Fourier di una funzione Fourier-trasformabile (**2 punti**);

iii) enunciare il teorema relativo alla trasformata di Laplace della derivata di un segnale trasformabile (**2 punti**);

iii) fare un esempio di applicazione della formula enunciata al punto iii) (**1 punto**).