Prova scritta di Analisi Matematica 3 05.02.2025 Sol. 1

1. Calcoliamo le derivate prime e seconde di f.

$$f_x = \sin(x-2y) + x\cos(x-2y)$$

$$f_y = -2x\cos(x-2y), \quad f_z = 3,$$

$$f_{xx} = 2\cos(x-2y) - x\sin(x-2y),$$

$$f_{xy} = 2x\sin(x-2y) - 2\cos(x-2y),$$

$$f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = -4x\sin(x-2y), \quad f_{yz} = f_{zz} = 0.$$

a) La direzione di massima crescita è data dal gradiente normalizzato (quando non è nullo). Abbiamo $Df(0,0,2) = (0,0,3)$, quindi la direzione di massima crescita è $(0,0,1)$ mentre la massima crescita è pari alla norma di tale gradiente, perciò vale 3.

b) Dalla formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0,2) = \left(Df(0,0,2), \lambda\right)$$

$$= \left((0,0,3), (1/2, 0, \sqrt{3}/2)\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

c) Si ha

$$\left(Df(0,0,2), (x,y,z-2) \right) = 0$$

cioè $z = 2$.

d) Calcoliamo la matrice hessiana in $(0,0,2)$

$$D^2 f(0,0,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$3z + x\sin(x-2y) = f(0,0,2) + \left(Df(0,0,2), (x,y,z-2) \right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(D^2 f(0,0,2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} \right)$$
$$+ o\left(x^2+y^2+(z-2)^2\right) \text{ per } (x,y,z) \to (0,0,2).$$
$$= 6 + 3(z-2) + \frac{1}{2}\left(2x^2 - 4xy\right) + o\left(x^2+y^2+(z-2)^2\right)$$

$$= 3z + x^2 - 2xy + o\left(x^2+y^2+(z-2)^2\right).$$

2. Osserviamo che il vincolo è un ellissoide, dunque è un insieme compatto. Quindi, grazie al Teorema di Weierstrass, la funzione f (che è continua) assume gli estremi assoluti. Determiniamoli per mezzo del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Poniamo $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2/4 - 1$.
Gli eventuali punti singolari del vincolo verificano $Dg = 0$, ma $Dg = (2x, 2y, z/2)$ si annulla solamente nell'origine che non fa parte del vincolo. In altre parole i punti del vincolo sono tutti regolari e possono essere studiati mediante il metodo dei moltiplicatori.

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

$$= 2x+2y-z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2/4-1\right).$$

$$L_x = 2-2\lambda x, \quad L_y = 2-2\lambda y, \quad L_z = -1-\frac{\lambda}{2}z,$$

$$L_\lambda = -(x^2+y^2+z^2/4-1).$$

$$DL = 0 \iff \begin{cases} 2-2\lambda x = 0 \\ 2-2\lambda y = 0 \\ -1-\frac{\lambda}{2}z = 0 \\ x^2+y^2+z^2/4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda x = 1 \\ \lambda y = 1 \\ \lambda z = -2 \\ x^2+y^2+z^2/4 = 1 \end{cases}$$

si noti che λ è senz'altro diverso da 0.

$$\begin{cases} x = 1/\lambda \\ y = 1/\lambda \\ z = -2/\lambda \\ x^2+y^2+z^2/4 = 1 \end{cases}$$

sostituendo nella quarta equazione, abbiamo

$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, cioè $\lambda^2 = 3$, $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

Ricaviamo quindi le due soluzioni

$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$.

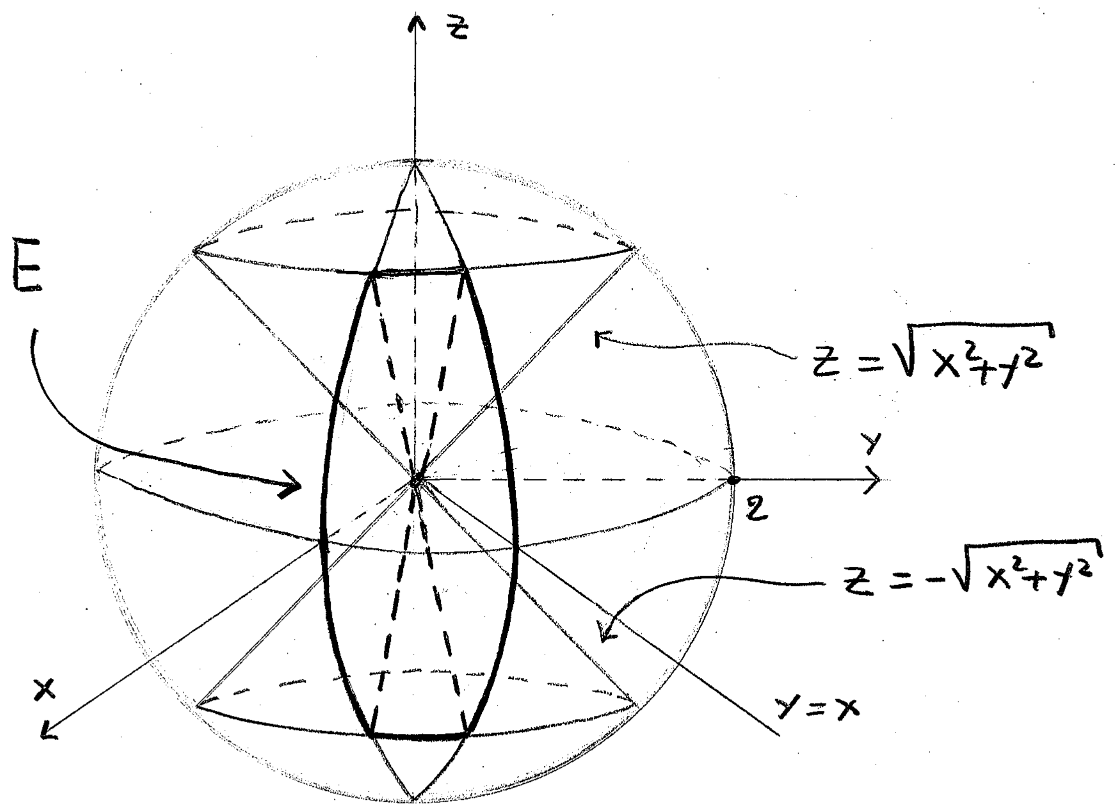
Valutiamo ora f sui punti stazionari vincolati trovati:

$f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$,

$f(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$

quindi il massimo assoluto vale $2\sqrt{3}$ ed è assunto in $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ mentre il minimo assoluto vale $-2\sqrt{3}$ ed è assunto in $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$.

3. L'insieme E è rappresentato nella figura.



Quindi, in coordinate sferiche E è descritto dalle relazioni

$$T: \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ \pi/4 \leq \varphi \leq 3/4\,\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 . \end{cases}$$

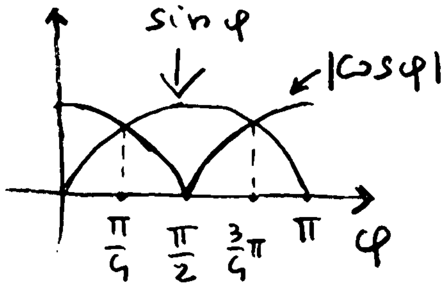
Queste relazioni si possono anche ricavare analiticamente, infatti:

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4 \iff 0 \leq \rho \leq 2,$$

$$|z| \leq \sqrt{x^2+y^2} \iff \rho|\cos\varphi| \leq \rho\sin\varphi \iff |\cos\varphi| \leq \sin\varphi$$

disequazione che si può risolvere graficamente

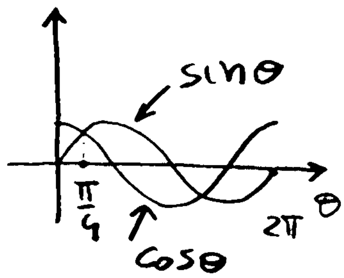
Prova scritta di Analisi Matematica 3 05.02.2025 Sol. 6



da cui $\pi/4 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$,

$$0 \leq y \leq x \iff 0 \leq \rho \sin\varphi \sin\theta \leq \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$\iff 0 \leq \sin\theta \leq \cos\theta$$



da cui $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Dato che $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$, abbiamo

$$\iiint_E (8z - 3)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T (8\rho\cos\varphi - 3)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \iiint_T 8\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta - \iiint_T 3\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^2 4\rho^3 d\rho \int_{\pi/4}^{3/4\pi} 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta + \int_0^2 3\rho^2 d\rho \int_{\pi/4}^{3/4\pi} -\sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \rho^4\Big|_0^2 \cdot \underbrace{\sin^2\varphi\Big|_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi}}_{=0} \cdot \frac{\pi}{4} + \rho^3\Big|_0^2 \cdot \cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= 0 + 8(-\sqrt{2}) \cdot \frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}\pi.$$

4. a) Dato che $\varphi(0) = (0,0,0) \neq (1,-1,1) = \varphi(1)$, la curva γ <u>non</u> è chiusa.

$\varphi'(t) = (2t, -3t^2, 4t^3) = t(2, -3t, 4t^2) \neq 0 \ \forall t \neq 0$, quindi la curva è regolare a tratti.

$|\varphi'(t)| = t\sqrt{4+9t^2+16t^4}$

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{4+9t^2+16t^4}}(2, -3t, 4t^2).$$

b) La lunghezza di γ è data dall'integrale curvilineo $\int_\gamma ds$. Dato che $ds = |\varphi'(t)|\,dt$, abbiamo

$$\int_\gamma ds = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2+16t^4}\,dt.$$

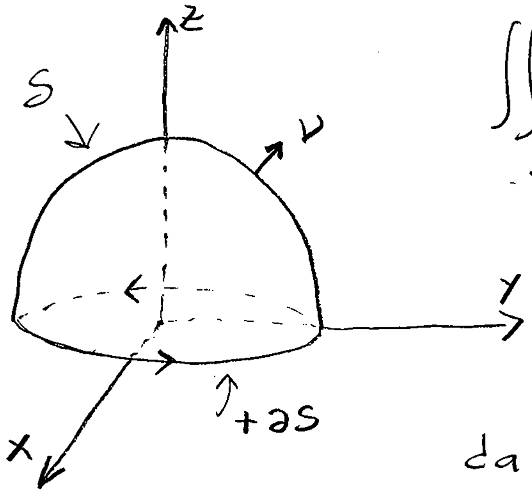
c) Ricordando la relazione $\int_\gamma (F,T)\,ds = \int_0^1 (F(\varphi(t)), \varphi'(t))\,dt$, troviamo

$$\int_\gamma (F,T)\,ds = \int_0^1 ((t^6, -t^5, -t^7), (2t, -3t^2, 4t^3))\,dt$$

$$= \int_0^1 (5t^7 - 4t^{10})\,dt = \frac{23}{88}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica 3 05.02.2025 Sol. (8)

5. Calcoliamo il flusso richiesto utilizzando il Teorema di Stokes:



$$\iint_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma = \int_{+\partial S} (F, T)\, ds.$$

La curva $+\partial S$ è parametrizzata da $\varphi : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

Abbiamo $\displaystyle\int_{+\partial S} (F, T)\, ds = \int_0^{2\pi} (F(\varphi(t)), \varphi'(t))\, dt,$

$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $F(\varphi(t)) = (0, \cos t, 0)$,

da cui

$$\iint_S (\operatorname{rot} F, \nu)\, d\sigma = \int_{+\partial S} (F, T)\, ds = \int_0^{2\pi} ((0, \cos t, 0), (-\sin t, \cos t, 0))\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \pi.$$